**INDICACIONES:**

Fecha de Entrega: Jueves 28 de Agosto, 21 horas en la Of. de la Sra. Carmen Belmar. Si entrega la tarea después de esta hora y antes del Viernes a las 12 horas, no le corrigo un problema.

**PROBLEMA # 1**

A partir de las ecuaciones acopladas de dos componentes de la ecuación de Dirac:

$$\begin{aligned} i\,\tilde{\sigma}^{\mu}\,\partial_{\mu}\,\psi_L - m\,\psi_R &= 0 \\ i\,\sigma^{\mu}\,\partial_{\mu}\,\psi_R - m\,\psi_L &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

a.- Una solución general de las ecuaciones anteriores se puede escribir como una superposición de ondas planas. Se pide entonces que escriba las soluciones de ondas planas para $\psi_L$ y $\psi_R$. Desacople primero las ecuaciones y a partir de la ecuación de Klein-Gordon obtenga las soluciones planas. Defina, por convención, $u_L$ y $u_R$ como los dos espinores constantes asociados a cada solución.

b.- Como estas funciones deben cumplir con la restricción de la ecuación de Klein-Gordon, muestre que, al ubicarse en el sistema $K'$ en reposo con la partícula, existen dos soluciones posibles para $E'$. Utilizando las ecuaciones (2), re-escriba las soluciones de la parte a.- . Utilice ahora, sólo por conveniencia, un bi-espinor:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

y análogamente cualquier otra solución.

c.- Utilizando la definición de la tarea anterior (Ec. #6)

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \text{ demuestre que } S^i = \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}\sigma^{jk} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^i \end{pmatrix} \tag{3}$$

Demuestre que la ecuación de Dirac conmuta con el operador momentum angular $J^i = -i\epsilon_{ijk}\,x_j\,\partial_k + S^i$.

**PROBLEMA # 2**

Si definimos $\Sigma^i = \hbar/2\,S^i$ podemos interpretar esa expresión como el operador spin. Muestre que el operador $\Sigma^z$ tiene autovalores $\pm 1$ al actuar sobre la función $\psi$ de la parte a.-. Muestre que $\vec{\Sigma}^2 = 1/2\,(1/2+1)\,\hbar^2$, de modo que sugiere que la partícula asociada a esta ecuación tiene espin $1/2$.

b.- Considere el vector momentum $\vec{p}$ en tres dimensiones, encuentre la expresión de $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}/(|\vec{p}|)$ y muestre que mide la alineación del espin con el momentum. En particular muestre que si $\vec{p} = (0, 0, p_z)$, este operador se transforma en $\Sigma_z$.

**PROBLEMA # 3**

a.- Mediante una transformación de Lorentz que sólo incluya la componente $z$ de la velocidad, encuentre la función $\psi_L = M^{-1}\,\psi'_L$. Repita el mismo proceso con $\psi_R$. Muestre que si consideramos $u_1 = 1$ y $u_2 = 0$ la funcion de onda para la energía positiva se transforma en:

$$\psi_L = \exp\, i(p\,z - E\,t) \begin{pmatrix} \exp\,(-\theta/2) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Análogamente para $\psi_R$ salvo un signo en una exponencial.

b.- Consider ahora el espinor de Dirac (aquel con 4 componentes). Muestre que al hacer $u_1 = 1$ y $u_2 = 0$, definimos el espinor de Dirac $\psi_+$, aquel con helicidad positiva. compruebe esto haciendo actuar el operador helicidad sobre esta función.

Tomando el otro caso: $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$, muestre que el espinor de Dirac tiene una helicidad $-1/2$. Con esto se especifica la naturaleza de las componentes de $u_1$ y $u_2$.

c.- Muestre que para normalizar la función de onda $\psi_\pm$ debe multiplicar por una factor $1/\sqrt{2}$. Muestre que $\bar{\psi}\,\psi = 1$, donde $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\,\gamma^0$.

Compruebe que la función de onda se puede escribir como un producto de una función por un espinor, por ejemplo: $\psi_+ = \exp\, i(p\,z - E\,t)\,u_+(p_z)$. Muestre que este espinor es

$$u_+(p_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\,(-\theta/2)\,|+> \\ \exp\,(\theta/2)\,|+> \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Todo lo calculado aquí se puede repetir para el caso de energía negativa.