TAREA #1 versión de August 14, 2008 Relatividad General FI-724

INDICACIONES:

Fecha de Entrega: Jueves 21 de Agosto, 18 horas en la Of. de la Sra. Carmen Belmar. Si entrega la tarea después de esta hora y antes del Viernes a las 12 horas, tiene un punto menos.

PROBLEMA # 1

A partir de la expresión para los generadores de la Transformación de Lorentz:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} = \left(1 + \frac{i}{2}\,\omega^{\rho\,\sigma}\, M_{\rho\,\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu}$$

$$\text{donde la matriz } \omega^{\mu}_{\nu} = \frac{i}{2}\,\omega^{\rho\,\sigma}\, M_{\rho\,\sigma}\,)^{\mu}{}_{\nu} \tag{1}$$

a.- Escriba explícitamente las seis matrices correspondientes a cada uno de las tres transformaciones de Lorentz y tres rotaciones.

b.- A partir del resultado anterior y recordando las antisimetrías asociadas, demuestre que:

$$M_{\rho\,\sigma})_{\mu\,\nu} = -i\,(\eta_{\rho\,\mu}\,\eta_{\sigma\,\nu} - \eta_{\rho\,\nu}\,\eta_{\sigma\,\mu})\,. \tag{2}$$

Puede que sea útil la definición de la delta de Kronecker generalizada:

$$\delta_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta} = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha}_{\mu} & \delta^{\beta}_{\mu} \\ \delta^{\alpha}_{\nu} & \delta^{\beta}_{\nu} \end{pmatrix}$$

c.- Encuentre el valor del conmutador de los generadores de las transformaciones de Lorentz:

$$[\,M_{\rho\,\sigma},\; M_{\mu\,\nu}] = ? \tag{3}$$

d.- Considere las matrices de gama de Dirac: γ^{μ}, donde:

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = I \bigotimes \sigma^{3}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i} \\ -\sigma^{i} & 0 \end{pmatrix} = \sigma^{i} \bigotimes i\,\sigma^{2}. \tag{4}$$

Un espinor transforma diferente de un vector, por ejemplo en una rotación.

$$S\,\gamma^{\lambda}\,S^{-1} = \Lambda^{\lambda}_{\mu}\,\gamma^{\mu} \text{ con } S = \exp\frac{-i}{4}\,\omega_{\mu\,\nu}\,\sigma^{\mu\,\nu} \tag{5}$$

con

$$\sigma^{\mu\,\nu} = \frac{i}{2}\,[\gamma^{\mu},\,\gamma^{\nu}\,] \tag{6}$$

el generador de las transformaciones espinoriales.

Compruebe que

$$\left[\sigma^{\mu,\nu},\,\gamma^{\lambda}\right] = 2\,i\,\left(\gamma^{\mu}\,\eta^{\nu\,\lambda} - \gamma^{\nu}\,\eta^{\mu\,\lambda}\right) \tag{7}$$

PROBLEMA # 2

Dada la ecuación de Dirac $(\,i\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - m)\,\psi(x) = 0$, se pide:

a.- Escríbala en el espacio de momentum y muestre que la ecuación se transforma en:

$$(\gamma^{\mu}\,p_{\mu} - m)\,\psi(p) = 0 \tag{8}$$

¿Qué sucede si uno se ubica en el sistema de referencia donde el electrón está en reposo? ¿Qué forma adopta la ecuación de Dirac en ese sistema? ¿Cuántos grados de libertad adquiere el sistema?

b.- Encuentre la expresión de la matriz $\gamma^5 = i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$. Demuestre que $\left(\gamma^5\right)^2 = 1$. Compruebe que $\left\{\gamma^5,\,\gamma^{\mu}\right\} = 0$. Demuestre que los siguientes operadores

$$P_L \equiv \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right), \quad P_R = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right) \tag{9}$$

son operadores de proyección $(P_L)^2 = 1$ y $P_L\,P_R = 0$ y análogamente para el otro operador. Las letras L y R representan izquierda y derecha. Son lod dos grados de libertad que tiene un electrón: si se mueve en el ejez, el spin puede apuntar a lo largo del movimiento o en oposición a él.

PROBLEMA # 3

a.- Resuelva la ecuación de Dirac 8 en el espacio de momentum.

b.- Si descomponemos el espinor: .

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \end{pmatrix} \tag{10}$$

utilizando los resultados anteriores señale cómo uno puede separar esta ecuacion en componentes *lentas* y *rápidas*. Explique la relación que existe con las componentes L y R definidas anteriormente.

c.- Muestre que γ^5 actuando sobre $\psi(p)_L$ o $\psi(p)_R$ da los autovalores correspondientes al spin clockwise y anti-clockwise.