FI723: Teoría Cuántica de Campos– Tarea 2

Segunda Cuantización

Prof. Álvaro S. Núñez

1. Práctica (!)

Consideremos un sistema fermiónico con orbitales i. Los operadores que crean el estado i-ésimo son $\mathbf{c}_i^\dagger$ y $\mathbf{c}_i$ respectivamente. Usando la representación de números de ocupación:

$$|1111100000\cdots\rangle \equiv \mathbf{c}_5^\dagger \mathbf{c}_4^\dagger \mathbf{c}_3^\dagger \mathbf{c}_2^\dagger \mathbf{c}_1^\dagger |\mathbf{O}\rangle , \tag{1}$$

evalúe:

1. $\mathbf{c}_3^\dagger \mathbf{c}_6 \mathbf{c}_4 \mathbf{c}_6^\dagger \mathbf{c}_3 |11111100000\cdots\rangle$.
2. $\langle\Psi| \mathbf{N} |\Psi\rangle$ donde $|\Psi\rangle = A|1000\cdots\rangle + B|11100000\cdots\rangle$.
3. $\langle\Psi| \mathbf{N}^2 |\Psi\rangle - \langle\Psi| \mathbf{N} |\Psi\rangle^2$ donde $|\Psi\rangle = A|1000\cdots\rangle + B|11100000\cdots\rangle$.

2. Transformación canónica

Considere un sistema físico descrito por el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \mathscr{E}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \mathscr{F}(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}) \tag{2}$$

Se le pide resolver el problema (i.e. diagonalizar el Hamiltoniano) mediante la transformación canónica:

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathrm{e}^{s}\mathcal{H}\mathrm{e}^{-s} \tag{3}$$

con $s = \Lambda(\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger)$. Encuentre el valor de Λ que haga el Hamiltoniano diagonal. Interprete físicamente el Hamiltoniano y su transformación canónica. Considere por separado los casos en que el sistema describe grados de libertad bosonicos y fermionicos.

3. "Apareamiento" de bosones

Consideremos el siguiente Hamiltoniano bosonico:

$$\mathcal{H} = \omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\Delta\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\,\mathbf{a}\right) \tag{4}$$

Antes de hacer este problema se aconseja al estudiante reflexionar sobre el sentido físico del segundo término. Para ello, imagine que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$ son los operadores de subida y bajada de un oscilador armónico.

1. Diagonalizaremos este Hamiltoniano mediante la transformación canónica:

$$\mathbf{b} = u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{a}^\dagger \tag{5}$$
$$\mathbf{b}^\dagger = u\,\mathbf{a}^\dagger + v\,\mathbf{a}\,. \tag{6}$$

   Con tal objetivo en mente, primero encuentre la restricción que deben cumplir los números reales u y v para que el par $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^\dagger$ satisfagan un álgebra bosónica.

2. Encuentre $\hat{\omega}$, u y v, para escribir:

$$\mathcal{H} = \hat{\omega}\left(\mathbf{b}^\dagger\mathbf{b} + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

3. Muestre que el estado basal del Hamiltoniano original se puede escribir como un estado coherente ("condensado") de pares de bosones, i.e.:

$$|\Psi_0\rangle = e^{-\alpha a^\dagger a^\dagger}\,|\mathbf{O}\rangle \tag{8}$$

   Encuentre el valor de α.

4. Modelo de Hubbard

Considere el modelo de Hubbard con un sitio:

$$\mathcal{H} = \mathscr{E}\left(\mathbf{a}_\uparrow^\dagger\mathbf{a}_\uparrow + \mathbf{a}_\downarrow^\dagger\mathbf{a}_\downarrow\right) + \mathscr{U}\,\mathbf{a}_\uparrow^\dagger\mathbf{a}_\uparrow\mathbf{a}_\downarrow^\dagger\mathbf{a}_\downarrow \tag{9}$$

Evalue la función partición de este sistema y grafique el valor de expectación de numero neto de electrones en función del potencial químico. Considere por separado los casos de un sistema de bosones y uno de fermiones. Analice, y comente la física por separado, los casos en que $\mathscr{U} > 0$ o $\mathscr{U} < 0$.