# FI723: Teoría Cuántica de Campos– Tarea 1

Preliminares Matemáticos

*Prof. Álvaro S. Núñez*

**Prof. Álvaro S. Núñez**

# 1. Integrales Gaussianas

En este problema desarrollará las identidades matemáticas elementales necesarias para manejar integrales de muchas variables. Esto será de utilidad al enfrentar integrales de camino. Estas integrales se pueden imaginar como integrales sobre un espacio de infinitas dimensiones. Considere para mantener la discusión en acotada y concreta que estamos evaluando promedios de una función en $\mathbb{R}^n$ con una distribución de probabilidad $\Omega$. El valor de expectación de una función $F$ satisface:

$$\langle F\rangle = \int \mathrm{d}^n x \; \Omega(x) F(x), \tag{1}$$

1. Considere la distribución Gaussiana dada por la expresión:

$$\Omega(\vec{x}) = \Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{x}^t \mathcal{A}\, \vec{x}\right) \tag{2}$$

   donde $\mathcal{A}$ es una matriz de $n \times n$. Determine las condiciones que $\mathcal{A}$ debe cumplir para que $\Omega$ corresponda a una adecuada distribución de probabilidad. Asumiendo que dichas condiciones se satisfacen determine el valor de $\Gamma$

2. Ahora determinaremos los valores de los momentos de la distribución. Los momentos corresponden a los promedios de ciertos monomios $\langle x_{\mu_1} x_{\mu_2} \cdots x_{\mu_\ell}\rangle$. Primero demuestre que

$$\langle x_{\mu_1} x_{\mu_2} \cdots x_{\mu_\ell}\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \lambda_{\mu_\ell}} \mathcal{G}(\vec{\lambda})\right)_{\vec{\lambda}=0} \tag{3}$$

   donde la función 'generadora de momentos" $\mathcal{G}(\vec{\lambda}) = \left\langle \exp\left(\vec{\lambda}\cdot\vec{x}\right)\right\rangle$.

3. Usando el último resultado y evaluando la función generadora de momentos demuestre que:

$$\langle x_{\mu_1} x_{\mu_2}\rangle = \mathcal{A}^{-1}_{\mu_1\mu_2} \tag{4}$$

   y el siguiente resultado conocido como el teorema de Wick:

$$\langle x_{\mu_1} x_{\mu_2} \cdots x_{\mu_\ell}\rangle = \sum_{\mathfrak{p}} \langle x_{\mathfrak{p}_1} x_{\mathfrak{p}_2}\rangle \cdots \langle x_{\mathfrak{p}_{\ell-1}} x_{\mathfrak{p}_\ell}\rangle \tag{5}$$

   donde la suma es sobre $\mathfrak{p}$ todos los posibles pares de indices del conjunto $\{\mu_1, \ldots, \mu_\ell\}$.

# 2. Identidades matemáticas de utilidad

1. Demuestre que para una matriz cuadrada arbitraria, $\mathbb{A}$, se tiene: $\det\mathbb{A} = e^{\mathrm{tr}\log\mathbb{A}}$. Concluya la identidad $\det(\mathbb{1} + \epsilon\mathbb{A}) = 1 + \epsilon\,\mathrm{tr}\mathbb{A} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

2. Considere que $\langle\cdot\rangle$ actúa sobre una matriz para dar un escalar. En física consideraremos que toma un promedio de ensemble, temporal o simplemente un valor de expectación. En cualquier caso tenemos las propiedades:

$$\langle \mathbb{1}\rangle = 1 \tag{6}$$
$$\langle \mathbb{A} + \alpha\mathbb{B}\rangle = \langle\mathbb{A}\rangle + \alpha\langle\mathbb{B}\rangle \tag{7}$$

Identidades matemáticas de utilidad continua en la siguiente página. . . 

Demuestre la "expansión de cumulantes":

$$\langle e^{\mathbb{A}} \rangle = e^{\left(\langle \mathbb{A} \rangle + \frac{1}{2}\left(\langle \mathbb{A}^2 \rangle - \langle \mathbb{A} \rangle^2\right) + \cdots\right)} \tag{8}$$

Para asegurarse de que entiende la expresión anterior, calcule los dos términos siguientes tras el $\cdots$.

3. Demuestre la relación:

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \cdots \tag{9}$$

y la relación de Kubo:

$$\left[X, e^{-\beta Y}\right] = e^{-\beta Y} \int_0^\beta e^{\lambda Y} [X, Y] e^{-\lambda Y} d\lambda \tag{10}$$

donde $X$, $Y$ son dos operadores arbitrarios y $\beta$ es un escalar.

# 3. Estados Coherentes

En este problema introduciremos las herramientas básicas asociadas a los estados coherentes de un oscilador armónico. La dinámica de un oscilador armónico esta descrita por un Hamiltoniano: $\mathcal{H} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$. Primero estableceremos la noción básica asociada a los estados coherentes: corresponden a estados de mínima incerteza. Por este motivo son los candidatos adecuados para establecer una terminología semi-clásica y por lo tanto tendrán un rol protagónico en el desarrollo del formalismo de integrales de camino.

1. Considere el paquete de ondas $|\Psi\rangle$. Encuentre las condiciones sobre $|\Psi\rangle$ para que la relación de incerteza obtenga su menor valor. Es decir minimize la expresión:

$$\Delta x \Delta p(\Psi) \tag{11}$$

2. Encuentre la ecuación previa en términos de los operadores de subida y bajada. En particular verifique que el estado basal satisface la condición requerida.

3. Considere el estado creado a partir de dicho estado basal mediante la operación de traslación espacial:

$$|\Psi_Q\rangle = e^{i\hat{p}Q} |\Psi_0\rangle \tag{12}$$

similarmente tenemos un posible desplazamiento de momentum (¡empujon!):

$$|\Psi_P\rangle = e^{-i\hat{x}P} |\Psi_0\rangle \tag{13}$$

Calcule los valores de expectación de la posición y del momentum para ambos kets.

4. En cada punto del espacio de fases clásico, $\{P, Q\}$ podemos definir el estado coherente asociado, $|\Psi_{Q,P}\rangle$, simplemente usando las relaciones anteriores:

$$|\Psi_{Q,P}\rangle = e^{-i\hat{x}P} e^{i\hat{p}Q} |\Psi_0\rangle . \tag{14}$$

Calcule: $\langle \Psi_{Q_1,P_1} | \Psi_{Q_2,P_2} \rangle$.

5. Describa la evolución temporal del estado que en el instante inicial es un estado coherente centrado en $Q_0$ y $P_0$.