Mecánica Estadística

Auxiliar

Profesor: Rodrigo Soto
Auxiliar: Hernán González

Problema 1: Proceso Adiabático

Una partícula puntual de masa m se mueve dentro del intervalo $0 \leq x \leq L$ rebotando elásticamente en 0 y en L.
a) Dibujar la trayectoria del espacio de fase para este sistema.
b) Encontrar el volumen del espacio de fase $\Omega(E, L)$ para trayectorias con energía menor que E.
c) Mostrar que $\Omega(E, L)$ se mantiente constante cuando la pared $x = L$ se mueve lentamente (invariancia adiabática).
d) En la descripción cuántica, encontrar el número de estados $\Sigma(E, L)$ con energía menor que E y compararlo con $\Omega(E, L)$.

Problema 2: Entropía Microcanónica

Considerar un gas de N partículas puntuales de igual masa m en una caja de volumen V.
a) Evaluar $I(R) \equiv \int_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq R^2} dx_1 \cdots dx_n$.
b) Encontrar el número de estados $\Omega(E, V, N)$. Usarlo para derivar la ecuación de estado y su energía interna.
c) Resolver la parte (b) si se agrega una interacción de la forma: $V(\vec{r_1}, \cdots, \vec{r_N}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\omega^2}{2} r_i^2$.

Problema 3: Teorema de Equipartición

La densidad de probabilidades en el ensemble microcanónico para un sistema hamiltoniano está dada por:

$$\rho_{mc}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} & E \leq H(\vec{x}) \leq E + \Delta E \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

donde se ha definido $\vec{x} = (q_1, \cdots, q_{3N}, p_1, \cdots, p_{3N})$. A través de esta densidad se pueden definir el promedio de una cantidad $F(\vec{x})$ cualquiera, como:

$$\langle F(\vec{x}) \rangle = \int d^{6N}x \ \rho_{mc}(\vec{x}) F(\vec{x})$$

a) Calcular $\left\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle$ y usar este resultado para probar que si el hamiltoniano de un sistema es, $H = \sum_{i=1}^{3N} A_i p_i^2 + B_i q_i^2$ con A y B constantes, entonces $\langle H \rangle = \frac{f}{2} k_B T$, donde f es el número de grados de libertad del sistema.