Pauta Ejercicio 8

Problema 1

a) El Hamiltoniano está dado por

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Las posibles energías del sistema corresponden a los valores propios de $\widehat{H}$. Luego, debemos calcular:

$$\widehat{H}\phi = E\phi \Longrightarrow \det(\widehat{H} - EI) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-E & 2 \\ 2 & 1-E \end{vmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow$

$$(1-E)^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (E-3)(E+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_1 = -1 \qquad E_2 = 3$$

Por lo tanto, las energías permitidas son $E_1 = -1$ y $E_2 = 3$.

b) Ahora debemos calcular los autoestados asociados a las autoenergías calculadas ...

- $E = E_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -b$$

$\Longrightarrow$

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $E = E_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = b$$

$\Longrightarrow$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) La función de onda de la partícula se escribe como ...

$$\psi = \sum_{k=0}^{n} A_k \phi_k e^{-iE_k t/\hbar} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{it/\hbar} + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3it/\hbar}$$

Evaluando en $t = 0$ queda,

$$\psi = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = 0$$

Por lo tanto, el estado de la partícula es:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{it/\hbar}$$

Como el estado inicial es un autoestado, la partícula permanecerá en ese estado.

d) Si ahora el sistema está inicialmente en el estado $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ldots$

$$\psi = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$A_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto,

$$\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{it/\hbar} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3it/\hbar}$$

El estado de energía mas bajo es ϕ_1. La densidad de probabilidad de que la particula esté en el estado ϕ_1 es...

$$\rho = (\phi_1)^\dagger \psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-it/\hbar}$$

Por lo tanto, la probabilidad es ...

$$P = |\rho|^2 = \frac{1}{2}$$

Problema 2

Como el valor del spin en el eje x es $-\hbar/2$, se tiene que $\widehat{s}_x\psi = -\frac{\hbar}{2}\psi$.

$$\det(\widehat{s}_x - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1$$

En nuestro caso, $\lambda = \lambda_1 = -1 \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\phi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

O sea, este es el estado inicial del sistema. Si ahora medimos el spin a lo largo del eje z, la probabilidad de que la partícula esté en el estado $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es ...

$$P = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \frac{1}{2}$$