Ejercicios

Mecánica Cuántica.

1) Considere una partícula unidimensional ligada[1]

a) si a $t = 0$ la función de onda es constante en la región $-a < x < a$ y cero en cualquier otro x, exprese la función de onda completa a un tiempo posterior t en términos de los autoestados del sistema.

2) Sea $\psi(x,t)$ una solución de la ecuación de Schroedinger para una partícula de masa m en una dimensión y

$$\psi(x,0) = Ae^{-x^2/a^2}$$

a) Encontrar la amplitud de probabilidad **en el espacio de momento**.
b) Encontrar $\psi(x,t)$ (considerar partícula libre).

3) Una partícula de masa m está confinada a una región unidimensional $0 < x < a$. A tiempo $t = 0$ su función de onda normalizada es

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

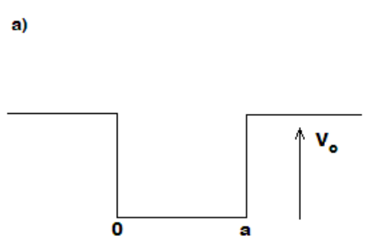
a) Cuál es la función de onda a un tiempo posterior $t_0 > 0$.
b) Calcule el valor esperado de la energía $\langle E \rangle$ para $t = 0$ y $t = t_0$.
c) Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la región $0 \le x \le a/2$ a tiempo $t = t_0$.

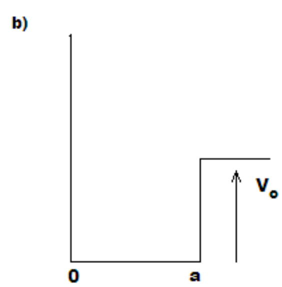
4) Un cuerpo rígido con momento de inercia I_z rota libremente en el plano $x - y$. Sea ϕ el ángulo entre el eje x y el eje de rotación. El Hamiltoniano del sistema es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2I_z}\frac{d^2}{d\phi^2} \qquad I_z = const$$

a) Encontrar las energías permitidas y correspondientes autofunciones.
b) A tiempo $t = 0$ el sistema está descrito por el paquete de ondas $\psi(\phi,0) = A\sin^2\phi$. Encontrar $\psi(\phi,t)$.

5) Encontrar los estados ligados de energía (i.e. $-V_0 < E < 0$) de los siguientes potenciales





6) La dinámica de una partícula que se mueve en una dimensión en un potencial $V(x)$ está gobernada por el Hamiltoniano $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$. Sean E_n^0, $n = 1,2,3.....$ las autoenergías de $\hat{H}_0$. Ahora considere el Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{\lambda\hat{p}}{m}$, con λ un parámetro constante. Encontrar los

[1] Un estado ligado se caracteriza por $\psi(x \to \pm\infty) = 0$ y $E < V_0$

autovalores de $\hat{H}$ en función de λ, m y E_0^n.

7)Sea la función de ondas unidimensional

$$\psi(x) = A \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 e^{-x/x_0},$$

donde A, n y x_0 son constantes.

Encontrar el potencial $V(x)$ y la energía E para la cual esta función de onda es autofunción. Suponga que $x \to \infty \Rightarrow V(x) \to 0$.

8) Encontrar la energía (ligada) de una partícula de masa m en una dimensión, que se encuentra en el potencial $V(x) = -V_0 \delta(x)$.

9) Una partícula de masa m se mueve en una dimensión en el potencial $V(x) = -a\delta(x)$. La partícula está ligada. Encontrar el valor $x = x_0$ para el cual la probabilidad de encontrar la a la partícula en la region $|x| < x_0$ es igual a 1/2.

10) La función de onda de un oscilador armónico en el estado base es

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}, \qquad \alpha = \frac{m\omega_0}{\hbar} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

donde ω_0 es ña frecuencia del oscilador, k la constante del resorte y m la masa.

Obtener una expresión para la probabilidad de encontrar a la partícula fuera de la región clásica.

11) Un electrón se encuentra confinado a un estado base de un oscilador armónico, tal que

$$\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = 10^{-10} m.$$

Encontrar la energía (en eV) requerida para excitarlo al primer estado excitado del oscilador.

Recuerde que $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$. Usar teorema del Virial.

12) A $t = 0$ una partícula en el potencial $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ está descrita por la función de ondas

$$\psi(x, 0) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \phi_n(x).$$

a) Encontrar A.
b) Escribir $\psi(x, t)$.
c) Mostrar que $|\psi(x, t)|^2$ es una función periódica del tiempo. Indicar el mayor período τ.
d) Encontrar el valor esperado de la energía para $t = 0$.

13) Una partícula libre de masa m se mueve en una dimensión. A tiempo $t = 0$ su función de onda normalizada es

$$\psi(x, 0, \sigma_x^2) = \left(2\pi\sigma_x^2 \right)^{-1/4} e^{\frac{-x^2}{4\sigma_x^2}},$$

donde $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle$.
a) Calcular $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$.
b) Interpretar el resultado anterior en términos del proncipio de Incertidumbre.

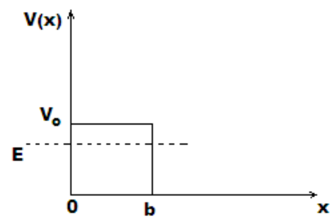
14) Una partícula de masa m se mueve en un potencial unidimensional bajo la influencia de un potencial $V(x)$. Si la partícula se encuentra en el estado

$$\psi(x) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{\frac{-\gamma^2 x^2}{2}},$$

con $E = \frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}$, $\gamma = const.$
a) Encontrar $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$.
b) Encontrar $V(x)$.
c) Encontrar la probabilidad $P(p)dp$ de que la partícula tenga un momento entre p y $p + dp$.

15) El isótopo radioactivo $_{83}Bi^{212}$ decae a $_{81}Tl^{208}$, emitiendo una partícula alfa de energía $E = 6$MeV.

a) Considere el potencial de la figura. Calcular la probabilidad de transición T para una partícula de masa m que incide desde la izquierda con energía E en el límmite $T << 1$.



16) Un sistema físico en tres dimensiones está representado por el Hamiltoniano

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cuáles son las posibles energías medibles?.
Si una partícula está representada por el estado (en la base del Hamiltoniano)

$$\psi = \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar $\langle H \rangle$.

17) El Hamiltoniano de una partícula es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(x)$$

Escribir la ecuación de Schroedinger en la representación de momento.

18) Considere el pozo infinito de ancho $2L$ y una partícula confinada en él ($-L < x < L$). La partícula se encuentra en el estado base, por lo tanto

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \qquad E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}.$$

Suponga que a $t = 0$ las paredes del pozo se mueven instantáneamente a la posición $(-2L, 2L)$. El cambio no afecta al estado de la partícula el cual es el mismo antes e inmediatamente después del cambio.

a) Escribir la función de onda a $t > 0$. Escribir la probabilidad de encontrar a la partícula en un autoestado arbitrario del sistema modificado.
b) Calcular el valor esperado de la energía. Usar $\sum_{n=0} \frac{(2n+1)^2}{((2n+1)^2-4)^2} = \frac{\pi^2}{16}$.