

Física Contemporanea

Control 1

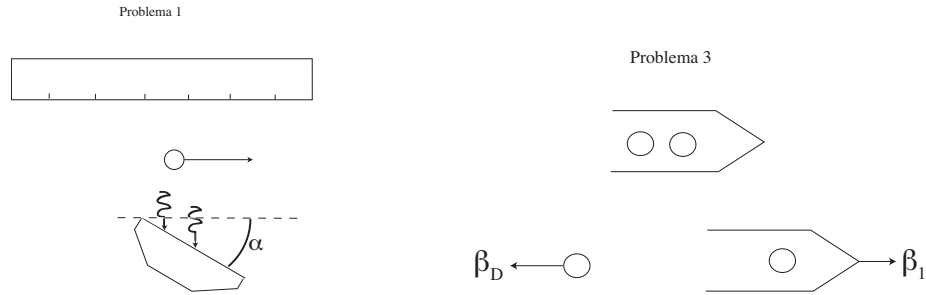
Profs: Felipe Barra y Paola Arias

Tiempo: 3 horas

Problema 1:

Una cámara toma la fotografía de una bala que se mueve con velocidad v y que tiene una longitud propia b . Detrás de la bala y paralelo a su trayectoria hay una regla, que está en reposo con respecto a la cámara. La dirección de la cámara hace un ángulo α respecto a la dirección de velocidad de la bala.

a) Cuál será la longitud aparente de la bala vista en la foto? (Es decir, qué porción de la regla estará cubierta por la bala en la foto)



Nota: Considere que la imagen se forma por fotones que llegan a la cámara *simultáneamente* desde la bala.

Problema 2:

a) Desde un sistema inercial $\mathcal{O}$ se observa una estrella muy lejana en un ángulo ϕ . Un telescopio se mueve con velocidad V según x con respecto a $\mathcal{O}$. Qué ángulo debe tener el telescopio para poder observar correctamente la luz proveniente de la estrella?

b) Si $\phi = 0$ y la estrella pulsa con una frecuencia f (es decir, emite f pulsos de luz blanca por unidad de tiempo medido en el sistema inercial en que la estrella está en reposo). Con qué frecuencia f' se observa en $\mathcal{O}'$?

Problema 3:

Considere una nave en reposo en el espacio cuya masa (total) en reposo es M_0 . Suponga que para ponerse en movimiento el tripulante de la nave puede lanzar consecutivamente (no simultáneamente) dos bolsas de desechos de masa en reposo m cada una. Si las bolsas salen con velocidad β_D medida en el sistema en que la nave está en reposo antes de lanzar la bolsa, calcule la velocidad final de la nave.

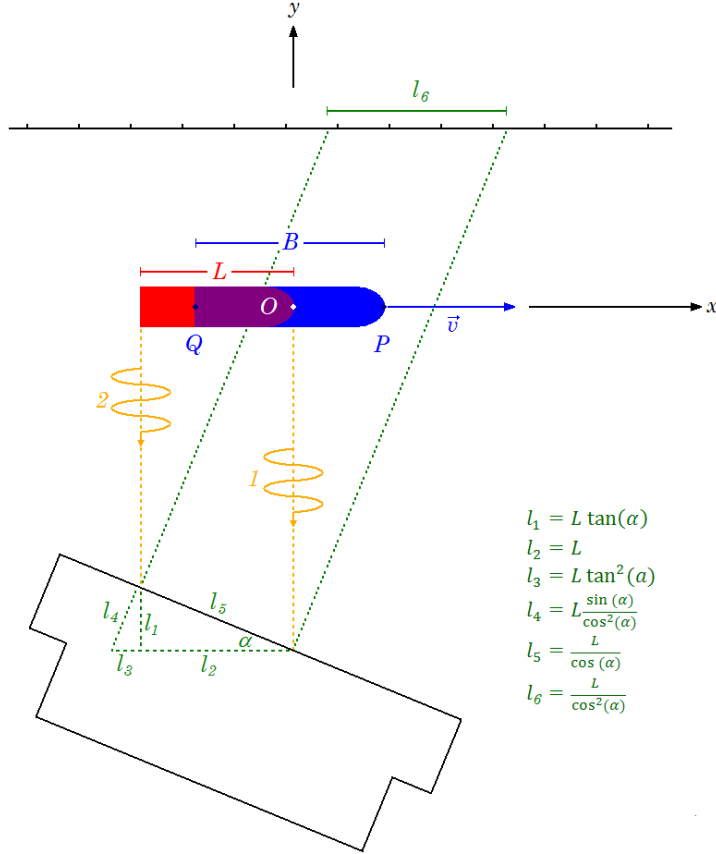
a) Escriba la velocidad β_1 de la nave después de lanzar la primera bolsa en función de M_0 , m y β_D .

b) Obtenga la velocidad β_f final después de lanzar la segunda bolsa.

Pauta Control N°1 FI34A Física Contemporánea

Profesores: Felipe Barra (Sección N°2) y Paola Arias (Sección N°3)
Auxiliares: Ignacio Ortega, Gustavo Castillo y Jaime Zúñiga
Semestre: Primavera 2008

Problema N°1



Para afrontar este problema es necesario entender que una cosa es cómo las cosas *son* y otra, cómo se *ven*, todo esto desde la perspectiva de un determinado sistema de referencia.

La bala en movimiento (que es mejor suponer como un objeto unidimensional) es filmada por la cámara en medida que la luz (fotones) que ésta emite llegue a donde está la cámara. Por simplicidad consideraremos sólo los fotones emitidos por los extremos de la bala y supondremos que se mueven en dirección perpendicular al movimiento de la bala. La cámara registra el aspecto de la bala en un determinado instante en el tiempo en virtud de los fotones que la cámara recibe en dicho instante, los cuales no necesariamente fueron emitidos en cada extremo de la bala al mismo tiempo.

Sea el sistema inercial S aquél que es estático respecto a la cámara y la regla (Sistema de Laboratorio). El Origen está ubicado de manera tal que punta P de la bala pasa por él y, a la vez, emite un fotón, (ver figura). La cola Q de la bala también emite fotones. Nos interesa en particular aquél fotón que llegó a la cámara al mismo tiempo que el fotón emitido por P al pasar por el Origen.

Escribamos la trayectoria de la bala, recordando que la bala está sometida a la contracción de Lorentz:

$$\vec{r}_p(t) = vt\hat{x}, \quad \vec{r}_q(t) = (vt - B)\hat{x}, \quad \text{donde } B = \frac{b}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} b$$

Y las trayectorias de los fotones emitidos por P y Q:

$$\vec{r}_1 = -ct\hat{y}, \quad \vec{r}_2 = -L\hat{x} - c(t - T)\hat{y}, \quad \text{Con } L \text{ y } T \text{ por determinar.}$$

T es el instante en que el fotón 2 fue emitido por Q. si los fotones llegasen a la cámara al mismo tiempo (lo cual depende de T), entonces L definiría la longitud de la bala *virtual*. Hay dos cosas que tener en cuenta:

- Si el fotón 2 fue emitido por Q en el instante T , entonces $\vec{r}_q(T) = \vec{r}_2(T)$.
- Como la cámara está inclinada, el fotón 1 debe recorrer una distancia mayor en $B \tan(\alpha)$. Para que ambos fotones lleguen a la cámara al mismo tiempo, es necesario: $\vec{r}_1(T) = -L \tan(\alpha) \hat{y}$.

Reescribimos las ecuaciones:

$$vT - B = -L, \quad -cT = -L \tan(\alpha).$$

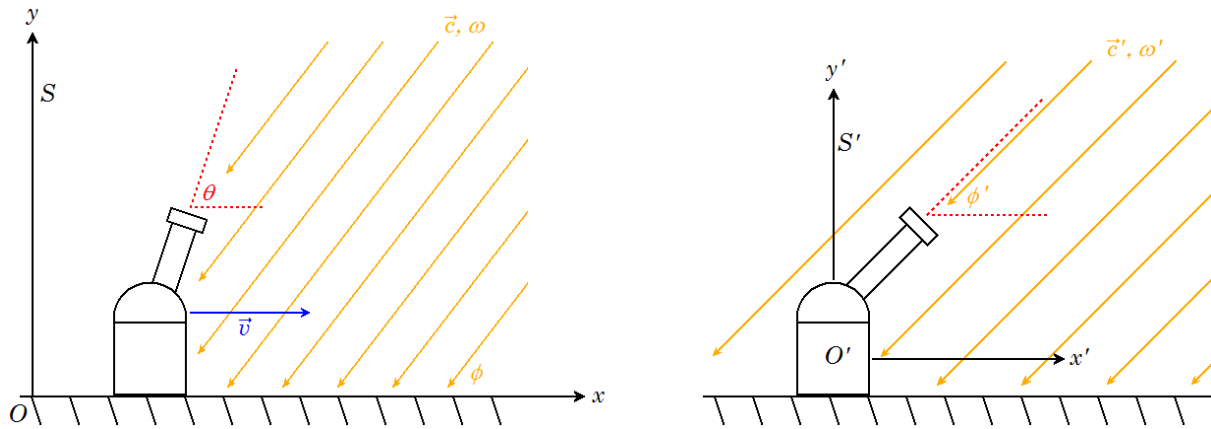
De las cuales se hace el despeje:

$$T = \frac{B \tan(\alpha)}{c + v \tan(\alpha)} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c} \tan(\alpha)} \frac{b}{c} \tan(\alpha), \quad L = \frac{cB}{c + v \tan(\alpha)} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c} \tan(\alpha)} b$$

Una vez calculado L , se puede reemplazar en las expresiones l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 , y l_6 .

Problema N°2

Definimos el sistema inercial de laboratorio S , fijo a la Tierra, y el sistema S' solidario al observatorio.



a) Las coordenadas de un evento según S y S' se relacionan según las Transformaciones de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\gamma \text{ es el Factor de Lorentz: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

A partir de las Transformaciones de Lorentz encontramos la relación entre las velocidades de un cuerpo según S y S' :

$$\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\gamma(\dot{x} - v)}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)dt} = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}}, \quad \dot{y}' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\dot{y}dt}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)dt} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}} \dot{y}$$

En el caso de los fotones que caen del cielo:

$$\vec{c} = -c(\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{y}), \quad \vec{c}' = -c(\cos(\phi')\hat{x} + \sin(\phi')\hat{y})$$

Aplicando la transformación para encontrar $\dot{x}'$:

$$-c \cos(\phi') = \frac{-c \cos(\phi) - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot -c \cos(\phi)} \Leftrightarrow \cos(\phi') = \frac{c \cos(\phi) + v}{c + v \cos(\phi)}$$

Con esto basta. Viéndolo desde una perspectiva práctica, lo que se quiere es saber la inclinación que el astrónomo que está en el telescopio móvil debe darle a éste para que los rayos de luz entren por su cañón; es decir, el ángulo ϕ' .

Si deseamos saber qué tan inclinado se ve el telescopio según el observador en S, sólo hay que recurrir a la Contracción de Lorentz. Si Δx y Δy son las proyecciones del telescopio según los ejes x e y , se cumple entonces $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Delta x, \Delta y' = \Delta y$. Si θ es el ángulo del telescopio respecto al eje x , entonces:

$$\tan(\theta') = \frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tan(\theta)$$

Pero sabemos que $\theta' = \phi'$, y con eso despejamos θ :

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \arctan \left(\arccos \left(\frac{c \cos(\phi) + v}{c + v \cos(\phi)} \right) \right)$$

b) Lo que se pide en esta parte del problema no es más que deducir la fórmula del Efecto Doppler Relativista. En esta ocasión nos haremos uso del cuadrimomento: $\vec{P} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$. Sabemos que la relación entre $\vec{P}'$ y $\vec{P}$ está dada por las transformaciones de Lorentz. Como este problema es unidimensional (En la literatura se suele llamar *dimensión 1+1*):

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c} p_t \right), \quad p'_t = \gamma \left(p_t - \frac{v}{c} p_x \right). \quad \text{Es decir,} \quad p' = \gamma \left(p - \frac{v}{c^2} E \right), \quad E' = \gamma (E - vp)$$

Para los fotones de este problema, $E = hf, p = -\frac{hf}{c}$, donde h es la Constante de Planck y f es la frecuencia lineal de la luz. Al reemplazar en las Transformaciones de Lorentz, ambas llevan al mismo resultado:

$$f' = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \right) f = \frac{\left(1 + \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} f = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c} \right) \left(1 + \frac{v}{c} \right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c} \right) \left(1 - \frac{v}{c} \right)}} f = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{v}{c} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c} \right)}} f = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} f > f$$

Asignación de puntaje:

• Parte (a):	4.0
• Parte (b):	2.0
• Punto base:	1.0
Total:	7.0

Problema N°3

En este problema los datos se manejan a modo de velocidades sin dimensión: $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$. Por costumbre, haremos uso de las velocidades con dimensión.

Sea S el sistema de referencia inercial de laboratorio, en el cual la nave inicialmente está en reposo y tiene masa propia M_0 . Entonces expulsa uno de los bloques de desechos, teniendo éste una masa propia m y una velocidad $\vec{v}_D$. La nave sale impulsada entonces con velocidad $\vec{v}_1$ por determinar.

Sea M_1 la masa del cohete después de haber arrojado el bloque de desechos. Es importante hacer notar que $M_1 \neq M_0 - m$. Si suponemos $M_1 = M_0 - m$ y escribimos la conservación de la energía: $M_0 c^2 = \gamma_1 (M_0 - m) c^2 + \gamma_D m c^2$, lo cual es imposible pues en general $\gamma > 1$; con lo que $E_{inicial}$ sería menor que E_{final} . Es necesario convertir materia en energía cinética para que el proceso sea posible.

Tenemos así dos incógnitas, M_1 y $\vec{v}_1$; y dos ecuaciones: las conservaciones de la energía y el momento relativistas:

$$\text{Energía: } M_0 c^2 = \gamma_1 M_1 c^2 + \gamma_D m c^2, \quad \text{Momento: } 0 = \gamma_1 M_1 v_1 - \gamma_D m v_D$$

El sistema es sumamente no lineal, pero se puede resolver despejando $\gamma_1 M_1$ de la ecuación de la energía,

$$\gamma_1 M_1 = M_0 - \gamma_D m$$

y reemplazando en la ecuación del momento:

$$v_1 = \frac{\gamma_D m v_D}{\gamma_1 M_1} = \frac{\gamma_D m v_D}{M_0 - \gamma_D m} = \frac{m v_D}{\frac{M_0}{\gamma_D} - m} = \frac{m v_D}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2} M_0 - m}$$

Ahora que conocemos v_1 y, por tanto, γ_1 , podemos despejar M_1 en la ecuación de la energía:

$$M_1 = \frac{M_0 - \gamma_D m}{\gamma_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2} (M_0 - \gamma_D m) = \sqrt{(M_0 - \gamma_D m)^2 - \left(\gamma_D m \frac{v_D}{c}\right)^2} = \sqrt{M_0^2 - 2\gamma_D M_0 m + m^2}$$

Resuelto esto, sea S' el sistema de inercial solidario a la nave (Que ahora se mueve con velocidad $\vec{v}_1$ respecto a S y tiene masa propia M_1). Entonces la nave expulsa el segundo bloque de desechos, que tiene velocidad $v'_B = -v_D$ y masa propia m . La nave tiene velocidad v'_f y masa propia M_f , ambas desconocidas.

Escribimos la conservación de la energía y el momento en S':

$$\text{Energía: } M_1 c^2 = \gamma'_f M_f c^2 + \gamma'_B m c^2, \quad \text{Momento: } 0 = \gamma'_f M_f v'_f - \gamma'_B m v'_B$$

Nuevamente tenemos un sistema de ecuaciones de 2x2, que es de hecho idéntico al anterior. Luego, las soluciones son análogas y, haciendo un poco de álgebra, las escribimos en función de los datos:

$$v'_f = \frac{\gamma'_B m v'_B}{M_1 - \gamma'_B m} = \frac{\gamma_D m v_D}{\sqrt{M_0^2 - 2\gamma_D M_0 m + m^2} - \gamma_D m}$$
$$M_f = \sqrt{M_1^2 - 2\gamma'_B M_1 m + m^2} = \sqrt{M_1^2 - 2\gamma_D M_1 m + m^2}$$

Escribimos la velocidad final de la nave según el sistema de laboratorio S', ocupando la transformación de velocidades inversa:

$$v_f = \frac{v_f' + v_1}{1 + \frac{v_1 v_f'}{c^2}}$$

que está escrita en términos de cantidades que son todas conocidas.

Asignación de puntaje:

• Parte (a):	3.0
• Parte (b):	3.0
• Punto base:	1.0
Total:	7.0