

Clase Auxiliar Pendiente, Física Contemporánea FI34A

Profesor Claudio Romero
Auxiliares Carolina Milad y Jocelyn Dunstan.

1 de Diciembre de 2008

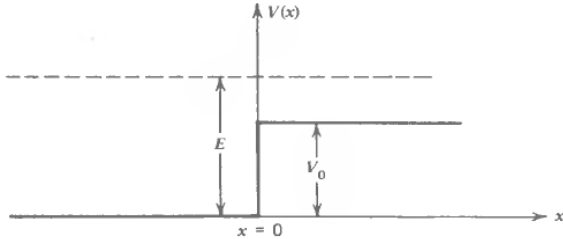
1. Potenciales Unidimensionales.

En este curso estudiaremos potenciales en una dimensión ya que a pesar de su simpleza capturan efectos importantes que se logran entender usando mecánica cuántica. A continuación se procede a resumir los potenciales que deben conocer:

1.1. El Potencial escalón

$$V(r) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación de Schrödinger:



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = E u(x)$$

definiendo $k^2 = 2mE/\hbar^2$ y $q^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$ vemos que para $x < 0$ (donde $V(x) = 0$) la solución más general es:

$$u(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

Usando que el flujo de la onda incidente es $\hbar k/m$, el flujo de la onda reflejada es $\hbar k|R|^2/m$, donde R es el coeficiente de reflexión. Del mismo modo, la onda más general que encontramos en $x > 0$ es:

$$u(x) = T e^{iqx}$$

puesto que no hay fuente desde la derecha, y se cumple que el flujo de la onda transmitida es $\hbar q|T|^2/m$. De la conservación de flujo se tiene:

$$\frac{\hbar k}{m}(1 - |R|^2) = \frac{\hbar q}{m}|T|^2$$

Además debe cumplirse que la función de ondas sea continua en $x = 0$,

$$1 + R = T \quad (1)$$

Y de la condición de que la derivada sea continua (recuerden que siempre deben imponer estas dos continuidades a menos que se trate de un potencial tipo delta de Dirac en donde la derivada es discontinua) tenemos:

$$ik(1 - R) = iqT \quad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$\begin{aligned} R &= \frac{k - q}{k + q} \\ T &= \frac{2k}{k + q} \end{aligned}$$

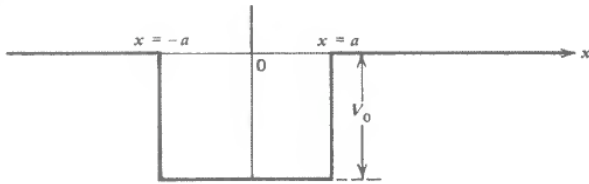
de modo que los flujos reflejados y transmitidos son:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar k}{m} |R|^2 &= \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2 \\ \frac{\hbar q}{m} |T|^2 &= \frac{\hbar q}{m} \frac{4k^2}{(k + q)^2} \end{aligned}$$

Moraleja: Este es el problema más sencillo de potenciales unidimensionales. La forma de abordarlos es plantear la ecuación de Schrödinger, resolverla en los tramos correspondientes, en este caso, en la zona en que $V(x) = 0$ y donde $V(x) \neq 0$. Luego se debe imponer continuidad de la función y su derivada.

1.2. El Pozo de Potencial

$$V(r) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$



Como es usual definimos $k^2 = 2mE/\hbar^2$ y $q^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$, de modo que las soluciones en todo el espacio son:

$$u(x) \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & x < -a \\ Ae^{iqx} + Be^{-iqx} & -a < x < a \\ Te^{ikx} & a < x \end{cases}$$

donde hemos usado que dentro del pozo tenemos ondas viajando hacia la derecha y hacia la

izquierda, y que desde $x < a$ no hay fuentes.

Una forma de imponer continuidad de la función de ondas y de su derivada es imponer la continuidad de la siguiente cantidad (lo que se conoce como derivada logarítmica):

$$\frac{1}{u(x)} \frac{du(x)}{dx}$$

De lo cual se obtiene en $x = -a$:

$$\frac{iqAe^{-iqa} - iqBe^{iqa}}{Ae^{-iqa} + Be^{iqa}} = \frac{ike^{-ika} - ikRe^{ika}}{e^{-ika} + Re^{ika}}$$

Y en $x = a$,

$$\frac{iqAe^{iqa} - iqBe^{-iqa}}{Ae^{iqa} + Be^{-iqa}} = \frac{ikTe^{ika}}{Te^{ika}}$$

Luego de un poco de álgebra se obtiene que:

$$R = ie^{-2ika} \frac{(q^2 - k^2) \sin(2qa)}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)}$$

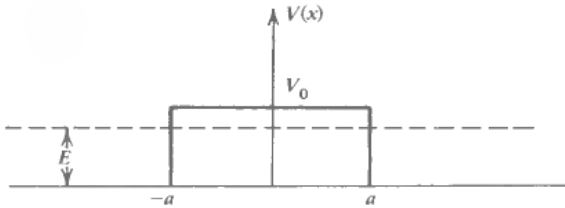
$$T = ie^{-2ika} \frac{2qk}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)}$$

En donde se verifica que si $E \gg V_0$ se tiene que $q^2 - k^2 \ll 2qk$ y no se tiene reflexión (la partícula no se percata de que hay un pozo). En cambio, si $E \sim 0$, $k \sim 0$ y no se tiene transmisión (la partícula no tiene energía suficiente para penetrar en el pozo.)

Moraleja: Si se fijan, todos los problemas se hacen igual, pero el álgebra que permite despejar los distintos coeficientes a partir de las condiciones de continuidad puede ser tediosa. Traten de llegar a estos mismos coeficientes ustedes solos!

1.3. La Barrera de Potencial

$$V(r) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_0 & -a < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$



Y fuera de esta región:

$$u(x) \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & x < -a \\ Te^{ikx} & x > a \end{cases}$$

Este es el problema que resolvieron con Carolina en la última auxiliar y es importante puesto que se demuestra el efecto tunel. En efecto, si $E < V_0$, se define $\kappa = -2m(E - V_0)/\hbar^2$ de modo que la solución entre $-a < x < a$ es:

$$u(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x}$$

Si se fijan, para obtener los coeficientes R y T basta con darse cuenta que $q \rightarrow i\kappa$, y podemos usar lo ya calculado.

Moraleja: Este caso es muy importante y deben estudiarlo. Pueden buscar en internet información o en el Gasiorowicz que dejé en material docente. Recuerden además que cualquier potencial pueden descomponerlos como una sucesión de rectángulos de ancho infinitesimal (recuerden la idea de la integral de Riemann.)

1.4. Estados ligados en un pozo de potencial

$$V(r) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

Este era el caso a tratar en la auxiliar que no les hice, en donde $V_0 > 0$ y $E < 0$. (La idea es que hagan el análogo con el potencial gravitatorio y como con energías negativas se podían tener estados ligados, como órbitas elípticas por ejemplo).

Definiendo $\alpha^2 = -2mE/\hbar^2$, las soluciones fuera del pozo son:

$$u(x) \begin{cases} C_1 e^{\alpha x} & x < -a \\ C_2 e^{-\alpha x} & x > a \end{cases}$$

¿Por qué tienen que ser de esa forma? Piensen en el caso $x > a$, si permitiésemos una solución $e^{\alpha x}$ tendríamos que en $u(x \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ lo cual no cumple la condición de normalización $\int |u(x)|^2 = 1$. Del mismo modo se entiende porqué no podemos permitir el término $e^{-\alpha x}$ para $x < -a$. Aclarado este punto planteamos que la solución dentro del pozo de potencial es:

$$u(x) = A \cos(qx) + B \sin(qx)$$

donde $q^2 = 2m(V_0 - |E|)/\hbar^2$. Puesto que el potencial es simétrico bajo la reflexión $x \rightarrow -x$ (basta ver su forma), la energía cinética también tiene la misma simetría. Puesto que la energía es el autovalor del hamiltoniano (no sé si entienden esto, es más bien para un curso de mecánica cuántica) el hamiltoniano también tiene esta simetría. Por lo cual clasificaremos las soluciones que obtengamos en PARES e IMPARES, donde la solución par cumple que $C_1 = -C_2$.

Imponiendo la continuidad de $\frac{1}{u(x)} \frac{du(x)}{dx}$ en $x = a$ y $x = -a$ obtenemos que para el caso par $B = 0$ y se cumple que:

$$\alpha = q \tan(qa)$$

En cambio si se trata de la solución impar, $A = 0$ y

$$\alpha = -q \cot(qa)$$

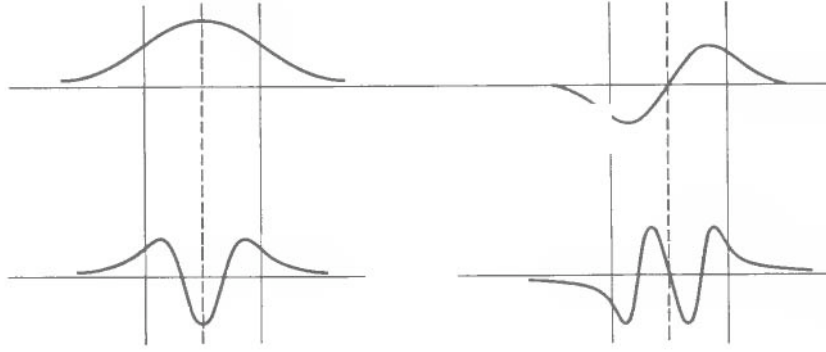


Figura 1: Forma de las soluciones pares (izquierda) y de las impares (derecha).

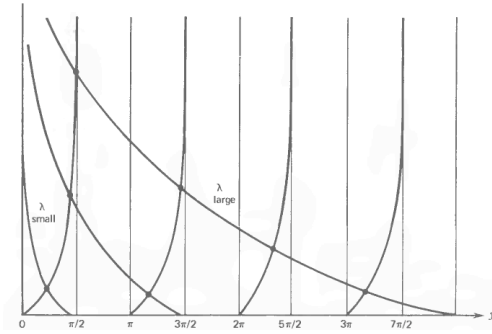


Figura 2: Gráfico de $\tan y$ (curvas ascendentes) y de $\sqrt{\lambda - y^2}/y$ para diferentes valores de λ en el caso PAR.

1.4.1. Solución Par

Definiendo $\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ e $y = qa$ se tiene la ecuación trascendental:

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \tan y$$

la cual puede ser resuelta gráficamente en la cual vemos que para todo λ hay al menos un estado ligado. Para valores de λ altos se tiene que $y \simeq (n + \frac{1}{2})\pi$ con $n = 1, 2, 3, \dots$

1.4.2. Solución Impar

En este caso,

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = -\cot y$$

Y usando que $-\cot y = \tan(\pi/2 + y)$, a partir de la figura anterior podemos darnos cuenta que para grandes valores de λ , $y \simeq n\pi$. A diferencia del caso par, aquí sólo se tendrá intersección si $\sqrt{\lambda - \pi^2/4} > 0$.