Pauta Control 3, Pregunta 1 Física Contemporánea FI34A-01 (2008)

Profesor Claudio Romero, Auxiliares Jocelyn Dunstan y Carolina Milad

PARTE A

Sabemos que $2\,a\,sin(\theta) = n\lambda$, donde la longitud de onda de la partícula incidente es λ, θ es el ángulo de inicidencia, a es la distancia entre los planos cristalinos y n es el número de máximos observados. Suponieando que la incidencia es normal y que observamos dos máximos obtenemos que $\lambda \sim a$.

Por otro lado, usando la relación de De Broglie obtenemos:

$$\begin{aligned} p &= \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}[J \cdot s]}{3.2 \times 10^{-10}[m]} \\ &\sim 2 \times 10^{-24}[Kg\,m/s] \end{aligned}$$

Para calcula la energía usamos la relación cĺasica $E = p^2/2m$ puesto que las energías típicas de estos problemas son del órden de los electron-volts.

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} = \frac{(2 \times 10^{-24})^2}{2 \times 6.28 \times 10^{-27}}[J] \\ &= \frac{4 \times 10^{-48}}{2 \times 6.28 \times 10^{-27}}[J] \\ &\sim 3 \times 10^{-22}[J] \end{aligned}$$

PARTE B

De la regla de cuantización de Bohr tenemos que:

$$m\,v\,r = n\,\hbar$$

de lo cual despejamos que $v = n\hbar/mr$. Por otro lado $\vec{F} = -\nabla V(r)$. Usando que el movimiento es en dos dimensiones (puesto que en el curso de mecánica se demostró que toda fuerza central genera un movimiento planar), se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} \\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = 2m\omega^2 r\,\hat{r} \end{aligned}$$

Igualando esta fuerza a la fuerza centrípeta tenemos:

$$m\frac{v^2}{r} = 2m\omega^2 r$$

por lo cual $v^2 = 2\omega^2 r^2$, pero del modelo de Borh obtuvimos que $v = n\hbar/mr$, igualando ambos términos:

$$2\omega^2 r^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2 r^2} \implies r_n^2 = \frac{n\hbar}{m\omega\sqrt{2}}$$

De modo que lo niveles de energía estaán dados por:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \\ &= \frac{n\hbar\omega}{\sqrt{2}} + \frac{n\hbar\omega}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,n\hbar\omega \end{aligned}$$

PARTE C

Del efecto fotoeléctrico sabemos que:

$$E = h\nu = \phi + E_c$$

donde como dato sabemos que $E_c = 1.6[eV]$. Además $h\nu = hc/\lambda$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} E &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}[J \cdot s] \times 3 \times 10^{8}[m/s]}{3.5 \times 10^{-7}[m]} \\ &\sim 6 \times 10^{-19}[J] \end{aligned}$$

Y usando que $1[eV] = 1.6 \times 10^{-19}[J]$ obtenemos:

$$E = \frac{6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}}[eV] \sim 3.7[eV]$$

Por lo tanto, la función trabajo del potasio metálico es:

$$\phi = 3.7[eV] - 1.6[eV] = 2.1[eV]$$

PARTE D

Usando que la potencia irradiada por unidad de área es $P = \sigma T^4$, podemos calcular la potencia total radiada por el sol como:

$$P_T = \sigma T^4 A_s$$

donde $A_s = 4\pi(7 \times 10^8)^2[m^2]$

Además, si conocemos la distancia tierra sol, sabemos que la radiación que llega a la tierra sobre $1m^2$ de área como:

$$1.3 \times 10^3[Watts] = \frac{P_T}{A_t} = \frac{4\pi(7 \times 10^8)^2 \sigma T^4}{A_t}$$

con $A_t = 4\pi(1.5 \times 10^1 1)^2[m^2]$. Por lo tanto, la temperatura es:

$$\begin{aligned} T^4 &= \frac{1.4 \times 10^3 A_t}{\sigma A_s} \\ &= \frac{1,4 \times 10^3 \times 4\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2}{5.42 \times 10^{-8} \times 4\pi(7 \times 10^8)^2} \\ &= \frac{1.4 \times 10^3 \times 22.5 \times 10^{21}}{5.42 \times 10^{-8} \times 4.9 \times 10^{17}} \\ &\sim 10^{15} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T \sim 1000\sqrt{1000} \sim 5500[K]$.

PARTE E

Usando la relación $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_e^2 c^2$ despejamos:

$$pc = \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4}$$

Sabiendo que $m_e c^2 = 0.5[MeV]$ y que $E = 100[Mev]$ podemos decir que $E \sim pc$. Por otra parte tenemos que $E = \gamma mc^2$ y que $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, por lo que se cumple que $p = vE/c^2$ lo que implica:

$$v_{grupo} = \frac{pc^2}{E} \sim c$$

Es asi como podemos justificar que los electrones se mueven esencialemente con una rapidez c.

Por otra parte, del principio de incertidumbre establece que: $\Delta p\, \Delta x \geqslant \hbar$, y puesto que $\Delta x = 1[mm]$:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\hbar}{m\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}[J \cdot s]}{9 \times 10^{-31}[Kg] \times 10^{-3}[m]} \\ &\sim 0.1[m/s] \end{aligned}$$

Por lo tanto el ancho del paquete de velocidad es de $\Delta v = 0.2[m/s]$. Esto quiere decir que la parte de adelante del paquete viaja a $c + 0.1[m/s]$ y la de atrás a $c - 0.1[m/s]$, este es el origen del ensanchamiento del paquete!

Si se quiere recorrer $10^4[Km]$ se tardará un tiempo de $10^4[Km]/c$, de modo el ancho del paquete de ondas será:

$$\Delta x = \frac{10^4[Km]}{c} 0.1[m/s] = \frac{10^7[m] \times 0.1[m/s]}{3 \times 10^8[m/s]} = 3[mm]$$

`Nota: Esta es solo una de las posibles formas de resolver este problema, la cual podría contener errores. Cada una de las partes tienes asignados cinco puntos.`

`Escrita por Jocelyn Dunstan.`