# Clase Auxiliar 6, Fisica Contemporánea FI34A

Profesor Claudio Romero
Auxiliares Carolina Milad y Jocelyn Dunstan.

24 de Septiembre de 2008

**Resumen**

(1) Usando $c = 1$, de define la 4-posición como $x^\mu = (t, \vec{x})$

(2) La 4-velocidad como $u_\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, con $\tau$ el tiempo propio de la partícula y $t$ el tiempo medido en algún sistema de referencia inercial. Por lo tanto, $u_\mu = (\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}) = (\gamma, \gamma\vec{v})$, donde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$.

(3) El 4-momentum se define anaálogamente como $p^\mu = mu^\mu = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) = (p_t, \vec{p})$.

(4) Si expandimos en serie de potencia $p_t$ obtenemos:

$$p_t = \gamma m = \underbrace{m}_{\text{energía en reposo}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + ...}_{\text{energía cinética}}$$

De modo que se define $E = \gamma m \implies p^\mu = (E, \vec{p})$

(5) Si calculamos $u^2$ usando la convención (1,-1,-1,-1) tenemos que:

$$u^2 = u_t^2 - \vec{u}^2 = \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = 1$$

. Lo mismo podemos hacer con el 4-momentum obteniendo que $p^2 = m^2$. Esto es importante puesto que estas cantidades son INVARIANTES. Además tenemos que:

$$p^2 = m^2 = E^2 - \vec{p}^2 \implies E^2 = m^2 + \vec{p}^2$$

**P.1** Una partícula de masa $m_1$ y velocidad $\vec{v}_1$ choca con una partícula de masa $m_2$ que se encuentra en resposo. En la colisión la partícula 1 es absorbida por la partícula 2. Encuentre la masa y la velocidad de la partícula resultante.

Solución

Por conservación del 4-momento, el momentum y la energía de la partícula resultante es:

$$\begin{aligned} P^\mu &= (m_1\gamma + m_2, m_1\gamma V_1) \\ E &= (m_1+m_2)c^2 \end{aligned}$$

De modo que la masa resultante es:

$$M^2 = (m_1\gamma + m_2)^2 - \gamma^2 m_1^2 V_1^2 \implies M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \gamma}$$

Para calcular la velocidad de salida usamos que $\frac{\vec{p}}{E} = \frac{\gamma m \vec{v}}{\gamma m} = \vec{v}$, por lo tanto,

$$V_R = \frac{\gamma m_1 V_1}{m_2 + \gamma m_1} = \frac{V_1}{1 + \frac{m_2}{\gamma m_1}}$$

Otra forma de hacerlo es conservando el momentum. En efecto, $M\gamma_R V_R = m_1 \gamma V_1$, donde $\gamma_R = 1/\sqrt{1-V_R^2}$. Ademas sabemos que $M\gamma_R = (m_1\gamma + m_2)$, por lo tanto:

$$(m_1\gamma + m_2)V_R = m_1\gamma V_1 \implies V_R = \frac{V_1}{1 + \frac{m_2}{\gamma m_1}}$$

**P.2** Una partícula de A de masa $m$ y energía cinética $T_0$ choca colinealmente con una partícula B, tambien de masa $m$, pero que se encontraba en reposo. Sabiendo que luego del choque la partícula A sale ejectada formando un ángulo $\theta$ con la dirección incidente, calcule la energía cinética que ésta posee.

Solución

Por conservación de cuadrimomentum, $p_A + p_B = p_{A'} + p_{B'}$. Elevando al cuadado (esto siempre es útil!!!):

$$\begin{aligned} (p_A + p_B - p_{A'})^2 &= (p_{B'})^2 \\ p_A^2 + p_B^2 + p_{A'}^2 + 2p_A \cdot p_B - 2p_A \cdot p_{A'} - 2p_{A'} \cdot p_B &= p_{B'}^2 \\ p_A \cdot p_B - p_A \cdot p_{A'} - p_{A'} \cdot p_B &= m^2 \end{aligned}$$

Pero $p_A = (E_A, \vec{p}_A)$ con $E_A = m + T_0$; $P_B = (m, 0)$ y $p_{A'} = (E_{A'}, \vec{p}_{A'})$ con $E_{A'} = m + T_f$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -mE_A + E_A E_{A'} - \vec{p}_A \vec{p}_{A'} + mE_{A'} &= m^2 \\ m(E_{A'} - E_A) + E_A E_{A'} - m^2 &= |\vec{p}_A||\vec{p}_{A'}|cos(\theta) \\ (E_{A'} - m)(E_A + m) &= cos(\theta)\sqrt{E_A^2 - m^2}\sqrt{E_{A'}^2 - m^2} \\ (E_{A'} - m)(E_A + m) &= cos^2(\theta)(E_A - m)(E_{A'} + m) \end{aligned}$$

Pero $E_A = m + T_0$ y $E_{A'} = m + T_f$ por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} T_f(T_0 + 2m) &= T_0(T_f + 2m)cos^2(\theta) \\ \Longrightarrow \quad T_f &= \frac{2mT_0cos^2(\theta)}{2m + T_0sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

**P.3** Calcule la energía umbral de un nucleón $N$ para que pueda suceder la reacción:

$$\gamma + N = N' + \pi$$

Solución

De la conservación del 4-momentum:

$$(P_\gamma + P_N)^2 = (P_{N'} + P_\pi)^2$$

Suponiendo que el choque es frontal, escribiremos estas cantidades en el sistema de referencia del C.M. Aquí imponemos que la energía mínima será aquella para la cual las partículas luego de chocar quedan en reposo, entonces:

$$P_{N'} + P_\pi = (m_\pi + m_N, 0)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_\gamma^2 + P_N^2 + 2P_\gamma P_N &= -(m_\pi + m_N)^2 \\ 0 - m_N^2 + 2P_\gamma P_N &= -m_\pi^2 - m_N^2 - 2m_\pi m_N \end{aligned}$$

Pero $P_\gamma = (E_\gamma, \vec{P}_\gamma)$ y $P_N = (E_N, \vec{P}_N)$,

$$-2E_\gamma E_N + 2\vec{P}_\gamma \cdot \vec{P}_N = -m_\pi^2 - 2m_\pi m_N$$

Además de $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ por lo que se tiene que $E_\gamma = |\vec{P}_\gamma|$ y $|\vec{P}_N| = \sqrt{E_N^2 - m_n^2}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} -2E_\gamma E_N - 2|\vec{P}_\gamma||\vec{P}_N| &= -m_\pi^2 - 2m_\pi m_N \\ -2E_\gamma E_N - 2E_\gamma\sqrt{E_N^2 - m_n^2} &= -m_\pi^2 - 2m_\pi m_N \\ \Longrightarrow \quad E_N + \sqrt{E_N^2 - m_n^2} &= \frac{m_\pi^2 + 2m_\pi m_N}{2E_\gamma} \end{aligned}$$

Note que esta energía unbral está calculada en el sistema del C.M. Para encontrar la energía en el sistema de laboratorio usamos que: $E' = \gamma(E - Vp_x)$ donde $S'$ es un sustema que se mueve con velocidad $V\hat{x}$ con respecto a $S$.