FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Física

Profesor: Nelson Zamorano
Profesor Auxiliar: Ariel Órdenes

INDICACIONES:

Fecha de Entrega: Lunes 17 de Nov., hasta las 10 horas.

El objetivo de esta tarea es estudiar aplicaciones de la ecuación de Schrödinger al átomo de hidrógeno y sistemas con dos niveles de energía.

En la foto aparece Wolfgang Ernst Pauli.

PROBLEMA # 1

El modelo del átomo con dos niveles es similar al problema de una partícula con spin 1/2 en un campo magnético. En este problema recuperaremos las propiedades que caracterizan a un sistema con $s = 1/2$. Considere que los estados $|1>$ y $|2>$ de un sistema, que podemos pensar como una caja negra, corresponden a las energías $[E_o - \hbar/(2\pi)\,\omega]$ y $[E_o + \hbar/(2\pi)\,\omega]$. Definimos

$$|1>= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |2>= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a.- Encuentre la representación matricial del operador de subida $\hat{b}^\dagger$, y de bajada $\hat{b}$, para este modelo de dos niveles de energía. Físicamente estos operadores representan una subida del sistema a un estado de energía superior (o el inverso, si el operador es de bajada). Las ecuaciones que determinan la representación de estos operadores es: $\hat{b}^\dagger\,|2>= 0$, $\hat{b}^\dagger\,|1>= |2>$ y $\hat{b}\,|2>= |1>$, $\hat{b}\,|1>= 0$

Muestre que estos operadores NO son hermíticos.

b.- ¿Cuánto vale $\hat{b}^2$?, ¿y $(\hat{b}^\dagger)^2$?. ¿Qué valor toman los anticomutadores y conmutadores de los siguientes pares de operadores:$\{\,\hat{b},\,\hat{b}\,\}$, $\{\,\hat{b}^\dagger,\,\hat{b}^\dagger\,\}$ y $\{\,\hat{b},\,\hat{b}^\dagger\,\}$. La definición de $\{A, B\} = AB + BA$. Estas relaciones de conmutación son características del álgebra de fermiones.

c.- Es conveniente trabajar con operadores hermíticos: $A = A^\dagger$ o $A_{i\,j} = A^*_{j\,i}$ donde $* \equiv$ a complejo conjugado. La razón es que sus autovalores son números reales y las cantidades medidas (autovalores de los operadores correspondientes):energía, momentum,...etc. son también reales. Construya los operadores indicados más abajo. Demuestre que son hermíticos y que al sumar al conjunto un operador extra, la identidad, éstos forman un conjunto completo de operadores linealmente independientes. Los tres primeros se denominan los operadores de spin de Pauli. $\hat{R}_1 = (\hat{b}+\hat{b}^\dagger)/2$, $\hat{R}_2 = (\hat{b}^\dagger - \hat{b})/(2i)$ y $\hat{R}_3 = (\hat{b}^\dagger\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{b}^\dagger)/2$.

d.- Demuestre que estos operadores de Pauli cumplen el álgebra siguiente (denominada álgebra de Lie):

$$\left[\hat{R}_l, \hat{R}_m\right] = i\,\epsilon_{l\,m\,n}\,\hat{R}_n, \;\text{ y }\; \left\{\hat{R}_l, \hat{R}_m\right\} = 1/2\,\delta_{m\,n}$$

Además:

$$\hat{R}^2_\alpha = 1/4, \;\text{ para }\; \alpha = 0, 1, 2, 3, \;\text{ y que }\; \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3} \hat{R}^2_\alpha = 1.$$

PROBLEMA # 2

En las estrellas denominadas enanas blancas, la presión del gas degenerado de electrones evita su implosión gravitacional. Para simplificar el problema, modelamos la estrella como una esfera de densidad constante. Lo que se pide estimar es el valor del radio R que alacanza esta esfera al minimizar su energía total.

a.- Escriba la energía total del gas de electrones en función del radio, el número de protones (o nucleones) N, el número de electrones por nucleón Z y la masa del electrón m_e.

b.- Estime la energía gravitacional de esta esfera homogénea. Exprese su respuesta en función de la constante gravitacional G, el radio R, N y masa del nucleón m_n. (Note que la energía potencial gravitacional es negativa.)

c.- Encuentre el radio R para el cual la energía total $E_{Total} = E_{gas deg.} + E_{gravitacional}$, alcanza un mínimo.

d.- Determine el radio en R en km, si la masa dela estrella es la del Sol: $M = M_{\odot}$.

e.- Determine la energía de Fermi, en electronvolts para esta estrella. Compare esta energía con la energía en reposo del electrón.

PROBLEMA # 3

Se denomina efecto Zeeman a los cambios observables que se producen debido a la interacción entre un campo magnético externo y el electrón orbitando un átomo. El resultado es un desdoblamiento de la energía asociada a un estado.

La física clásica puede modelar este efecto. Para ello se requiere considerar el átomo como una esfera elástica homogénea. El electrón se mueve -en ausencia del campo magnético-, como si estuviera ligado al núcleo del átomo mediante tres resortes idénticos. El movimiento básico del electrón es el de una partícula que se mueve bajo la acción de un resorte homogéneo tridimensional. A esta interacción le sumamos el efecto de un campo de inducción magnética $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección del eje $\hat{z}$.

La ecuación de movimiento es:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -m_e\, \omega_0^2\, \vec{r} - e\, \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Resuélvala y demuestre que aparecen tres niveles de energía : ω_0 y $\omega_0 \pm \Omega_L$ donde $\Omega_L \equiv$ frecuencia de Larmor.