Profesor: Nelson Zamorano
Profesor Auxiliar: Ariel Órdenes

INDICACIONES:

Fecha de Entrega: Lunes 03 de Nov., hasta las 10 horas.

El objetivo de esta tarea es resolver la ecuación de Schrödinger y revisar las propiedades del oscilador armónico cuántico.

Si tiene alguna incertidumbre acerca de quien está representado en la foto que se acompaña, es el joven Heisenberg.

PROBLEMA # 1

a.- Muchas de las partículas conocidas decaen en el tiempo. Por ejemplo, la partícula Z que es un pariente masivo del fotón en la teoría electrodébil, tiene una vida media de 10^{-27} s.

Al describir un fenómeno de este tipo, la amplitud de probabilidad NO puede ser constante. Debe disminuir en el tiempo:

$$\text{Probabilidad} \equiv P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = e^{-t/\tau}.$$

Para obtener este resultado podemos recurrir a un potencial fenomenológico: $V(x) = V_o(x) + i\Gamma$, sin intentar dar una interpretación física.

Repita el procedimiento utilizado para obtener la ecuación de continuidad de la probabilidad y muestre que en este caso se obtiene:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar} P,$$

A partir de esta ecuación y suponiendo conocido (en forma experimental) la vida media de la partícula τ, encuentre el valor de Γ.

b.- Pruebe que para normalizar una amplitud de probabilidad $\psi(x)$ en el rango$(-\infty, +\infty)$ de la variable x debe cumplirse que $E > V_{\text{mín}}$. De otra forma la amplitud de probabilidad $\psi(x)$ y su segunda derivada tendrán siempre el mismo signo. Funciones con esta característica no pueden ser normalizadas en este rango infinito.

Note que sí lo pueden ser en un intervalo finito. Este es el efecto túnel.

PROBLEMA # 2

El hamiltoniano de un oscilador armónico es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$

donde $\hat{x}$ y $\hat{p}$ son operadores, en los cuales imponemos la propiedad $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Esta condición genera el principio de incertidumbre en la posición y el momentum: $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

Defina los operadores

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}.$$

a.- Encuentre el valor del conmutador $[a,\ a^\dagger]$.

b.- Demuestre que $H = \hbar\,\omega\left(\hat{a}^\dagger\,\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$.

c.- Encuentre una expresión para los conmutadores $[\hat{H},\ \hat{a}]$ y $[\hat{H},\ \hat{a}^\dagger]$

d.- Si $|E>$ es un ket, autovector de $\hat{H}$, cuyo autovalor lo denominamos E, encuentre los autovalores asociados a los operadores $(\hat{H}\,\hat{a})$ y $\hat{H}\,\hat{a}^\dagger$ actuando en la misma base $|E>$.

PROBLEMA # 3

e.- Demuestre que los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ se pueden escribir como

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \qquad \hat{p}_x = i\sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}}\,\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right), \quad \text{con} \quad [\hat{a},\ \hat{a}^\dagger] = 1.$$

f.- Demuestre que los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ actuando sobre los autovectores del hamiltoniano, $\hat{H}\,|\psi_n> = E_n\,|\psi_n>$, corresponden a operadores de subida y bajada en el nivel de energía de los autovectores:

$$\hat{a}\,|\psi_n> = B_n\,|\psi_{n-1}> \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger\,|\psi_n> = C_n\,|\psi_{n+1}>.$$

g.- Encuentre los valores de las constantes B_n y C_{n+1}

h.- Usando el resultado anterior (identifique $|\psi_n> \equiv |n>$), calcule $<n|\hat{x}^2|n+2>$ y $<n|(\hat{p}_x)^2|n+2>$

i.- Calcule $<n|\hat{H}|n+2>$. Comente.