Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: Nelson Zamorano
Profesor Auxiliar: Ariel Órdenes

**IINDICACIONES:**

Fecha de Entrega: Lunes 08 de Sept., ANTES de las 10 horas en la Of. de la Sra. Carmen Belmar o en mi casillero. No se aceptarán Tareas en la hora de clase. Si no entrega la tarea a tiempo, tiene un punto menos.

El objetivo de esta tarea es lograr cierta familiaridad con el uso de índices al nivel de relatividad especial. Se incluye un problema de cinemática en dos dimensiones.

**PROBLEMA # 1**

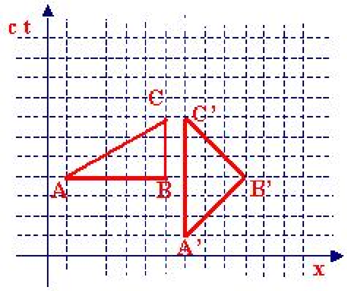
a.- Convierta las siguientes cantidades a unidades en las cuales hemos tomado $c = 1$. Para este caso las unidades sólo deben mostrar $[kg]$ y $[m]$. (Nota, debe usar el hecho que $1\,s = 3 \times 10^8$ m.)
i.- 100 Watts, ii.- la presión atmosférica $10^5\,[N\,m^2]$ iii.- El momentum de un automóvil: $3 \times 10^4\,[kg\,m\,s^{-1}]$, iv.- La constante de Planck $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J s.

b.- Dados los puntos **A**, **B**, **C**, **A**$'$, **B**$'$, **C**$'$, se pregunta lo siguiente:
i.- ¿Cuál de los lados del triángulo **A B C** es el más largo? ¿Cuál es el más corto? ¿Cuál es el largo de las unidades de la grilla (supuesta uniforme)?
ii.- ¿Cuál es la distancia más corta entre los puntos **A** y **C**: la línea recta que une ambos puntos o el camino a lo largo de los vértices **A** $\rightharpoonup$ **B** $\upharpoonleft$ **C**?
iii.- Repita i.- para el otro triángulo (con primas).
iv.- Repita ii.- para el otro triángulo.

c.- El lugar geométrico de los puntos equidistantes del origen en un espacio euclídeo son círculos. Analice el lugar geométrico en un espacio no-euclídeo: $\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 =$ constante. Analice gráficamente las distintas posibilidades $\Delta s^2 > 0$, $\Delta s^2 < 0$ y $\Delta s^2 = 0$. Considere un 4-vector tipo luz. Este vector define un $\Delta s^2 =$ Constante. ¿Qué curva describe el extremo de este vector cuando se le aplica una transformación de Lorentz arbitrari? (Dibuje cualitativamente este lugar geométrico.)

**PROBLEMA # 2**

a.- La transformación de Lorentz que lleva de un sistema $S$ a otro $S'$ que se mueve con velocidad $v$ en la dirección $x$, se puede representa mediante una matriz de $4 \times 4$ definida como $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$. A partir de este resultado se pide que calcule: i.- $\Lambda_{\alpha\,\beta}$, ii.- $\Lambda_{\alpha}{}^{\beta}$, iii.- $\Lambda^{\alpha\,\beta}$. Indique si la matriz es simétrica, antisimétrica o simplemente esta propiedad no está definida.
b.- Demuestre que a partir del invariante $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ se cumple que $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\eta_{\mu\,\nu}\,\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\,\beta}$. Muestra que este resultado implica que $\det(\Lambda) = \pm 1$. Muestre que a partir de esta propiedad, cualquier escalar formado por un vector contravariante (con los índices arriba) y uno covariante (índces abajo) es un invariante: tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia. Ejemplo: $p^{\mu}\,p_{\mu} = (m_o\,c)^2$




c.- El tensor totalmente antisimétrico $\epsilon^{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}$ se evalúa como sigue. Si dos de sus índices son iguales, su valor es $0$. Si sus índices están ordenados como $\{0\,1\,2\,3\}$ o cualquier otra permutación par de ellos, toma un valor igual a $+1$. Si es una permutación impar del orden correlativo, su valor es $-1$. Encuentre el valor de este tensor en el sistema $S'$, que se mueve con respeto a $S$ con una velocidad $v$ en la dirección de $+x$.

**PROBLEMA # 3**

Suponga que Ud. está solitario en una nave en el espacio infinito. Sólo existe una estrella que puede usar de referencia. Tiene en su poder un set de tres giróscopos que le permiten comparar direcciones. La nave se impulsa mediante unos motores iónicos con los que Ud. puede transmitir a la nave un momentum en diferentes direcciones.

Usando la estrella como referencia, por ejemplo, si Ud. se da una velocidad ($-V_o$ ) en el eje x, (un "boost" en la dirección $-x$ con velocidad $V_o$), la estrella parecerá moverse en la dirección $+x$, con una velocidad $V_o$.

a.- Inicialmente la nave está en reposo. Usando las transformaciones de Lorentz dadas, aplique un momentum inicial (un boost) en la dirección $-x$ con velocidad $V_1$. Demuestre que Ud. puede encontrar el vector velocidad usando la razón entre la componente espacial del momentum y la energía (componente temporal del momentum). El momentum inicial, al cual se aplican las transformaciones de Lorentz es: $p^\mu = (mc, 0, 0, 0)$. (Puede escribirlo como vector columna.)

b.- Usando las transformaciones de Lorentz dadas, aplique un momentum inicial (un boost) en la dirección $-x$ con velocidad $V_1$ y en seguida otro consecutivo en la misma dirección con velocidad $V_2$. Utilizando el método descrito en la parte a.- encuentre la ley de suma de las velocidades.

c.- Inicialmente la nave está en reposo. Usando las transformaciones de Lorentz dadas, aplique un momentum inicial (un boost) en la dirección $+x$ y posteriormente un impulso igual en la dirección $+y$, ambas con la misma velocidad $V_o$. El momentum inicial, al cual se aplica la primera transformación de Lorentz es: $p^\mu = (mc, 0, 0, 0)$. Demuestre que el momentum final NO apunta en la dirección esperada: $45^o$ con la dirección inicial. (Puesto de otra forma, la estrella NO se mueve en la dirección esperada).

d.- Encuentre un valor para la velocidad del impulso ("boost") en la dirección $y$, $V_1$ ($\neq V_o$) tal que la estrella se mueva en la dirección ($45^o$).

e.- Demuestre que el invariante asociado al momentum final obtenido en las secciones c.- y d.- es el correcto.

f.- Considere una partícula girando en torno a un punto central. Modelaremos este movimiento como una sucesión de 4 transformaciones de lorentz como se indican a continuación.

Encuentre cuál es la expresión del momentum final despúes de experimentar una serie de cuatro transformaciones de Lorentz sucesivas: $V_0$ en el eje x, $V_1$ en el eje y, $V_1$ apuntando en la dirección del eje $-x$, y $V_0$ en el eje $-y$, actuando sobre el vector momentum inicial $p^\mu = (mc, 0, 0, 0)$.

Referencia: *The Thomas Rotation*, J. P. Costella, B. H. J. McKellar and A. Rawlison. Am. J. Phys. **69** (8),2001.