Funcion de Green

Tibor Heumann

15 de noviembre de 2008

1. Funcion de Green

La funcion de Green es para resolver ecuaciones parciales inhomogeneas. A diferencia de la funcion de Green para cuerdas para sonido la ecuacion es en 3 dimensiones por lo que la funcion de Green cambia. En este caso la ecuacion que queremos resolver es:

$$\nabla^2\Phi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(r,t)}{\partial t^2} = -f(r,t) \tag{1}$$

1.1. El origen del termino inhomogeneo

Primero hay que ver de donde sale el termino inhomogeneo de la ecuacion, $f(r,t)$. Para deducir la ecuacion de onda necesitamos 4 ecuaciones, ademas de recordar que se esta resolviendo para perturbaciones pequeñas. Vamos a asumir que:

$$p = p_0 + p' \qquad \rho = \rho_0 + \rho' \qquad v = v'$$

Donde las primas implican que son perturbaciones y por lo tanto muy pequeñas. Las ecuaciones que hay que usar son (todo lo que no tiene subindice 0 es porque deberia llevar una prima):

$$v = -\nabla\Phi \tag{2}$$

$$p = c^2\rho \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot v = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p \tag{5}$$

Estas ecuaciones viene de:
(2)Suponer que el fluido is irrotacional
(3)Ecuacion de estado
(4)Conservacion de masa. En realidad esta es una ecuacion linealizada, si el fluido se moviera con velocidad u constante, habria que agregar un termino $\frac{1}{\rho_0}u\cdot\nabla\rho$. Escriban la ecuacion de continuidad a primer orden para verificar (primer orden significa que dos terminos con prima multiplicandose se desprecian).
(5)Equilibrio de fuerzas. En este caso se agrega un termino $u\cdot\nabla v$ al lado izquierda.
.

Por lo tanto si agregamos una fuerza externa al fluido se agrega a la ecuacion (5) de la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{1}{\rho_0}f_{ext} \tag{6}$$

donde la f_{ext} es fuerza por unidad de volumen. Sin mucha de perdida de generalidad podemos suponer que la fuerza se puede escribir como el gradiente de un potencial.

$$f_{ext} = -\nabla\psi$$

Asi rededuciendo la ecuacion de onda con la ecuacion (6) en vez de la (5).

ec (2) en (5)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}p + \frac{1}{\rho_0}\psi$$

derivando esta ecuacion con respecto al tiempo

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ec (3) en (4)

$$\frac{1}{c^2\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot v = \frac{1}{c^2\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^2\Phi = 0$$

reemplazando esta ecuacion en la que encontramos anteriormente:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(x,t) = c^2\nabla^2\Phi(x,t) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)$$

De aca se ve que al imponer una fuerza externa en el sistema aparece una ecuacion inhomogenea como la que planteamos al principio (llegamos a que $-f(r,t) = \frac{1}{c^2\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)$). Me imagino que hay mas formas de hacer aparecer un termino de ese estilo, como una fuente externa de fluido, habria que agregar un termino a la conservacion de masa.

La ecuacion de onda para cuando hay una velocidad constante u es:

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}(\frac{\partial}{\partial t} + u\cdot\nabla)^2)\Phi(x,t) = 0$$

Hay muchos problemas en el Fetter que incluyen esta ecuacion, asi que peguenle una ojeada. La deduccion es igual solo que hay que agregar los terminos que faltan en la ecuacion (4) y (5).

1.2. Para que sirve la ecuacion de Green

$$\nabla^2 G(r,r',t,t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(r,r',t,t')}{\partial t^2} = -\delta(r-r')\delta(t-t') \tag{7}$$

Supongamos que conocemos G(x,x',t,t'). Entonces la solucion a la ecuacion (1) es:

$$\Phi(r,t) = \int G(r,r',t,t')f(r',t'),dt'dr'$$

La demostracion es simple, basta aplicar el operador $\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ a ambos lados de la ecuacion, y recordar que el operador actua sobre las variables sin primas. Asi queda:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \int(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})G(r,r',t,t')f(r',t'),dt'dr'$$

Como el operador actua solo sobre las variables sin prima actua sobre G(r,r',t,t') y no sobre f(r',t'). Recordando la ecuacion (7) queda:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \int -\delta(r-r')\delta(t-t')f(x',t'),dt'dr' = -f(r,t)$$

Por lo que si conocemos G(x,x',t,t') conocemos la solucion para cualquier ecuacion inhomogenea, basta integrar.

1.3. Funcion de Green para un medio Infinito

No pude encontrar problemas razonables, tipo control, por lo que les voy a poner un resumen de lo que deberian saber.

La ecuacion de Green para un medio infinito es:

$$\tilde{\tilde{G}}(p,\omega) = \frac{1}{p^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\tilde{G}(r,\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega r}{c}}}{4\pi r}$$

$$G(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\tilde{G}(r,\omega)d\omega$$

Donde las tilde significa que son transformadas de fourier y se tomo la ecuacion con r'=0 y t'=0. Esto se obtiene simplemente de obtener la transformada de fourier temporal y espacial de la ecuacion (7) para luego aplicar la transformada inversa. En la practica hay que hacer unas integrales por polos. Un dato importate es que $\tilde{G}(r,\omega)$ esta acotada para ω cuya parte imaginaria sea positiva.

1.4. Funcion de Green con Condiciones de Borde

La funcion de Green con condiciones de borde es resolver la ecuacion (7) sujeto a condiciones de borde. En general esto no se puede resolver para ecuaciones de borde arbitrarias, y en general solo tiene solucion para una condicion de borde en el plano z=0 (obviamente se puede tomar cualquier otro plano que les parezca).

.

Para entender el metodo creo que es mejor primero dar un ejemplo de como se usa en electromagnetismo (probablemente algunos ya vieron el metodo en electro). El problema en electromagnetismo consiste en escribir el potencial que se forma al poner una carga puntual frente a un plano conductor infinito (por simplicidad el plano es en z=0 y la carga esta en z=a). Ustedes saben que un conductor es un espacio equi-potencial, ademas dos cargas puntuales de carga opuesta forman un plano equi-potencial en la mitad de la linea que las separa. Por lo tanto para resolver este problema, uno puede olvidarse que existe un plano conductor y puede agregar una segunda carga, con signo opuesto a la primera, en el punto opuesto, es decir para este caso z=-a. Pueden ver que es mas facil resolver el potencial de dos cargas puntuales (el campo se suma asi que es lo mismo que resolver para una carga puntual) que una carga puntual y un plano conductor infinito.

.

En este caso el metodo es practicamente lo mismo. Se busca la solucion para una fuente puntual en algun punto del espacio con coordenada z=a y hay una condicion de borde en z=0. En este caso queremos resolver la ecuacion, pero solo nos interesa la solucion en $z \geq 0$ (al igual como no interesaba la solucion detras del plano conductor), por lo que se agrega una segunda fuente que permite encontrar de forma facil la solucion para $z \geq 0$.

.

Finalmente el problema que hay que encontrar la solucion a la ecuacion:

$$(\nabla^2 + k^2)\tilde{G}(r,r') = -\delta(r - r') \qquad\qquad r' = (x', y', z')$$

con condicion de borde derivativa (es decir una pared) en z=0

$$\nabla\tilde{G}\cdot\hat{n}|_{z=0} = 0$$

Ahora cambiamos este problema por el problema:

$$(\nabla^2 + k^2)\tilde{G}(r,r') = -\delta(r-r') - \delta(r-\bar{r}') \qquad r' = (x',y',z') \qquad \bar{r}' = (x',r',-z')$$

Sin condicion de borde. La ecuacion diferencial nueva es igual a la anterior en $z \geq 0$ ya que $\delta(r-\bar{r}')$ es 0 en $z \geq 0$, ademas $\bar{r}' = r'$ en z=0. Ademas la solucion a este problema es la suma de dos soluciones para un medio infinito. Por lo que la solucion queda

$$\tilde{G}(r,r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} + \frac{e^{ik|r-\bar{r}'|}}{4\pi|r-\bar{r}'|}$$

Por lo que encontramos funcion que satisface la ecuacion diferencial en $z \geq 0$, solo basta ver que cumple la condicion de borde.

$$\nabla\tilde{G}\cdot\hat{n}|_{z=0} = \frac{\partial\tilde{G}}{\partial z}|_{z=0} = 0$$

Tomando $F(|r-r'|) = \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial z} = F'(|r-r'|)\frac{z-z'}{|r-r'|} + F'(|r-\bar{r}'|)\frac{z-z'}{|r-\bar{r}'|} \Rightarrow \frac{\partial\tilde{G}}{\partial z}|_{z=0} = 0$$

Para el caso en que se quiera solucionar la ecuacion anterior con condicion de borde del tipo $\Phi|_{z=0} = 0$ la solucion es:

$$\tilde{G}(r,r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} - \frac{e^{ik|r-\bar{r}'|}}{4\pi|r-\bar{r}'|}$$

Como $\bar{r}' = r'$ en z=0 trivialmente cumple la condicion de borde, y ademas cumple con la ecuacion diferencia en el z≥0.