

Mecánica del Continuo y Ondas

Tarea 4

Prof: René Rojas C.
29 de Agosto de 2008

Problema 13 : Operador de Sturm-Liouville

Considere el operador diferencial de segundo orden $L \equiv -a(x)(d^2/dx^2) - b(x)(d/dx) + c(x)$, con a y b positivos. Muestre que L puede ser escrito como

$$L = -\frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \left[\tau(x) \frac{d}{dx} \right] + c(x)$$

donde $\tau(x) = \exp[\int^x b(y)/a(y)dy]$ y $\sigma(x) = \tau(x)/a(x)$. Explique por qué las funciones propias de la ecuación $L\rho = \omega^2\rho$ serán ortogonales con respecto a la función de peso $\sigma(x)$.

Problema 14 : Método de Rayleigh-Ritz

Una cuerda uniforme con extremos fijos de longitud l , densidad σ y tensión τ , tiene una masa puntual m adherida en el punto central. Usando el método de Rayleigh-Ritz, dese una familia de funciones indexadas por un parámetro para estimar la frecuencia mínima y analice, comparando con los resultados exactos, los siguientes casos:

a)

$$\frac{m}{M} \rightarrow 0.$$

b)

$$\frac{m}{M} \rightarrow \infty.$$

c)

$$\frac{m}{M} = 1.$$

Problema 15 : Funciones de Green

Considere una cuerda uniforme con densidad de masa σ y tensión τ constantes y con extremos fijos. Obtenga la función de Green para este problema usando los dos métodos vistos en clases:

- a) Construir la función de Green como una expansión en términos de las funciones propias.
- b) Construir la función de Green usando las soluciones de la ecuación homogénea.

Problema 16 : Soluciones de sine-Gordon

Muestre explícitamente que las tres funciones

- a) solitón-solitón:

$$\psi_{ss}(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{u \sinh \gamma x}{\cosh u \gamma t} \right],$$

- b) solitón-antisolitón:

$$\psi_{sa}(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{\sinh u \gamma t}{u \cosh \gamma x} \right],$$

- c) breather:

$$\psi_b(x, t) = 4 \arctan \left[(u\gamma)^{-1} \frac{\sin ut}{\cosh \gamma^{-1} x} \right],$$

donde u es la velocidad de propagación y $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$, satisfacen la ecuación de sine-Gordon y grafíquelas.