# Mecánica del Continuo y Ondas

## Tarea 2

Prof: René Rojas C.
8 de Agosto de 2008

**Problema 5 : Cuerda con masa puntual**

Una cuerda uniforme con extremos fijos de longitud $l$, densidad $\sigma$ y tensión $\tau$, tiene una masa puntual $m$ aderida en el punto central.

**a)** Asumiendo pequeños desplazamientos transversales, encuentre las ecuaciones de movimiento para las dos mitades de la cuerda y para la masa $m$.
**b)** Demuestre que los modos en que $m$ se mueve tienen frecuencias que satisfacen la ecuación

$$\frac{2c}{\omega l}\cot\frac{\omega l}{2c} = \frac{m}{\sigma l}$$

donde $c^2 = \tau/\sigma$. Encuentre gráficamente las soluciones de esta ecuación y discuta los casos $m \to 0$ y $m \to \infty$.
**c)** Pruebe que las funciones propias satisfacen la relación de ortonormalidad

$$\int_0^l \rho_p(x)\rho_q(x)m(x)dx = \delta_{pq}$$

donde $m(x) = \sigma + m\delta(x - l/2$ es la densidad de masa.

**Problema 6 : Condiciones Iniciales**

Una cuerda uniforme con tensión $\tau$ y extremos fijos, es tirada desde el centro dando el desplazamiento inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} & 0 \le x \le l/2 \\ \frac{2h(l-x)}{l} & l/2 \le x \le l \end{cases}$$

y se suelta desde el reposo.

**a)**Determine las amplitudes de Fourier y la energía de cada modo.
**b)** Construya las soluciones de Bernoulli y D'Alembert de la ecuación de onda y muestre que ellas coinciden.
**c)** Discuta la convergencia uniforme de la serie de Fourier para $u(x,t)$.

**Problema 7 : Ecuaciones de Euler-Lagrange en 4D**

Sea $x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ en donde $x^0$ representa al tiempo y las otras tres variables al espacio. Luego la densidad Lagrangiana toma la forma $\mathcal{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), x)$, donde $\psi$ representa el conjunto de las $N$ funciones $\psi_l$ y $\nabla\psi$ representa la colección de sus $4N$ derivadas $\partial_\alpha \psi_l$. Luego la acción es

$$S = \int \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, x) d^4x.$$

Demuestre que las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} = 0.$$

**Problema 8 : Ecuaciones de Maxwell**

Considere la métrica de Minkowski $g_{\mu\nu}$ cuyas componentes son cero si $\mu \neq \nu$ y $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ y $g^{\mu\nu}$ es su inverso. Estas métricas son usadas para subir y bajar indices: $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$, $f_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} f^{\rho\sigma}$ (Obs: se usa la convención de suma de Einstein). Los campos eléctrico y magnético se identifican con el tensor antisimétrico $f_{\mu\nu}$

$$(f_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

De electrodinámica se demuestra que existe un vector $A^\mu$ llamado cuadrivector potencial tal que el tensor $f_{\mu\nu}$ se escribe

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Demuestre que, bajo esta relación, el tensor $f_{\mu\nu}$ cumple con las ecuaciones

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0,$$

y muestre que estas ecuaciones corresponden a algunas de las ecuaciones de Maxwell.

Usando el resultado del problema 7, muestre que el resto de las ecuaciones de Maxwell corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(A, \nabla A) = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu,$$

donde $j^\mu = (\rho, \vec{j})$, $\rho$ es la densidad de carga y $\vec{j}$ es la densidad de corriente.