

# SISTEMAS DINÁMICOS

Luis Rodríguez Valencia<sup>1</sup>  
Departamento de Física  
Universidad de Chile

5 de diciembre de 2005

<sup>1</sup>email: lhrodrig@lauca.usach.cl



# Contenidos

<b>1. Sistema de Partículas</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	1
1.1.1. Sistema Inercial de referencia . . . . .	2
1.1.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	3
1.1.3. Torque en punto arbitrario . . . . .	6
1.1.4. Teorema Energía Trabajo . . . . .	6
1.1.5. Sistema de dos partículas . . . . .	7
1.2. Campo Central de Fuerza . . . . .	9
1.2.1. Ecuación diferencial para la órbita . . . . .	10
1.2.2. Expresión integral para la trayectoria . . . . .	13
1.3. Sistemas de masa variable . . . . .	13
1.4. Ejercicios . . . . .	17
1.4.1. Campo central . . . . .	19
1.4.2. Sistemas de masa variable . . . . .	25
1.4. Los problemas resueltos . . . . .	26
1.4.1. Sistema de partículas . . . . .	26
1.4.2. Movimiento en un campo central de Fuerza . . . . .	37
1.4.3. Sistemas de masa variable . . . . .	68
<b>2. Rotaciones</b>	<b>77</b>
2.1. Rotaciones de un sistema . . . . .	77
2.1.1. Rotaciones de un sistema de coordenadas . . . . .	77
2.1.2. Ángulos de Euler . . . . .	84
2.2. Velocidad angular . . . . .	85
2.2.1. Descomposición del movimiento . . . . .	85
2.2.2. Teorema de adición de velocidades angulares . . . . .	86
2.3. Problemas . . . . .	87

2.3. Los problemas resueltos . . . . .	88
<b>3. Sistema rígido de partículas</b>	<b>95</b>
3.1. Cantidades cinemáticas . . . . .	95
3.1.1. Energía cinética y momentum angular . . . . .	97
3.1.2. Algunas propiedades de la matriz de inerci . . . . .	97
3.1.3. Teoremas . . . . .	98
3.1.4. El elipsoide de inercia . . . . .	98
3.2. Ecuaciones dinámicas . . . . .	102
3.2.1. Movimiento Plano . . . . .	102
3.2.2. Un ejemplo en más dimensiones, la bola de billar . . . . .	109
3.3. Movimiento en tres dimensiones . . . . .	111
3.3.1. Ecuaciones de Euler . . . . .	111
3.3.2. Torque nulo . . . . .	111
3.3.3. Cuerpo simétrico . . . . .	113
3.3.4. Trompo . . . . .	118
3.4. Ejemplos . . . . .	125
3.5. Movimiento con loops . . . . .	136
3.5.1. Resumen . . . . .	136
3.6. Ejercicios . . . . .	137
3.6. Los problemas resueltos . . . . .	140
<b>4. Ecuaciones de Lagrange</b>	<b>161</b>
4.1. Introducción . . . . .	161
4.2. Restricciones o vínculos . . . . .	162
4.2.1. Vínculos holonómicos y coordenadas generalizadas . . . . .	162
4.2.2. Fuerzas de vínculos . . . . .	162
4.2.3. Desplazamientos virtuales . . . . .	163
4.3. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	164
4.3.1. Vínculos no holonómicos . . . . .	165
4.3.2. Condición de integrabilidad . . . . .	167
4.4. Sistemas Conservativos . . . . .	167
4.4.1. Momentos canónicos . . . . .	167
4.4.2. El hamiltoniano del sistema . . . . .	168
4.4.3. Teoremas de conservación. . . . .	170
4.4.4. Hamiltoniano y energía . . . . .	171
4.4.5. Fuerzas dependientes de la velocidad . . . . .	172
4.4.6. Teorema de Noether . . . . .	174

---

4.5.	Ejemplos y aplicaciones . . . . .	176
4.5.1.	Trompo simétrico. . . . .	176
4.5.2.	Bola que rueda sobre un plano, sometida en su centro a una fuerza . . . . .	180
4.6.	Ejercicios . . . . .	186
4.6.	Los problemas resueltos . . . . .	191
<b>5.</b>	<b>Oscilaciones pequeñas.</b>	<b>211</b>
5.1.	La energía cinética. . . . .	211
5.2.	La energía potencial. . . . .	212
5.2.1.	Posición de equilibrio. . . . .	212
5.2.2.	Estabilidad. . . . .	212
5.3.	Linealización. . . . .	213
5.4.	El lagrangiano aproximado. . . . .	213
5.5.	Solución de las ecuaciones de movimiento. . . . .	214
5.5.1.	Diagonalización. . . . .	216
5.5.2.	Solución del sistema. . . . .	217
5.6.	Ejemplos. . . . .	220
<b>6.</b>	<b>Sistemas continuos</b>	<b>227</b>
6.1.	Introducción . . . . .	227
6.2.	Oscilaciones longitudinales . . . . .	227
6.2.1.	Extremos fijos (a) . . . . .	228
6.2.2.	Alternativa . . . . .	231
6.2.3.	Condiciones periódicas (b) . . . . .	232
6.2.4.	Solución alternativa . . . . .	233
6.3.	Oscilaciones transversales . . . . .	234
6.4.	Limite continuo . . . . .	236
6.5.	Soluciones de la ecuación de onda . . . . .	236
6.5.1.	Condiciones de frontera . . . . .	238
6.5.2.	Condiciones iniciales . . . . .	239
6.6.	Método de las series de Fourier . . . . .	241
6.7.	Consideraciones adicionales . . . . .	242
6.7.1.	Condiciones iniciales. . . . .	243
6.8.	Caso general . . . . .	246
6.9.	Ejemplos . . . . .	248
6.10.	Consideraciones energéticas . . . . .	250

---

6.10.1. Potencia en ondas armónicas . . . . .	251
6.10.2. Algunas soluciones de la ecuación de onda en tres di- mensiones . . . . .	251
6.10.3. A) Ondas planas . . . . .	251
6.10.4. B) Ondas esféricas . . . . .	253
6.10.5. Velocidad de grupo . . . . .	256
6.10.6. Efecto Doppler clásico. . . . .	258
6.10.7. Efecto Doppler relativista . . . . .	259
6.10.8. Efecto Doppler para ondas luminosas . . . . .	260
6.10.9. Efecto Doppler cosmológico . . . . .	260
6.11. Elementos de mecánica de Fluidos . . . . .	262
6.11.1. Cambio del volumen . . . . .	262
6.12. Ecuación de movimiento de un fluido ideal . . . . .	265
6.12.1. Onda sonoras en un fluido . . . . .	266
6.13. Ejercicios propuestos . . . . .	268
<b>7. Problemas complementarios</b>	<b>271</b>
<b>8. Ejemplos resueltos</b>	<b>277</b>

# Índice de figuras

1.1. Transformación de Galileo . . . . .	2
1.2. Sistema de partículas . . . . .	4
1.3. Sección cónica . . . . .	11
1.4. Tipos de cónicas . . . . .	11
2.1. Rotación de un sistema . . . . .	78
2.2. Rotación en torno de un eje . . . . .	80
2.3. Rotación activa de un vector . . . . .	82
2.4. Angulos de Euler . . . . .	84
2.5. Adición de velocidades angulares . . . . .	87
2.6. Angulos de Euler . . . . .	90
3.1. Velocidades de un rígido . . . . .	96
3.2. Elipsoide de inercia . . . . .	99
3.3. Péndulo cuyo punto de suspensión oscila . . . . .	103
3.4. Péndulo forzado . . . . .	104
3.5. Problema de barra . . . . .	105
3.6. Disco que rueda . . . . .	106
3.7. Rueda tirada con una fuerza. . . . .	107
3.8. Rueda sobre cilindro. . . . .	107
3.9. Rueda sobre plataforma móvil. . . . .	108
3.10. Esfera sobre un plano horizontal . . . . .	109
3.11. Cuerpo rígido simétrico. . . . .	114
3.12. Conos del espacio y del cuerpo . . . . .	115
3.13. Trompo simétrico . . . . .	120
3.14. Raices de $f(u)$ . . . . .	121
3.15. Precesión uniforme. . . . .	122
3.16. Trompo dormido. . . . .	122

3.17. Precesión positiva. . . . .	123
3.18. Movimiento cuspidal. . . . .	123
3.19. Movimiento con loops. . . . .	124
3.20. Choque de cuerpos rígidos . . . . .	138
3.21. Conos del espacio y del cuerpo . . . . .	141
3.22. Choque de cuerpos rígidos . . . . .	148
4.1. Transformada de Legendre . . . . .	168
4.2. Trompo simétrico . . . . .	177
4.3. Esfera atraída hacia el origen . . . . .	180
4.4. Problema . . . . .	187
4.5. De un problema . . . . .	188
4.6. De un problema . . . . .	188
4.7. De un problema . . . . .	189
4.8. Disco que rueda sobre otro . . . . .	190
4.9. Partícula sobre hemisferio . . . . .	191
4.10. Problema . . . . .	196
4.11. De un problema . . . . .	197
4.12. De un problema . . . . .	200
4.13. De un problema . . . . .	202
4.14. Disco que rueda sobre otro . . . . .	206
4.15. Partícula sobre hemisferio . . . . .	208
5.1. Osciladores acoplados . . . . .	220
5.2. Osciladores acoplados . . . . .	223
6.1. Osciladores acoplados . . . . .	228
6.2. Ondas transversales . . . . .	234
6.3. Solución de D'Alembert. . . . .	249
6.4. Solución de D'Alembert . . . . .	249
6.5. Potencia en una onda. . . . .	250
6.6. Onda plana. . . . .	252
6.7. Cambio de volumen debido a la velocidad. . . . .	263
7.1. Un péndulo con extremo oscilando . . . . .	273
7.2. Trompo dormido . . . . .	274
7.3. Precesión uniforme . . . . .	274
8.1. De un problema . . . . .	277

---

8.2. Angulos de Euler . . . . .	294
8.3. Colisión de dos cuerpos rígidos . . . . .	298
8.4. Precesión uniforme . . . . .	300
8.5. Barra sobre un cilindro . . . . .	301
8.6. Coordenadas elípticas . . . . .	302
8.7. Osciladores acoplados . . . . .	304



# Sistema de Partículas

## 1.1. Ecuaciones de movimiento

Esta parte de la Mecánica, se presenta en forma bastante resumida. Se presentan las principales definiciones y relaciones cinemáticas así como las ecuaciones clásicas de movimiento para un sistema de partículas puntuales suponiendo interacciones que cumplan el principio de acción y reacción. Las definiciones de cantidades Físicas cinemáticas, que involucran las masas, las posiciones, las velocidades, tales como la energía cinética, momentum lineal, momentum angular, son naturalmente relativas al sistema de referencia que se escoja. Entre esos diversos sistemas de referencia, las relaciones que existan entre esas cantidades físicas, se desprenderán de las transformaciones de Galileo para sistemas, vea figura (1.1), que se trasladan unos respecto de otros con velocidad constante  $\vec{v}$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

Más en general para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. Podemos adelantar que las relaciones entre velocidades y aceleraciones son

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}^{rel},$$

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}^{rel},$$

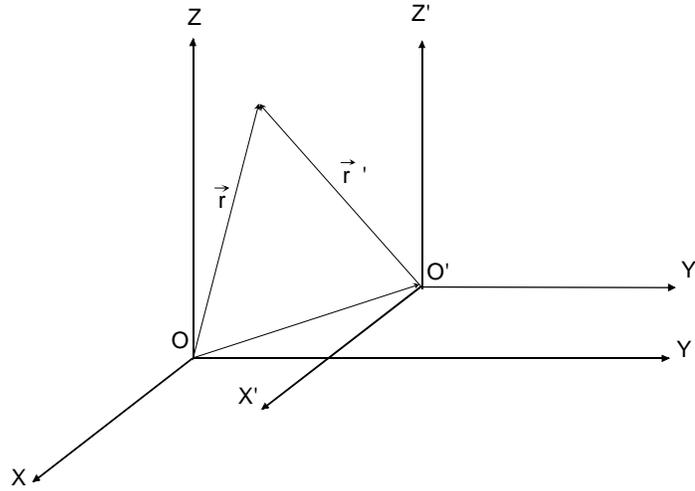


Figura 1.1: Transformación de Galileo

siendo  $\vec{a} = d\vec{\omega}/dt$ . Debe notarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{rel} = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}, \quad \vec{a}^{rel} = \frac{\partial \vec{v}^{rel}}{\partial t}.$$

### 1.1.1. Sistema Inercial de referencia

En la formulación de la dinámica clásica, se supone la existencia de al menos un sistema privilegiado de referencia, un *Sistema inercial de referencia*. Por definición, un *sistema inercial de referencia* es aquel (hipotético) sistema relativo al cual una partícula libre tiene velocidad constante o en particular nula (vea página 5 de referencia [5]). Como consecuencia de la transformación de Galileo, todo sistema que se traslade con velocidad constante respecto a uno inercial de referencia, es también sistema inercial de referencia. La existencia de uno por lo menos, sería materia de validación experimental, con las obvias dificultades que ello presenta. Se acepta que al menos aproximadamente, el marco de las estrellas fijas, lo es. Esta es una materia hoy en día de acuerdo internacional. En efecto en Agosto de 1997, la Unión Astronómica Internacional (IAU) decidió que a partir del primero de Enero de 1998, el IAU sistema de referencia celestial sea el sistema (ICRS), en reemplazo

del sistema FK5. Hay abundantes referencias en la WEB, por ejemplo en <http://hpiers.obspm.fr/webiers/general/syframes/icrsf/ICRS.html>.

### Definiciones y notación

Respecto a un determinado sistema de referencia, ver fig.(1.2) (no necesariamente inercial), sean

$\vec{r}_i$ .....	los vectores posición de las $N$ partículas
$m_i$ .....	las masas de la partículas
$\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$ .....	la velocidad de la partícula $i$ .
$\vec{a}_i = d\vec{v}_i/dt$ .....	la aceleración de la partícula $i$ .
$\vec{F}_i$ .....	la fuerza que actúa sobre la partícula $i$ producida por agentes exteriores al sistema.
$\vec{f}_{ij}$ .....	la fuerza que la partícula $j$ ejerce sobre la partícula $i$ .
$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$ .....	el momentum lineal o cantidad de movimiento lineal del sistema.
$\vec{L}_O = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$	el momentum angular o cantidad de movimiento angular del sistema respecto al origen $O$ .
$\vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i / M$ .	la posición del centro de masas del sistema.
$M = \sum m_i$ .....	masa total del sistema
$\vec{F}^{ext}$ .....	la fuerza externa resultante.
$\vec{\Gamma}_O^{ext}$ .....	el torque o momento de las fuerzas externas resultante, respecto al origen $O$ .

En este resumen no se pretende discutir los fundamentos de la formulación Newtoniana, cuya mayor dificultad radica en las definiciones (independientes) de *Fuerza, masa y aceleración*, así como en los conceptos de espacio y tiempo, que supondremos materias conocidas.

#### 1.1.2. Ecuaciones de movimiento

Con respecto a un sistema inercial de referencia, cada una de las  $N$  partículas cumple con la llamada segunda ley de *Newton*

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}. \quad (1.1)$$

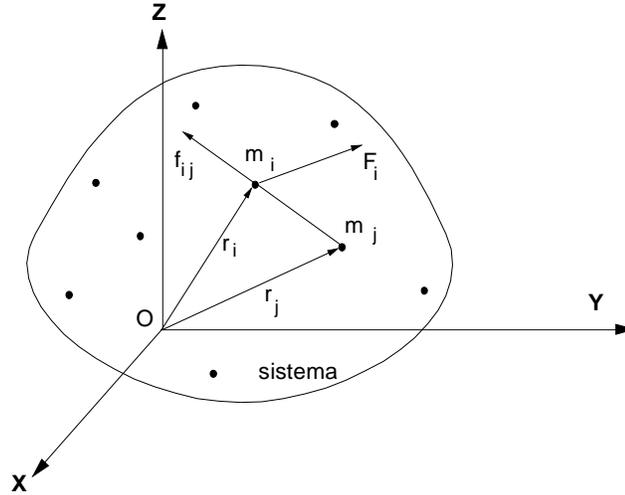


Figura 1.2: Sistema de partículas

Si las fuerzas de interacción  $\vec{f}_{ij}$  satisfacen la llamada ley de acción y reacción, es decir

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0, \quad \text{y} \quad \vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0,$$

puede demostrarse a partir de las  $N$  ecuaciones de movimiento, las siguientes dos importantes ecuaciones

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \quad (1.2)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \quad (1.3)$$

La primera de ellas es bastante evidente. Para demostrar la segunda, basta considerar que

$$\sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0.$$

Las ecuaciones (1.2) y (1.3) son, en general, insuficientes para determinar las posiciones de las partículas siendo la excepción más notable un sistema rígido de partículas, que tiene justamente 6 grados de libertad, o en otras palabras, que su posición puede especificarse con solo 6 coordenadas o parámetros. La segunda de las ecuaciones anteriores, toma la misma forma en

un sistema especial, no necesariamente inercial, con origen en el centro de masas  $G$  y tal que sus ejes no roten. Es decir, demostraremos que

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}. \quad (1.4)$$

Entre el sistema inercial y ese otro mencionado con origen en  $G$ , pueden demostrarse las siguientes relaciones (relaciones de Koenig), consecuencias simples de la transformación de *Galileo*

► TEOREMA 1.1

*Teoremas de Koenig*

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + \vec{L}_G \\ K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + K_G \end{aligned}$$

siendo  $K_G$  y  $\vec{L}_G$  la energía cinética y momentum angular relativos al sistema con origen en  $G$ .

DEMOSTRACION 1

En efecto, si usamos la transformación de Galileo, podemos escribir (si los ejes móviles no rotan)

$$\begin{aligned} \vec{r}'_i &= \vec{r}_i - \vec{r}_G, \\ \vec{v}'_i &= \vec{v}_i - \vec{v}_G, \end{aligned}$$

de modo que resultará

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum m_i(\vec{r}'_i + \vec{r}_G) \times (\vec{v}'_i + \vec{v}_G) \\ &= \sum m_i(\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i + \vec{r}_G \times \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \times \vec{v}_G + \vec{r}_G \times \vec{v}_G), \end{aligned}$$

pero

$$\sum m_i\vec{r}'_i = 0, \quad \sum m_i\vec{v}'_i = 0,$$

de donde sigue el primer resultado. Similarmente

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m_i(\vec{v}'_i + \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}'_i + \vec{v}_G) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i(\vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}_G \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}_G \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G), \end{aligned}$$

de donde sigue el segundo resultado.

### 1.1.3. Torque en punto arbitrario

En general, si se considera otro sistema con origen en un punto  $A$ , cuyos ejes no roten, definimos

$$\vec{L}_A = \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_A), \quad (1.5)$$

entonces considere el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \\ &= \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\ &= \sum m_i\vec{r}_i \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) - \sum m_i\vec{r}_A \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\ &= \frac{d\vec{L}_0}{dt} - M\vec{r}_G \times \vec{a}_A - \vec{r}_A \times \sum \vec{F}_i^{ext} + M\vec{r}_A \times \vec{a}_A \\ &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^{ext} + M(\vec{r}_A - \vec{r}_G) \times \vec{a}_A. \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A, \quad (1.6)$$

de modo que, la relación entre derivada del momentum angular y torque, es válida para puntos ( $A$ ) que cumplan una de las siguientes condiciones:

$$A = G, \quad \vec{a}_A = 0, \quad \vec{a}_A \text{ paralela a } \vec{AG}.$$

Usted puede demostrar que además se tiene en general.

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + M\vec{AG} \times \vec{v}_A + \vec{L}_A \quad (1.7)$$

Aplicaciones de (1.6) pueden verse en [4].

### 1.1.4. Teorema Energía Trabajo

De las ecuaciones de movimiento es posible escribir una primera integral de ellas en la forma que sigue, donde, sin perder generalidad, se separan las fuerzas externas en sus posibles partes conservativa y no conservativa. Además se supone que las fuerzas de interacción son derivables de un potencial de

interacción dependiente de la distancia entre las dos partículas y posiblemente de parámetros propios de ellas dos (masas, cargas, etc.). En el caso de un sistema rígido de partículas, la última suposición no es necesaria, por cuanto el trabajo que realizan las fuerzas de interacción es nulo, al mantenerse constantes las distancias entre partículas. Este teorema es

$$\Delta(K + V + V^{int}) = W_{1 \rightarrow 2}^{nc}, \quad (1.8)$$

donde el trabajo no conservativo (*nc*) externo (*ext*) es la integral de línea

$$W_{1 \rightarrow 2}^{nc} = \int_1^2 \vec{F}^{ext,nc} \cdot d\vec{r},$$

$V$  es la energía potencial asociada a la posible parte conservativa de la fuerza externa y  $V^{int}$  la energía potencial de interacción. Si el lado derecho, el trabajo realizado por la posible parte no conservativa de la fuerza exterior es cero, entonces se conserva la energía mecánica total del sistema. En el caso importante de un sistema rígido de partículas, al no variar las distancias entre las partículas, puede tomarse  $V^{int} = 0$ .

**EJERCICIO 1.1.1** *Demuestre que la suma de los trabajos internos es cero si las distancias entre las partículas son invariables.*

**EJERCICIO 1.1.2** *Demuestre el teorema 1.8.*

### 1.1.5. Sistema de dos partículas

El problema definido por el conjunto de ecuaciones (1.1), es en general no solucionable analíticamente, si  $N \geq 3$ . La principal dificultad consiste en la imposibilidad de separar variables. El sistema de dos partículas interactuando a través de una fuerza conservativa es un caso soluble de sistemas de partículas. Tomando en cuenta la validez del principio de acción y reacción, las dos ecuaciones para ese caso son

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ m_2 \vec{a}_2 &= -\vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \end{aligned}$$

Esas ecuaciones son fácilmente desacoplables utilizando como nuevas variables las posición del centro de masa  $\vec{r}_G$  y la posición relativa  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  resultando

$$\begin{aligned} M\vec{a}_G &= 0, \\ \mu\vec{a} &= \vec{f}(\vec{r}), \end{aligned}$$

siendo  $\mu$  la masa reducida del sistema de dos partículas, es decir

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Entonces, el problema se ha reducido a resolver el problema de una partícula de masa reducida  $\mu$  en presencia de una fuerza central, con centro de fuerza en una de las partículas. Este resultado es sorprendentemente simple considerando que el origen (la posición de una de las partículas) está acelerado.

**EJERCICIO 1.1.3** *Demuestre que las relaciones de transformación de variables pueden escribirse:*

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_G + \frac{m_2}{M}\vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_G - \frac{m_1}{M}\vec{r}. \end{aligned}$$

**EJERCICIO 1.1.4** *Demuestre que la energía cinética de un sistema de dos partículas puede escribirse:*

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\mu v^2.$$

**EJERCICIO 1.1.5** *En el choque de dos partículas, compruebe la equivalencia entre conservación de energía y coeficiente de restitución unidad.*

**EJERCICIO 1.1.6** *Suponga un asteroide esférico de 1 Km de diámetro que tiene una rapidez de 60 [Km/s], con una densidad (como el agua) de 1 [gm/cc]. Determine la energía que debería liberar una explosión interna para dividir al asteroide en dos trozos iguales, cada uno formando un ángulo de un grado respecto a la dirección de la velocidad original.*

## 1.2. Campo Central de Fuerza

Consideraremos una partícula de masa  $\mu$  sobre la cual actúa una fuerza central conservativa cuya dirección es paralela al vector posición  $\vec{r}$ . Más adelante, al estudiar scattering entre dos partículas consideraremos más en detalle la presencia de los dos cuerpos y la transformación entre coordenadas relativas y coordenadas del laboratorio. Por ahora, el vector posición  $\vec{r}$  representará el vector posición relativo entre las dos partículas. Si escribimos la fuerza central como

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r},$$

y se deducen de aquí, (demuéstrelo)

► **TEOREMA 1.2**

Se conserva el momentum angular  $\vec{l}_O = \mu\vec{r} \times \vec{v}$ .

► **TEOREMA 1.3**

La trayectoria está sobre un plano fijo, perpendicular al vector constante  $\vec{l}_O$ .

Por lo tanto, es suficiente utilizar coordenadas polares  $(r, \theta)$  en el plano del movimiento. En esas coordenadas, las ecuaciones de movimiento serán

$$\mu \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r\dot{\theta}^2 \right) = -\frac{dV(r)}{dr} \quad (1.9)$$

y

$$l_O = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante}. \quad (1.10)$$

Eliminando  $\dot{\theta}$  es posible escribir una ecuación radial para  $r(t)$  y su primera integral que corresponde a la conservación de la energía  $E$ . Es decir

$$\mu \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{l_O^2}{\mu^2 r^3} \right) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

y

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = \text{constante}.$$

Si llamamos potencial efectivo para la coordenada radial a

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r),$$

este es diferente de cero para una partícula libre. El efecto del primer término es siempre repulsivo lo cual se puede entender, para el caso de una partícula libre que se mueve en línea recta, simplemente porque la distancia  $r$  al origen pasa siempre por un mínimo. Para potenciales  $V(r)$  atractivos (negativos), en general pueden haber máximos y mínimos de la distancia  $r$ , los llamados *puntos de retorno*.

### 1.2.1. Ecuación diferencial para la órbita

La dependencia de las variables polares en el tiempo es compleja. Es más simple encontrar la dependencia de la distancia con el ángulo, es decir encontrar la órbita. En efecto, haciendo uso de la conservación del momentum angular, es posible eliminar el tiempo de la ecuación radial (1.9) mediante

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{l_O^2}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta},$$

resultando para  $s = 1/r$  la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Binet):

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l_O^2} \frac{dV(1/s)}{ds}.$$

Para un campo de fuerza inverso al cuadrado de la distancia, la integración de la última ecuación es simple. Es decir si

$$V(r) = -\frac{K}{r},$$

siendo  $K > 0$  para el caso atractivo y repulsivo en caso contrario, entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{\mu}{l_O^2} K,$$

cuya solución general, en términos de dos constantes  $e$  y  $\alpha$  es

$$s = \frac{\mu K}{l_O^2} (1 - e \cos(\theta - \alpha)),$$

o bien

$$r = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)},$$

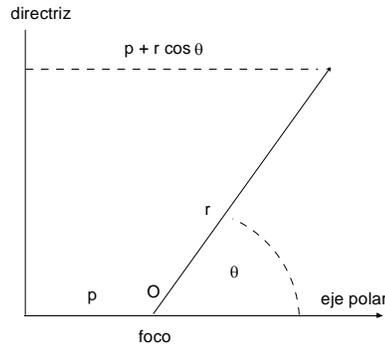


Figura 1.3: Sección cónica

con  $e$  la excentricidad de la órbita y  $\alpha$  la orientación del semieje mayor de la cónica resultante, que son constantes por determinar en términos de condiciones físicas conocidas, inicialmente o en un punto de la trayectoria. Si se considera la definición de una cónica en términos de un foco y su distancia a la directriz  $p$ , como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de las distancias al foco y a la directriz es una constante  $e$ , la excentricidad de la cónica, se obtiene una ecuación de la misma forma. En efecto, con respecto a la figura (1.3), puede obtenerse

$$\frac{r}{p + r \cos \theta} = e \implies r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}.$$

En el caso atractivo,  $K > 0$ , la trayectoria es entonces una elipse si  $0 \leq e < 1$ ,

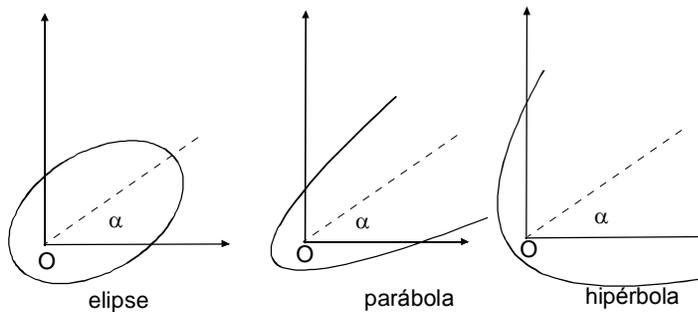


Figura 1.4: Tipos de cónicas

una parábola si  $e = 1$  y una hipérbola si  $e > 1$ . Valores de  $e$  negativos no

son necesarios de considerar, pues ellos correspondería simplemente a rotar la órbita en 180 grados, lo cual es preferible hacer con un valor adecuado de  $\alpha$ , ver fig.(1.4).

En el caso repulsivo,  $K < 0$ , la solución debería escribirse

$$r = \frac{l_O^2}{\mu |K|} \frac{1}{e \cos(\theta - \alpha) - 1},$$

es decir, en este caso, las trayectorias son hipérbolas.

**EJERCICIO 1.2.1** *Demuestre que la excentricidad  $e$  en términos de la energía  $E$  está a dada por*

$$e^2 = 1 + \frac{2El_O^2}{\mu K^2}.$$

**EJERCICIO 1.2.2** *A pesar que la energía  $E$  es negativa para órbitas cerradas, demuestre que el lado derecho en el problema anterior es no negativo.*

**EJERCICIO 1.2.3** *Para el caso de órbita elíptica, demuestre que los semiejes mayor y menor de la elipse están dados respectivamente por*

$$a = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 - e^2}, \quad b = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

**EJERCICIO 1.2.4** *Demuestre la ley de Kepler de los periodos, es decir demuestre que el periodo  $T$  en el caso de movimiento elíptico está dado por*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{K}} a^{\frac{3}{2}}.$$

**EJERCICIO 1.2.5** *Una partícula está en órbita circular de radio  $a$  en torno a la tierra, supuesta esférica, en reposo, de masa total  $M$ , de radio  $R$ , y sin considerar roce con el aire. Demuestre que si la velocidad de la partícula es repentinamente cambiada por un factor  $f$ , la excentricidad de la órbita resultante es*

$$e = |f^2 - 1|.$$

**EJERCICIO 1.2.6** *Respecto a la situación del problema anterior, determine el factor  $f$  para que la partícula pase tangente a la superficie terrestre.*

### 1.2.2. Expresión integral para la trayectoria

Una forma alternativa para obtener la ecuación de la órbita o trayectoria, consiste en considerar

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r) - \frac{l_O^2}{2\mu r^2}},$$

y

$$\dot{\theta} = \frac{l_O}{\mu r^2},$$

de donde, eliminando el tiempo, se puede obtener

$$\theta = \theta_0 + \frac{l_O}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r(\theta)} \frac{1}{r^2 \sqrt{E - V(r) - l_O^2/(2\mu r^2)}} dr. \quad (1.11)$$

expresión integral para la trayectoria  $r(\theta)$ .

## 1.3. Sistemas de masa variable

Con algunas consideraciones pueden tratarse sistemas que ganan o pierden masa en forma autónomo. Para ello considere un análisis diferencial de lo que ocurre cuando un sistema de masa inicial  $m(t)$  con una velocidad  $\vec{v}(t)$  es actuado por una fuerza externa  $\vec{F}(t)$  e incorpora una cantidad infinitesimal de masa  $dm(t)$  la cual tiene, justo antes de incorporarse, una velocidad  $\vec{u}(t)$ . Transcurrido un tiempo  $dt$ , la masa del sistema es  $m(t) + dm(t)$ . La cuestión es ¿cuánto ha variado la velocidad del sistema en este proceso? Para este efecto considere que el sistema total es de masa constante, por lo tanto podemos usar el hecho que el cambio de la cantidad de movimiento total es producido por la fuerza  $\vec{F}(t)$  solamente, es decir

$$\vec{F}(t)dt = (m(t) + dm)(\vec{v}(t) + d\vec{v}(t)) - (dm\vec{u}(t) + m(t)\vec{v}(t)),$$

de aquí, despreciando infinitésimos de segundo orden, se establece el resultado

$$\vec{F}(t) = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - (\vec{u}(t) - \vec{v}(t)) \frac{dm(t)}{dt}. \quad (1.12)$$

Aun cuando el análisis ha sido hecho para sistemas que ganan masa, el mismo resultado se obtiene para sistemas que pierden masa, pero en este último caso  $\vec{u}(t)$  representará la velocidad de los elementos de masa justo después de abandonar el sistema.

**EJEMPLO 1.3.1** *Una cadena flexible de longitud total  $L$  y de masa total  $M$  se suspende de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo y se suelta. Determine la reacción que ejerce el suelo sobre el montón que se acumula mientras la cadena cae. (Se supone que los eslabones son infinitesimales y que no rebotan en el suelo).*

**Solución.** Sea el sistema de masa variable el montón acumulado, de modo que aquí, en la dirección vertical

$$v(t) = 0, \quad u(t) = -gt, \quad F(t) = R(t) - mg, \quad m = \frac{M}{L} \frac{1}{2} gt^2.$$

Por lo tanto, la ecuación (1.12) nos da

$$R(t) - mg = -u \frac{dm}{dt},$$

y finalmente

$$R(t) = \frac{3}{2} \frac{M}{L} g^2 t^2.$$

---

**EJEMPLO 1.3.2** *Una cadena flexible de longitud total  $L$  y de masa total  $M$  viene deslizándose sobre una superficie horizontal lisa con rapidez  $v_0$ , en la dirección positiva del eje  $OX$ . Al llegar al origen se encuentra con un bloque de masa  $M$  inicialmente en reposo. Determine la posición del bloque en función del tiempo mientras la cadena se acumula contra él. (Se supone que los eslabones son infinitesimales y que no rebotan en el bloque).*

**Solución.** Sea  $x$  la coordenada del bloque. La masa total del sistema, bloque más trozo acumulado será

$$m(t) = M + \frac{M}{L}(v_0 t - x),$$

además  $u(t) = v_0$ ,  $v(t) = \dot{x}$ ,  $F(t) = 0$ , de modo que la ecuación (1.12) conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$0 = \left( M + \frac{M}{L}(v_0 t - x) \right) \ddot{x} - \frac{M}{L}(v_0 - \dot{x})^2,$$

o bien, en términos de una variable auxiliar  $z = L + v_0 t - x$

$$0 = z\ddot{z} + \dot{z}^2,$$

con condiciones iniciales  $z(0) = L$ ,  $\dot{z}(0) = v_0$ . Integrando dos veces se obtiene

$$\dot{z} = \frac{Lv_0}{z}, \quad \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}L^2 + Lv_0 t,$$

y finalmente

$$x = L + v_0 t - \sqrt{L^2 + 2Lv_0 t}, \quad \text{si } t < L/v_0.$$

Más tarde, el sistema continúa moviéndose con la rapidez constante alcanzada al agotarse la cadena. (Ello ocurre cuando  $(v_0 t - x)M/L = M$ , o bien  $z = 2L$ )

---

**EJEMPLO 1.3.3** *Una cadena flexible de masa distribuida uniformemente  $\lambda \text{ kg m}^{-1}$  está amontonada en el suelo y se aplica a uno de sus extremos, una fuerza constante hacia arriba  $F$ . Determine la altura de la cadena levantada en función del tiempo.*

**Solución.** Sea  $y$  la altura. Aquí  $u = 0$ ,  $v = \dot{y}$ ,  $m = \lambda y$ , de modo que la ecuación de movimiento será

$$F - \lambda y g = \lambda y \ddot{y} + \lambda \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \lambda \left( y \frac{d\dot{y}^2}{dy} + 2\dot{y}^2 \right)$$

la cual puede ser integrada mediante un factor integrante  $y$ . Así resulta

$$2Fy - 2\lambda y^2 g = \lambda \frac{d}{dy} (y^2 \dot{y}^2),$$

entonces  $F - \frac{2}{3} \lambda y g = \lambda \dot{y}^2$  de donde se obtiene

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3} y g}, \quad t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3} y g}},$$

y finalmente

$$y = t\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{1}{6}gt^2}.$$

Aunque parezca paradójico, la rapidez inicial del extremo de la cadena después de aplicada la fuerza no es cero, es  $\sqrt{F/\lambda}$  cuestión que se explica pues se ha aplicado una fuerza finita, a un elemento infinitésimo de masa. Además puede observarse que la cadena se detiene cuando  $F = \frac{2}{3}\lambda yg$ , y para ese instante el largo levantado tiene un peso  $\lambda yg = \frac{3}{2}F$ , mayor que la fuerza aplicada. Naturalmente después bajará hasta que finalmente sea  $\lambda yg = F$ .

---

**EJEMPLO 1.3.4** *Un depósito cilíndrico con base circular de área  $A$  tiene líquido (agua por ejemplo) inicialmente hasta una altura  $h_0$ . Al nivel del suelo liso, se hace un pequeño agujero circular de área  $a$  por el cual sale agua horizontalmente. Determine la aceleración del depósito producto de la pérdida de masa.*

**Solución.** Sea  $h(t)$  la altura del agua en el depósito,  $\rho$  su densidad. Si suponemos que la aceleración no afecta demasiado la superficie del agua, podemos primero estimar la forma en que decrece la masa del líquido en el recipiente si  $a \ll A$ , para el depósito estacionario. La rapidez de salida por el orificio (relativa al recipiente) será de magnitud  $\sqrt{2gh}$ , de modo que el caudal másico de salida será  $\rho\sqrt{2gh}a$ . Entonces la masa del líquido disminuye de la forma

$$\frac{dm}{dt} = -\rho\sqrt{2gh}a,$$

y

$$m = \rho Ah$$

Ahora planteamos la ecuación de movimiento suponiendo que la velocidad relativa del agua que sale es

$$u - v = -\sqrt{2gh}$$

$$0 = m(t)\frac{dv(t)}{dt} - (u - v)\frac{dm(t)}{dt},$$

$$0 = \rho Ah\frac{dv(t)}{dt} - \left(-\sqrt{2gh}\right)(-\rho\sqrt{2gh}a),$$

$$0 = A\frac{dv(t)}{dt} - 2ga$$

y finalmente

$$\frac{dv}{dt} = 2g \frac{a}{A},$$

mientras quede líquido en el recipiente.

---

## 1.4. Ejercicios

EJERCICIO 1.4.1 *Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un punto fijo  $0$  con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto  $0$ , demuestre que el centro de masas se mueve como si fuera una partícula del sistema.*

EJERCICIO 1.4.2 *Un conjunto de partículas de masas  $m$ , pueden deslizar libremente sobre alambres paralelos y se atraen una a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y a sus distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masas supuesto en reposo.*

EJERCICIO 1.4.3 *Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masas describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.*

EJERCICIO 1.4.4 *Dos partículas deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en  $0$ . Demuestre que si las partículas se atraen y ellas parten desde el reposo de posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.*

EJERCICIO 1.4.5 *Dos partículas de masas iguales a  $m$  se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares  $OX$  y  $OY$  y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia siendo  $K$  la constante de proporcionalidad. Inicialmente:*

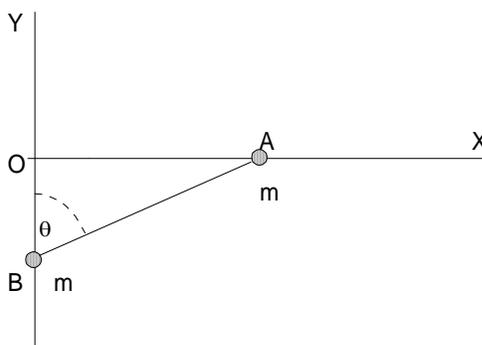
$$\begin{aligned} x(0) &= a, & y(0) &= a, \\ \dot{x}(0) &= -V_0, & \dot{y}(0) &= 0, \end{aligned}$$

a) Determine  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

- b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masas del sistema.

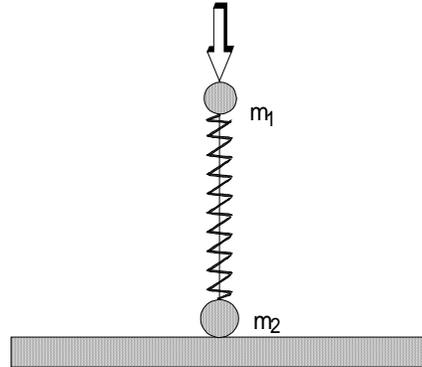
EJERCICIO 1.4.6 *Dos partículas de igual masa están unidas por un resorte de constante  $K$  y largo natural  $a$ . Además actúa entre ambas partículas una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez de la variación de la distancia entre ellas. El sistema se coloca en movimiento dándole a una de las partículas una velocidad  $V_0$  perpendicular a la línea que une las partículas. Determine  $V_0$  si después de un tiempo muy largo, el largo del resorte es  $2a$ .*

EJERCICIO 1.4.7 *Dos partículas  $A$  y  $B$  de idéntica masa  $m$ , están unidas entre sí por una cuerda inextensible de largo  $a$ . La partícula  $A$  se mueve por una corredera horizontal lisa  $OX$ , mientras que la partícula  $B$  se mueve por una corredera vertical lisa  $OY$ , ambas en un plano vertical. Inicialmente  $B$  está en  $O$  y  $OA = a$ , con el sistema en reposo. Si  $\theta$  es el ángulo en  $B$ :*



- a) Calcular en función de las reacciones que ejercen las correderas sobre las partículas.
- b) Calcular la tensión en la cuerda en función de  $\theta$ .

EJERCICIO 1.4.8 *Se tiene el sistema de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$  de la figura en que el resorte, de constante  $k$  no tiene masa. Determinar el valor mínimo de la compresión  $X$  del resorte, medido respecto de su largo natural, para que al soltar  $m_1$  se despegue  $m_2$ .*



EJERCICIO 1.4.9 *Tres partículas iguales están inicialmente en línea recta igualmente espaciadas sobre un plano horizontal liso y unidas por dos hilos de largos “a”. La partícula del medio inicialmente está en reposo y a las partículas externas se les da una velocidad  $V_0$  perpendicular a la línea que las une. Calcule la velocidad con que chocan las partículas.*

### 1.4.1. Campo central

EJERCICIO 1.4.10 *Una partícula describe una órbita circular en un campo de fuerzas dado por*

$$F(r) = -\frac{K}{r^2}$$

*Demostrar que si  $k$  disminuye bruscamente a la mitad de su valor inicial, la órbita la partícula se hace parabólica.*

EJERCICIO 1.4.11 *Calcular explícitamente la media temporal (o sea, la media en un periodo completo) de la energía potencial de una partícula que se mueve, sobre una órbita elíptica en un campo central en el que la fuerza obedece la ley de inversa del cuadrado de la distancia. Expresar el resultado en función de la constante de proporcionalidad de la fuerza y del semieje mayor de la elipse. Efectuar un cálculo similar para la energía cinética. Comparar los resultados y comprobar el teorema del virial en este caso.*

EJERCICIO 1.4.12 *Dos partículas iguales que se mueven bajo la influencia atracción gravitacional mutua, describen órbitas circulares una en torno de*

la otra con. un período . Si repentinamente se detienen y caen una sobre la otra, demostrar que chocarán después de un tiempo

$$\frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

EJERCICIO 1.4.13 Dos masas que se atraen,  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 + m_2 = M$ ), están separadas una distancia  $r_0$  y se las suelta a partir del reposo. Demostrar que cuando la distancia sea  $r$  menor que  $r_0$ , las velocidades serán

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

$$v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

EJERCICIO 1.4.14 Demuestre que la velocidad areolar es constante en, el caso de una partícula se mueva bajo la acción de una fuerza atractiva dada por  $F(r) = -Kr$  . Calcule las medias temporales de las energías cinética y potencial y comparar con los resultados que da el teorema del virial.

EJERCICIO 1.4.15 Estudiar el movimiento de una partícula repelida por un centro de fuerzas de acuerdo con la ley  $F(r) = kr$ . Demostrar que la órbita sólo puede ser hiperbólica.

EJERCICIO 1.4.16 Una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central dada por

$$F(r) = -\frac{K}{r^n}.$$

Demuestre si la órbita es circular y pasa por el centro de fuerzas, entonces  $n = 5$ .

EJERCICIO 1.4.17 Suponga un cometa que describe una órbita parabólica en el mismo plano que la órbita terrestre. Si la menor distancia del cometa al Sol es  $\gamma R_t$  donde  $R_t$  es el radio de la órbita de la Tierra (supuesta circular)  $\gamma < 1$ , demostrar que el tiempo que el cometa pasa dentro de la órbita terrestre viene dado por

$$\sqrt{2(1-\gamma)(1+2\gamma)}/3\pi \text{ años}$$

¿ Cuántos días estará el cometa en la órbita terrestre, si se acerca al Sol hasta distancia del perihelio de Mercurio?

EJERCICIO 1.4.18 *Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, si además se superpone otra fuerza de magnitud inversamente proporcional al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas. Es decir,*

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

con  $K > 0$ . Demuestre que la trayectoria es una elipse que rota o precesa

EJERCICIO 1.4.19 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral dada por  $r = k\theta$ , siendo  $k$  una constante.*

EJERCICIO 1.4.20 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral logarítmica dada por  $r = Ke^{a\theta}$  siendo  $k$  y  $a$  constantes.*

EJERCICIO 1.4.21 *Una partícula de masa unidad se desplaza desde el infinito a lo largo de una recta que, de seguir, haría que la partícula pasase a una distancia  $b\sqrt{2}$  de un punto  $P$ . Si la partícula es atraída hacia  $P$  con una fuerza proporcional a  $\frac{k}{r^5}$  y el momento angular respecto de  $P$  es  $\sqrt{k}/b$ , demuestre que la trayectoria está dada por*

$$r = b \coth(\theta/\sqrt{2}).$$

EJERCICIO 1.4.22 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerzas con una fuerza proporcional a la distancia de la partícula del centro. Demuestre que la trayectoria es una curva plana que puede ser representada por las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x &= A \cos(nt + \alpha), \\ y &= B \sin(nt + \beta). \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.4.23 *Determine la fuerza central si la órbita es una circunferencia y el centro de fuerza está situado sobre la circunferencia.*

EJERCICIO 1.4.24 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerza  $O$  por una fuerza de forma  $K/r^2$ . La partícula es lanzada desde un punto  $P$  con una velocidad de magnitud  $V_0$  en un ángulo  $\alpha$  respecto de  $OP$ . Demuestre que la órbita es una elipse si  $OP \leq 2K/V_0^2$ . Determine además en términos de  $m$ ,  $K$ ,  $V_0$ ,  $\alpha$ , y  $OP = r_0$  la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje mayor respecto de  $OP$ .*

EJERCICIO 1.4.25 Admitiendo que la tierra es una esfera fija de radio  $R$  y despreciando la resistencia del aire, considere el lanzamiento de un proyectil con rapidez inicial  $V_0$  formando un ángulo  $\xi_0$  con la vertical del lugar. Si

$$V_e^2 = \frac{2GM}{R},$$

donde  $G$  es la constante de gravitación,  $M$  la masa terrestre y  $V_0 < V_e$ , demuestre que la excentricidad y la ecuación de la trayectoria del proyectil son:

$$e = \sqrt{1 - \sin^2(2\beta) \sin^2(\xi_0)},$$

$$R/r = \frac{(1 - e \cos(\theta - \alpha))}{2 \sin^2(\beta) \sin^2(\xi_0)}$$

siendo

$$\sin \beta = V_0/V_e,$$

$$\sin \alpha = \sin^2 \beta \sin(2\xi_0)/e.$$

Aquí:  $\alpha$  representa la inclinación del semieje mayor,  $\xi_0$  ángulo de lanzamiento respecto a la vertical.

EJERCICIO 1.4.26 Con respecto al problema anterior,  $V_0 < V_e/\sqrt{2}$  demuestre que el ángulo de disparo para tener un alcance máximo está dado por:

$$\sin \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (V_0/V_e)^2}}$$

y el ángulo máximo por

$$\sin(\theta/2) = \frac{(V_0/V_e)^2}{1 - (V_0/V_e)^2}$$

¿ Qué ocurre si  $V_0 \geq V_e/\sqrt{2}$  ?

EJERCICIO 1.4.27 Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R$  con rapidez  $V_0$  atraída hacía el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez se reduce a la mitad, determine en términos de  $R_0$  y  $V_0$ : la ecuación de la nueva órbita, su excentricidad y la distancia mínima de la partícula al centro durante el movimiento siguiente.

EJERCICIO 1.4.28 Una partícula de masa  $m = 1$  es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo  $O$  y se mueve describiendo la elipse:

$$r = \frac{100}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta}$$

Si en el punto más alejado de su trayectoria, la rapidez de la partícula es  $V = 1$ , determine la constante de la ley de fuerza. Si en el punto más alejado, la rapidez de la partícula es duplicada, determine la ecuación de la nueva órbita.

EJERCICIO 1.4.29 Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R_0$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez de la partícula se aumenta a  $V = \sqrt{\alpha}V_0$  siendo  $\alpha > 1$ . Demuestre que si  $\alpha \geq 2$  la partícula se aleja hasta el infinito. En cambio si  $\alpha < 2$ , determine la ecuación de la nueva órbita en términos de  $R_0$ ,  $V_0$  y  $\alpha$ .

EJERCICIO 1.4.30 Determine las posibles leyes de fuerza central si una partícula describe bajo su acción una circunferencia, con el centro de fuerzas en el interior del círculo.

EJERCICIO 1.4.31 Considere una partícula que se mueve en un campo central atractivo  $K/r^2$  con  $K < 0$ . Demuestre que para un momentum angular dado, la mínima energía que puede tener la partícula es:

$$E = -\frac{mK^2}{2l^2}.$$

EJERCICIO 1.4.32 Un cohete de masa  $m$  es disparado desde un punto de la superficie de la tierra con una rapidez inicial  $V_0$  haciendo un ángulo  $\xi_0$  con la vertical del lugar. Despreciando la rotación terrestre, la resistencia del aire y el movimiento de la tierra, demuestre que la excentricidad de la trayectoria está dada por:

$$e^2 = 1 + \frac{R^2 V_0^2 \text{sen}^2 \xi_0}{G^2 M^2} \left( V_0^2 - \frac{2GM}{R} \right),$$

y la trayectoria es:

$$r = \frac{R^2 V_0^2 \text{sen}^2 \xi_0}{GM(1 - e \cos(\theta - \alpha))}.$$

Aquí  $R$  es el radio terrestre,  $M$  la masa de la tierra y  $G$  la constante de gravitación. ¿Cuál es la ubicación del eje polar?

EJERCICIO 1.4.33 Respecto al problema anterior, suponga que  $V_0 = \sqrt{GM/R}$  y  $\xi_0 = 30^\circ$ . Demuestre entonces que el proyectil caerá de regreso a la tierra en un punto situado a una distancia  $R\pi/3$  del punto de partida, medida sobre la superficie de la tierra. Demuestre además que la altura máxima del proyectil sobre la superficie terrestre es de alrededor de  $0,866 R$ .

EJERCICIO 1.4.34 Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R_0$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la velocidad se reduce a la mitad, determine en termino de  $R_0$  y  $V_0$  la ecuación de la nueva órbita.

EJERCICIO 1.4.35 Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre  $M$ , la constante de gravitación  $G$ ,  $\Omega$  la velocidad angular terrestre. Determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente aumentada al doble.

EJERCICIO 1.4.36 Un satélite de masa  $m$  está en órbita circular de radio  $2R$  en torno a la tierra supuesta esférica, de masa  $M$  y radio  $R$ , en reposo y sin atmósfera si la velocidad se altera en un punto de la órbita en un factor  $f$ , determine:

- a) la ecuación de la nueva órbita.
- b) el rango de valores de  $f$  para los cuales el satélite chocará con la tierra.
- c) el rango de valores de  $f$  para los cuales el satélite se aleja indefinidamente.

EJERCICIO 1.4.37 Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre  $M$ , la constante de gravitación  $G$ ,  $\Omega$  la velocidad angular terrestre. Determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente reducida a la mitad.

EJERCICIO 1.4.38 *Considere la tierra como esférica, en reposo de masa  $M$  y radio  $R$ , sin atmósfera. Se lanza un proyectil con rapidez inicial  $V_0$  formando un ángulo  $\beta$  respecto a la horizontal. Determine el arco que el proyectil recorre hasta llegar al suelo (si lo hace). Discuta las condiciones bajo las cuales el proyectil cae nuevamente al suelo. La constante de gravitación es  $G$ .*

### 1.4.2. Sistemas de masa variable

EJERCICIO 1.4.39 *Una cadena de longitud  $L$  y masa total  $M$  se suspende verticalmente de modo que su extremo inferior está justo a nivel del suelo. Si la cadena se suelta, determine la reacción la acción contra el suelo mientras la cadena se deposita cayendo por su propio peso.*

EJERCICIO 1.4.40 *Una cadena de longitud  $L$  y masa total  $M$  está amontonada sobre el suelo. Si la cadena se levanta de un extremo aplicando una fuerza constante  $F$  hacia arriba, determine la altura que sube la cadena en función del tiempo. Discuta sobre la altura máxima que alcanza la cadena, supuestamente muy larga de tal modo que siempre queda cadena depositada.*

EJERCICIO 1.4.41 *Una gota esférica de agua atraviesa una capa de nube en reposo. Suponiendo que se condensa agua por unidad de tiempo sobre la gota, proporcionalmente a su superficie con constante de proporcionalidad  $K$  conocida, determine como crece el radio de la gota con el tiempo y como varía la altura de ella a medida que transcurre el tiempo.*

EJERCICIO 1.4.42 *Un carrito, inicialmente de masa  $M$  y en reposo sobre un plano horizontal liso, comienza a moverse debido a que es impulsado por un chorro continuo de masa que se le va incorporando. Dichas masas salen desde el punto de partida (como de una ametralladora) con rapidez  $U_0$  y a razón de  $\lambda$  unidades de masa por unidad de tiempo y se incrustan en el carrito cuando lo impactan. Determine la forma en que varían la aceleración, la velocidad y la posición el móvil con el tiempo.*

EJERCICIO 1.4.43 *Un cohete de masa total  $M$  de la cual una fracción  $fM$ , con  $f$  menor que uno, es de combustible, descansa verticalmente antes de encender los motores. Si se encienden los motores que arrojan masa a razón de unidades de masa por unidad de tiempo y con rapidez relativa al cohete  $U_0$ , establezca la condición que debe cumplirse para que el cohete comience a despegar de inmediato. Para este caso, determine la máxima altura que*

alcanza, suponiendo aceleración de gravedad constante y despreciando el roce con el aire.

EJERCICIO 1.4.44 Una cadena de largo total  $M$  y longitud  $L$ , flexible, es sostenida colgando de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo. Si el extremo superior de la cadena se suelta, determine la reacción del suelo contra la parte depositada, en función del tiempo.

EJERCICIO 1.4.45 Una cadena flexible tiene masa total  $M$  y longitud  $L$ . La cadena está inicialmente amontonada en el suelo. Una cuerda se hace pasar sobre una polea lisa, uno de los extremos unido a un extremo de la cadena y el otro extremo de la cuerda a un partícula de masa  $M$ . Si la partícula se suelta partiendo del reposo

- escriba la ecuación de movimiento para el extremo de la cadena.
- determine la rapidez del extremo de la cadena en función de su posición.

## 1.4. Los problemas resueltos

### 1.4.1. Sistema de partículas

EJERCICIO 1.4.1 Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un punto fijo  $O$  con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto  $O$ , demuestre que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.

**Solución.** Para cada partícula

$$m_i \vec{a}_i = -K m_i \vec{r}_i$$

es decir que cada partícula se mueve de acuerdo a

$$\vec{a}_i = -K \vec{r}_i.$$

Pero

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

de modo que si sumamos todas las ecuaciones, obtenemos

$$M\vec{a}_{CM} = -KM\vec{r}_{CM}$$

o sea

$$\vec{a}_{CM} = -K\vec{r}_{CM}$$

misma ecuación de movimiento que la de cada partícula.

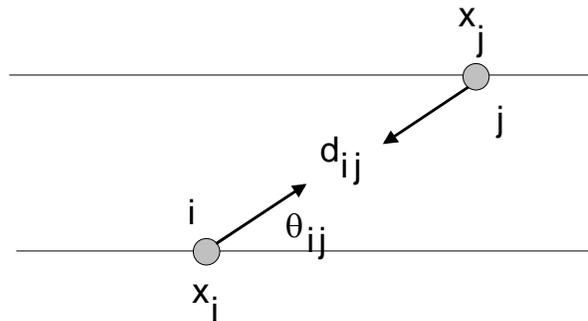
---

**EJERCICIO 1.4.2** *Un conjunto de partículas de masas  $m$ , puede deslizar libremente sobre alambres paralelos, atrayéndose unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masa supuesto en reposo.*

**Solución.** Supongamos que las correderas están en dirección  $OX$  y considere dos de ellas de índices  $i, j$ . La ecuación de movimiento de la  $m_i$  en la dirección  $OX$  será

$$m_i\ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} Km_i m_j d_{ij} \cos \theta_{ij}$$

donde  $d_{ij}$  indica la distancia entre las de índice  $i, j$ , y  $\theta_{ij}$  es el ángulo que forma la línea de la fuerza con el eje  $OX$ .



Entonces podemos escribir

$$\ddot{x}_i = Km \sum_{j \neq i} (x_j - x_i).$$

Por otro lado la posición  $X$  del centro de masas es

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{\sum x_i}{N},$$

entonces incluyendo  $i = j$  se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= Km \sum_j (x_j - x_i) \\ &= KmN x_{CM} - KmN x_i, \end{aligned}$$

es decir

$$\ddot{x}_i + KmN(x_i - x_{CM}) = 0,$$

prueba lo pedido, porque

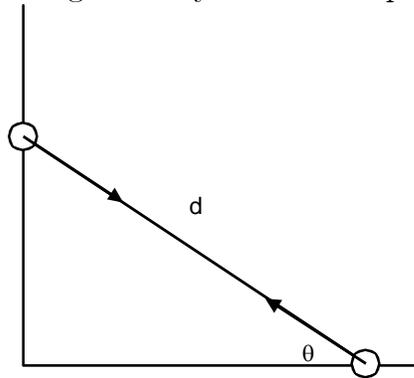
$$\omega^2 = KmN$$

es independiente de  $i$ .

---

**EJERCICIO 1.4.3** *Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masa describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.*

**Solución.** Considere la figura. Sea  $x = d \cos \theta$ ,  $y = d \sin \theta$  entonces tenemos por aplicación de la segunda Ley de Newton que



$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -F \cos \theta = -\frac{k}{d^2} \cos \theta = -\frac{k}{d^3} x \\
 m\ddot{y} &= -F \sin \theta = -\frac{k}{d^2} \sin \theta = -\frac{k}{d^3} y
 \end{aligned}$$

por otro lado  $x_{CM} = \frac{x}{2}$  y  $y_{CM} = \frac{y}{2}$ ,  $r_{CM} = \frac{d}{2}$  entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3} x_{CM}, \\
 \ddot{y}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3} y_{CM},
 \end{aligned}$$

que equivale a

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{k}{8mr_{CM}^3} \vec{r}_{CM}.$$

O sea el centro de masas es atraído hacia el origen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen. Problema que se estudia en campo central de fuerzas y se demuestra allí que la trayectoria es necesariamente una sección cónica.

---

**EJERCICIO 1.4.4** *Dos partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en 0. Demuestre que si las partículas se atraen y ellas parten desde el reposo desde posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.*

**Solución.** Con una figura análoga a la del problema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
 m_1\ddot{x} &= -F \cos \theta = -F \frac{x}{d} \\
 m_2\ddot{y} &= -F \sin \theta = -F \frac{y}{d}
 \end{aligned}$$

de donde

$$m_1\ddot{x}y - m_2\ddot{y}x = 0.$$

Como las masas son iguales entonces

$$\begin{aligned}\ddot{x}y - \dot{y}x &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) &= 0.\end{aligned}$$

Entonces  $\dot{x}y - \dot{y}x$  es constante e igual a cero porque las partículas partieron del reposo, o sea

$$\dot{x}y - \dot{y}x = 0,$$

o bien

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}$$

que puede integrarse dando

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln c + \ln x, \\ y &= cx\end{aligned}$$

o sea si  $x = 0$  entonces simultáneamente  $y = 0$ .

---

EJERCICIO 1.4.5 *Dos partículas de masa  $m$  cada una se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares  $OX$  y  $OY$  y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia, siendo  $K$  la constante de proporcionalidad. Si inicialmente:*

$$\begin{aligned}x(0) &= a, & y(0) &= a, \\ \dot{x}(0) &= -V_0, & \dot{y}(0) &= 0,\end{aligned}$$

a) *Determine  $x(t)$ ,  $y(t)$  y b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masa del sistema.*

**Solución.** Similarmente tendremos

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -F \cos \theta = -Kd \cos \theta = -Kx \\ m\ddot{y} &= -F \sin \theta = -Fd \sin \theta = -Ky\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ y(t) &= C \cos \omega t + D \sin \omega t, \\ \dot{x}(t) &= \omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t), \\ \dot{y}(t) &= \omega(-C \sin \omega t + D \cos \omega t)\end{aligned}$$

y colocando las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned} a &= A, \\ a &= C, \\ -V_0 &= \omega B, \\ 0 &= \omega D \end{aligned}$$

entonces

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \omega t - \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t, \\ y(t) &= a \cos \omega t. \end{aligned}$$

b) Las coordenadas del centro de masas son

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{x}{2} = \frac{1}{2}a \cos \omega t - \frac{V_0}{2\omega} \sin \omega t, \\ y_{CM} &= \frac{y}{2} = \frac{1}{2}a \cos \omega t, \end{aligned}$$

de donde debemos eliminar  $t$ , obteniendo

$$x_{CM} = y_{CM} - \frac{V_0}{2\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_{CM}}{a}\right)^2},$$

que se puede escribir así

$$y^2 \left(1 + \left(\frac{V_0}{a\omega}\right)^2\right) - 2yx + x^2 = \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2.$$

Esto es se trata de una elipse.

---

**EJERCICIO 1.4.6** *Dos partículas de igual masa están unidas por un resorte de constante  $k$  y largo natural  $a$ . Además actúa entre ambas partículas una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez de la variación de la distancia entre ellas. El sistema se coloca en movimiento dándole a una de las partículas una velocidad  $V_0$  perpendicular a la línea que une las partículas. Determine  $V_0$  si después de un tiempo muy largo, el largo del resorte es  $2a$ .*

**Solución.** Mirado desde el centro de masas, que por viajar a velocidad constante  $v_G = \frac{1}{2}V_0$  es un sistema inercial, tenemos que las partículas al comienzo y al final (una vez que las oscilaciones terminan) giran en circunferencias alrededor de él. Así al comienzo

$$\begin{aligned} L_G &= m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} + m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{2}mV_0a. \end{aligned}$$

Al final, si  $V$  son las rapidezces respecto a  $G$ , entonces

$$L_G = mVa + mVa = 2mVa.$$

Como el momentum angular es constante

$$V = \frac{1}{4}V_0.$$

Además, para el movimiento circular de cada partícula

$$m\frac{V^2}{a} = K(2a - a),$$

luego

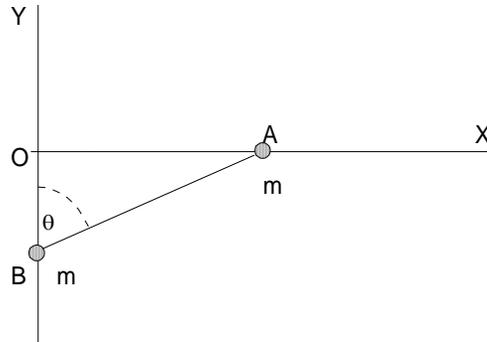
$$V = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$$

y finalmente

$$V_0 = 4V = 4a\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

---

EJERCICIO 1.4.7 *Dos partículas A y B de idéntica masa m, están unidas entre sí por una cuerda inextensible de largo a. La partícula A se mueve por una corredera horizontal lisa OX, mientras que la partícula B se mueve por una corredera vertical lisa OY, ambas en un plano vertical. Inicialmente B está en O y OA = a, con el sistema en reposo. Si  $\theta$  es el ángulo en B:*



*problema*

a) Calcular en función de  $\theta$  las reacciones que ejercen las correderas sobre las partículas. b) Calcular la tensión en la cuerda en función de  $\theta$ .

**Solución.** Llamemos  $N_A$ ,  $N_B$ , las reacciones normales de las correderas sobre las partículas y  $T$  la tensión de la cuerda. Tenemos

$$x_A = a \sin \theta, \quad y_B = -a \cos \theta,$$

de allí calculamos

$$\dot{x}_A = a\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_B = a\dot{\theta} \sin \theta,$$

y conservación de energía da

$$E = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta = 0,$$

de donde despejamos

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} \cos \theta.$$

La segunda ley aplicada a cada partícula da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_A &= -T \sin \theta, \\ 0 &= N_A - mg - T \cos \theta, \\ 0 &= N_B + T \sin \theta \\ m\ddot{y}_B &= T \cos \theta - mg \end{aligned}$$

de la primera

$$T = -\frac{m}{\sin \theta} \ddot{x}_A = -\frac{m}{\sin \theta} \frac{d^2}{dt^2} a \sin \theta,$$

como se conoce  $\dot{\theta}$  estas derivadas se hacen resultando

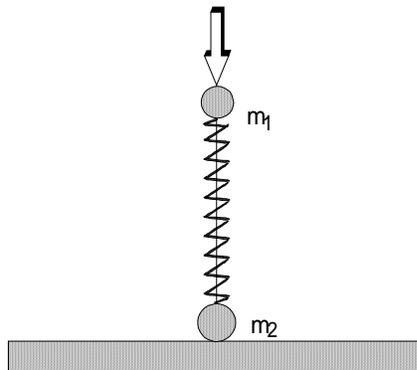
$$T = 3mg \cos \theta,$$

y entonces

$$\begin{aligned} N_A &= mg + 3mg \cos^2 \theta, \\ N_B &= -3mg \cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

---

EJERCICIO 1.4.8 *Se tiene el sistema de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$  de la figura en que el resorte, de constante  $k$  no tiene masa. Determinar el valor mínimo de la compresión  $X$  del resorte, medido respecto de su largo natural, para que al soltar  $m_1$  se despegue  $m_2$ .*



*problema*

**Solución.** Llamemos  $y$  a la coordenada de  $m_1$ . Inicialmente

$$y(0) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} - X, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Esto porque el peso de  $m_1$  ya comprime el resorte en  $\frac{m_1 g}{k}$ . Sea  $N_2$  la reacción del suelo sobre  $m_2$ , entonces las ecuaciones de movimiento (antes que  $m_2$

despegue) son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -m_1 g + k(l_0 - y), \\ 0 &= -k(l_0 - y) - m_2 g + N_2. \end{aligned}$$

Debemos integrar la primera que la reescribimos así

$$\ddot{y}_1 + \frac{k}{m_1} y = -g + \frac{k l_0}{m_1},$$

que tiene solución particular

$$y_{1p} = l_0 - \frac{m_1 g}{k},$$

y solución homogénea

$$y_{1h} = A \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m_1}} t,$$

luego la solución general es

$$y(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m_1}} t.$$

Como la velocidad inicial es cero debe ser  $B = 0$ , luego

$$y(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t,$$

imponiendo condición inicial resulta

$$l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A = l_0 - \frac{m_1 g}{k} - X$$

de donde  $A = -X$  entonces

$$y(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} - X \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t.$$

Ahora podemos evaluar la reacción normal en función del tiempo

$$\begin{aligned} N_2 &= k(l_0 - y) + m_2 g \\ &= k\left(\frac{m_1 g}{k} + X \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t\right) + m_2 g \\ &= (m_1 + m_2)g + kX \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t, \end{aligned}$$

que muestra que  $N_2$  comienza a disminuir con el tiempo y que se anularía con el mínimo valor de  $X$  si

$$(m_1 + m_2)g - kX_{\text{mín}} = 0,$$

luego

$$X_{\text{mín}} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}.$$

---

EJERCICIO 1.4.9 *Tres partículas iguales están inicialmente en línea recta, igualmente espaciadas sobre un plano horizontal liso y unidas por dos hilos de largos “a”. La partícula del medio está inicialmente en reposo, y a las partículas externas se les da una velocidad  $V_0$  perpendicular a la línea que las une. Calcule la velocidad con que chocan las partículas.*

**Solución.** Al partir si  $x$  es la dirección perpendicular a la línea que une las partículas entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 2mV_0 \\ K &= \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 \\ &= mV_0^2. \end{aligned}$$

Justo antes del choque, Las tres partículas tienen la misma componente de velocidad en  $x$ , llamémosla  $u$ , y dos partículas tienen la misma rapidez  $v$  en el eje  $y$  entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 3mu \\ K &= 3\frac{1}{2}mu^2 + 2\frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

Conservación de  $P_x$  y  $K$  implica

$$u = \frac{2}{3}V_0$$

y

$$\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}V_0\right)^2 + v^2 = V_0^2$$

entonces

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{3}V_0.$$


---

### 1.4.2. Movimiento en un campo central de Fuerza

EJERCICIO 1.4.10 Una partícula describe una órbita circular en un campo de fuerzas dado por

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Demostrar que si  $k$  disminuye bruscamente a la mitad de su valor inicial, la órbita de la partícula se hace parabólica.

**Solución.** Sea  $k_0$  el valor inicial de la constante. Para una órbita circular

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{r} &= \frac{k_0}{r^2}, \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k_0}{r} = -\frac{k_0}{2r} < 0. \end{aligned}$$

Si  $k$  disminuye a la mitad, la energía cinética queda igual

$$K = \frac{k_0}{2r},$$

y la energía potencial sera

$$V = -\frac{k_0}{2r},$$

luego la energía es cero, por lo tanto la órbita es parabólica.

---

EJERCICIO 1.4.11 Calcular explícitamente la media temporal (o sea, la media en un periodo completo) de la energía potencial de una partícula que se mueve sobre una órbita elíptica en un campo central en el que la fuerza obedece la ley inversa del cuadrado de la distancia. Expresar el resultado en función de la constante de proporcionalidad de la fuerza y del semieje mayor de la elipse. Efectuar un cálculo similar para la energía cinética.

**Solución.** Tenemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - e \cos \theta}, \\ l_0 &= mr^2 \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{k}{r}, \\
 K &= \frac{1}{2}(mv^2) = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\
 &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{l_0^2}{m}
 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\theta} &= -\frac{l_0^2 e \sin \theta}{mk(1 - e \cos \theta)^2} \\
 &= -\frac{mk}{l_0^2} e \sin \theta r^2
 \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2 k^2}{l_0^4} e^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2}\right)\frac{l_0^2}{m}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \langle V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{V}{\dot{\theta}} d\theta \\
 &= -\frac{mk}{T l_0} \int_0^{2\pi} r d\theta \\
 &= -\frac{l_0}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e \cos \theta} d\theta = -\frac{l_0}{T} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}}.
 \end{aligned}$$

Similarmente para la energía cinética resulta

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{K}{\dot{\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \frac{l_0}{T} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}}$$

---

EJERCICIO 1.4.12 *Dos partículas iguales que se mueven bajo la influencia de la atracción gravitacional mutua, describen órbitas circulares una en torno*

de la otra con un período  $\tau$ . Si repentinamente se detienen y caen una sobre la otra, demostrar que chocarán después de un tiempo

$$\frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

**Solución.** Si  $k$  representa la constante de la ley de fuerza, y  $2a$  la distancia inicial, entonces inicialmente

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{a} &= \frac{k}{4a^2}, \\ v &= \sqrt{\frac{k}{4ma}}, \end{aligned}$$

de modo que el periodo es

$$\tau = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi a \sqrt{\frac{4ma}{k}}.$$

Si se detienen, caen una hacia la otra de manera que

$$m\ddot{r} = -\frac{k}{4r^2}, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad r(0) = a.$$

Podemos integrar porque

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \dot{r}^2,$$

luego

$$\begin{aligned} m\frac{1}{2}\dot{r}^2 &= \frac{k}{4} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right), \\ \dot{r} &= -\sqrt{\frac{k}{2m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \end{aligned}$$

separamos variables

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{2m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}} = -dt,$$

entonces

$$t = \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{2m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}},$$

sea  $r = az$

$$\begin{aligned} t &= a\sqrt{\frac{2ma}{k}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z} - 1}} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z} - 1}} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 1.4.13** *Dos masas que se atraen,  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 + m_2 = M$ ), están separadas una distancia  $r_0$  y se las suelta a partir del reposo. Demostrar que cuando la distancia sea  $r$  menor que  $r_0$ , las velocidades serán*

$$\begin{aligned} v_1 &= m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}, \\ v_2 &= m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}. \end{aligned}$$

**Solución.** Tenemos, para un origen en el centro de masa

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 &= -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}, \\ m_2 \ddot{r}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}, \end{aligned}$$

donde  $r = r_1 + r_2$  y

$$r_1 = \frac{m_2}{M} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{M} r,$$

de manera que las dos ecuaciones se reducen a una sola

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2},$$

como

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \dot{r}^2,$$

integramos la última obteniendo

$$\dot{r} = -\sqrt{2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)},$$

y de aquí se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= \frac{m_2}{M} \dot{r} = -\frac{m_2}{M} \sqrt{2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = -m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}, \\ \dot{r}_2 &= \frac{m_1}{M} \dot{r} = -\frac{m_1}{M} \sqrt{2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = -m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)},\end{aligned}$$

que prueban el resultado.

**EJERCICIO 1.4.14** *Demuestre que la velocidad aerolar es constante en el caso de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza atractiva dada por  $F(r) = -kr$ . Calcule las medias temporales de las energías cinética y potencial y compare con los resultados que da el teorema del virial.*

**Solución.** *Lo primero es cierto para todas las fuerzas centrales porque se conserva  $\vec{l}_0$ . Para obtener las órbitas es preferible usar coordenadas cartesianas siendo*

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky,\end{aligned}$$

de donde las soluciones son

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t - \alpha), \\ y &= B \cos(\omega t - \beta),\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega A \sin(\omega t - \alpha), \\ \dot{y} &= -\omega B \sin(\omega t - \beta),\end{aligned}$$

con  $\omega = \sqrt{k/m}$ . El periodo será  $T = 2\pi/\omega$  y los promedios solicitados serán

$$\begin{aligned}\langle V \rangle &= \frac{1}{2} k \langle r^2 \rangle = \frac{1}{2} k \langle A^2 \cos^2(\omega t - \alpha) + B^2 \cos^2(\omega t - \beta) \rangle, \\ \langle K \rangle &= \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \alpha) + \omega^2 B^2 \sin^2(\omega t - \beta) \rangle,\end{aligned}$$

pero

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

resultando

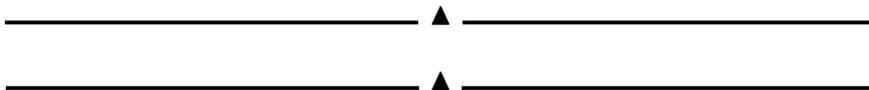
$$\begin{aligned}\langle V \rangle &= \frac{1}{4}k(A^2 + B^2), \\ \langle K \rangle &= \frac{1}{4}m\omega^2(A^2 + B^2) = \langle V \rangle.\end{aligned}$$

Las constantes  $A$  y  $B$  pueden relacionarse con la energía  $E$  de acuerdo a

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 \sin^2(\omega t - \alpha) + B^2 \sin^2(\omega t - \beta)) + \frac{1}{2}k(A^2 \cos^2(\omega t - \alpha) + B^2 \cos^2(\omega t - \beta)) \\ &= \frac{1}{2}k(A^2 \sin^2(\omega t - \alpha) + B^2 \sin^2(\omega t - \beta)) + \frac{1}{2}k(A^2 \cos^2(\omega t - \alpha) + B^2 \cos^2(\omega t - \beta)) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}kB^2\end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$\langle K \rangle = \langle V \rangle = \frac{1}{2}E.$$



EJERCICIO 1.4.15 *Estudiar el movimiento de una partícula repelida por un centro de fuerzas de acuerdo con la ley  $F(r) = kr$ . Demostrar que la órbita sólo puede ser hiperbólica.*

**Solución.** Aquí también conviene usar coordenada cartesianas

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= kr \cos \theta = kx, \\ m\ddot{y} &= kr \sin \theta = ky.\end{aligned}$$

Ambas pueden integrarse siendo  $k/m = p$  en la forma

$$\begin{aligned}x &= Ae^{pt} + Be^{-pt}, \\ y &= Ce^{pt} + De^{-pt}.\end{aligned}$$

Para determinar la trayectoria, debemos eliminar  $t$  entre esas dos ecuaciones. Para ello las escribimos

$$\begin{aligned}Ae^{2pt} - xe^{pt} + B &= 0, \\ Ce^{2pt} - ye^{pt} + D &= 0,\end{aligned}$$

y resolviendo ecuaciones de segundo grado tenemos

$$e^{pt} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4AB}}{2A} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4CD}}{2C},$$

y haciendo algo de álgebra

$$\begin{aligned} \frac{x}{2A} - \frac{y}{2C} &= \frac{\sqrt{y^2 - 4CD}}{2C} - \frac{\sqrt{x^2 - 4AB}}{2A}, \\ -\frac{1}{2} \frac{xy}{AC} &= -\frac{D}{C} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(y^2 - 4CD)}\sqrt{(x^2 - 4AB)}}{C} - \frac{B}{A}, \end{aligned}$$

reordenando

$$2BC + 2AD - xy = -\sqrt{(y^2 - 4CD)}\sqrt{(x^2 - 4AB)}$$

elevando al cuadrado y reordenando

$$4AB y^2 + 4CD x^2 - 4(BC + AD)xy = -4(AD - BC)^2,$$

que es la ecuación de una hipérbola porque el lado derecho es negativo.

---

**EJERCICIO 1.4.16** Una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central dada por

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}.$$

Demuestre que si la órbita es circular y pasa por el centro de fuerzas, entonces  $n = 5$ .

**Solución.** La ecuación de Binet para  $u = 1/r$  es

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2}.$$

Si la partícula describe una circunferencia de radio  $R$  donde está el centro de fuerza, la ecuación puede escribirse

$$r = 2R \cos \theta,$$

o sea

$$u = \frac{1}{2R \cos \theta},$$

derivando

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{2R \cos^2 \theta} \sin \theta, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{2R \cos \theta} + \frac{1}{R \cos^3 \theta} \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2R \cos \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{R \cos^3 \theta} \\ &= -\frac{1}{2R \cos \theta} + \frac{1}{R \cos^3 \theta} \\ &= -u + 8R^2 u^3,\end{aligned}$$

de aquí sigue

$$\begin{aligned}8R^2 u^3 &= -\frac{mF\left(\frac{1}{u}\right)}{l_0^2 u^2}, \\ F\left(\frac{1}{u}\right) &= -\frac{8R^2 l_0^2}{m} u^5, \\ F(r) &= -\frac{8R^2 l_0^2}{m r^5}.\end{aligned}$$

---

EJERCICIO 1.4.17 *Suponga un cometa que describe una órbita parabólica en el mismo plano que la órbita terrestre. Si la menor distancia del cometa al Sol es  $\gamma R_T$  donde  $R_T$  es el radio de la órbita de la Tierra (supuesta circular) y  $\gamma < 1$ , demostrar que el tiempo que el cometa pasa dentro de la órbita terrestre viene dado por*

$$\sqrt{2(1-\gamma)}(1+2\gamma)/3\pi \text{ años}$$

**Solución.** La ecuación de la órbita del cometa será de la forma (una parábola)

$$r = \frac{c}{1 - \cos \theta},$$

pero debe ser

$$r_{\min} = \frac{c}{2} = \gamma R_T,$$

o sea

$$r = \frac{2\gamma R_T}{1 - \cos \theta}.$$

Los puntos  $(\theta_1$  y  $2\pi - \theta_1$ ) donde la órbita del cometa cruza la órbita terrestre están dados por

$$R_T = \frac{2\gamma R_T}{1 - \cos \theta_1},$$

de donde

$$\cos \theta_1 = 1 - 2\gamma.$$

Por otro lado, el elemento de área barrida por el cometa es

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{l_0}{2m} dt,$$

donde

$$\frac{l_0^2}{mk} = 2\gamma R_T,$$

y

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

de modo que

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{l_0}{2m} dt,$$

de aquí sigue

$$dt = \frac{m}{l_0} r^2 d\theta = \frac{l_0^3}{mk^2} \left( \frac{1}{1 - \cos \theta} \right)^2 d\theta,$$

luego el tiempo será

$$t = \frac{l_0^3}{mk^2} \int_{\theta_1}^{2\pi - \theta_1} \left( \frac{1}{1 - \cos \theta} \right)^2 d\theta = \frac{l_0^3}{mk^2} \frac{1}{3} \frac{1 + 3 \tan^2 \frac{1}{2} \theta_1}{\tan^3 \frac{1}{2} \theta_1}$$

El factor que multiplica lo anterior está relacionado con el período terrestre.

En efecto

$$\frac{l_0^2}{mk} = 2\gamma R_T \implies l_0 = \sqrt{mk2\gamma R_T},$$

entonces

$$\frac{l_0^3}{mk^2} = \sqrt{\frac{m2\gamma R_T}{k}} 2\gamma R_T = \sqrt{\frac{2\gamma R_T}{GM_S}} 2\gamma R_T,$$

y el periodo terrestre está dado por

$$T_T = \frac{2\pi R_T}{\sqrt{GM_S}} \sqrt{R_T},$$

luego

$$t = \gamma \sqrt{2\gamma} \frac{T_T}{\pi} \frac{1}{3} \frac{1 + 3 \tan^2 \frac{1}{2} \theta_1}{\tan^3 \frac{1}{2} \theta_1}$$

pero

$$\cos \theta_1 = 1 - 2\gamma, \quad \tan \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_1}{1 + \cos \theta_1}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{2 - 2\gamma}}$$

y reemplazando  $\tan \frac{\theta_1}{2}$  resulta finalmente

$$t = T_T (1 + 2\gamma) \frac{\sqrt{2(1 - \gamma)}}{3\pi}.$$

---

**EJERCICIO 1.4.18** *Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, si además se superpone otra fuerza de magnitud inversamente proporcional al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas. Es decir,*

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

con  $k > 0$ . Demuestre que la trayectoria es una elipse que rota o precesa.

**Solución.** La ecuación de Binet para la órbita será

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2} = \frac{m}{l_0^2 u^2} (ku^2 + \lambda u^3) \\ &= \frac{mk}{l_0^2} + \frac{\lambda m}{l_0^2} u. \end{aligned}$$

De aquí sigue

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + (1 - \frac{\lambda m}{l_0^2}) u = \frac{mk}{l_0^2}$$

cuya solución es

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{(l_0^2 - \lambda m)} + A \cos \sqrt{(1 - \frac{\lambda m}{l_0^2})} \theta,$$

y si  $\frac{\lambda m}{l_0^2} \ll 1$  corresponde a una curva parecida a una elipse pero que no se cierra en una vuelta completa.

---

EJERCICIO 1.4.19 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral dada por  $r = k\theta$ , siendo  $k$  una constante.*

**Solución.** De nuevo, la ecuación de Binet es la clave

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2},$$

siendo

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} = \frac{1}{k\theta}, \\ \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{k\theta^2}, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{2}{k\theta^3} = 2k^2u^3, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2} = 2k^2u^3 + u,$$

despejando

$$\begin{aligned} F(\frac{1}{u}) &= -\frac{l_0^2}{m}(2k^2u^5 + u^3), \\ F(r) &= -\frac{l_0^2}{m}\left(\frac{2k^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right). \end{aligned}$$


---

EJERCICIO 1.4.20 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral logarítmica dada por  $r = Ke^{a\theta}$  siendo  $k$  y  $a$  constantes.*

**Solución.** Es análogo, donde ahora

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} = \frac{1}{K}e^{-a\theta}, \\ \frac{du}{d\theta} &= -\frac{a}{K}e^{-a\theta} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{a^2}{K}e^{-a\theta} = a^2u, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2} = a^2 u + u,$$

despejando

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{u}\right) &= -\frac{l_0^2}{m}(a^2 + 1)u^3, \\ F(r) &= -\frac{l_0^2}{m}(a^2 + 1)\frac{1}{r^3}. \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 1.4.21** Una partícula de masa unidad se desplaza desde el infinito a lo largo de una recta que, de seguir, haría que la partícula pasase a una distancia  $b\sqrt{2}$  de un punto  $P$ . Si la partícula es atraída hacia  $P$  con una fuerza proporcional a  $\frac{k}{r^5}$  y el momento angular respecto de  $P$  es  $\sqrt{k}/b$ , demuestre que la trayectoria está dada por

$$r = b \coth(\theta/\sqrt{2}).$$

**Solución.** La ecuación de Binet será

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2} \\ &= \frac{k u^5}{\frac{k}{b^2} u^2} = b^2 u^3, \end{aligned}$$

o sea

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - b^2 u^3 = 0.$$

O la resolvemos, problema difícil, o comprobamos que

$$u = \frac{1}{b} \tanh(\theta/\sqrt{2}),$$

es solución. Comprobaremos:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{b\sqrt{2}}(1 - \tanh^2(\theta/\sqrt{2})) = \frac{1}{b\sqrt{2}}(1 - b^2 u^2), \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-2bu) \frac{1}{b\sqrt{2}}(1 - b^2 u^2) = u(-1 + b^2 u^2), \end{aligned}$$

que prueba que se trata de una solución. Faltaría probar que la asíntota de la trayectoria pasa a distancia  $b\sqrt{2}$  del origen. Notemos que  $r = \infty \implies u = 0$  o  $\theta \implies 0$  sea la asíntota es una recta paralela al eje  $OX$  (el eje polar). La distancia al origen de esa recta se obtiene haciendo  $\theta \rightarrow 0$  en  $r \sin \theta$  esto es la distancia es

$$d = \lim_{\theta \rightarrow 0} (b \coth \frac{\theta}{\sqrt{2}} \sin \theta) = b\sqrt{2}.$$

---

EJERCICIO 1.4.22 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerzas con una fuerza proporcional a la distancia de la partícula al centro. Demuestre que la trayectoria es una curva plana que puede ser representada por las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x &= A \cos(nt + \alpha), \\ y &= B \sin(nt + \beta) \end{aligned}$$

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas serán

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky, \end{aligned}$$

que tienen soluciones de la forma dada si  $k/m = n^2$ .

---

EJERCICIO 1.4.23 *Determine la fuera central si la órbita es una circunferencia y el centro de fuerza está situado sobre la circunferencia.*

**Solución.** En realidad este problema está repetido. La ecuación de Binet para  $u = 1/r$  es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2}.$$

Si la partícula describe una circunferencia de radio  $R$  donde está el centro de fuerza, la ecuación puede escribirse

$$r = 2R \cos \theta,$$

o sea

$$u = \frac{1}{2R \cos \theta},$$

derivando

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{2R \cos^2 \theta} \sin \theta, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{2R \cos \theta} + \frac{1}{R \cos^3 \theta} \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2R \cos \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{R \cos^3 \theta} \\ &= -\frac{1}{2R \cos \theta} + \frac{1}{R \cos^3 \theta} \\ &= -u + 8R^2 u^3,\end{aligned}$$

de aquí sigue

$$\begin{aligned}8R^2 u^3 &= -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2}, \\ F(\frac{1}{u}) &= -\frac{8R^2 l_0^2}{m} u^5, \\ F(r) &= -\frac{8R^2 l_0^2}{mr^5}.\end{aligned}$$

---

EJERCICIO 1.4.24 Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerza  $0$  por una fuerza de forma  $k/r^2$ . La partícula es lanzada desde un punto  $P$  con una velocidad de magnitud  $V_0$  en un ángulo  $\xi_0$  respecto de  $OP$ . Demuestre que la órbita es una elipse si  $OP \leq 2k/(mV_0^2)$ . Determine además, en términos de  $m, k, V_0, \xi_0$ , y  $OP = r_0$  la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje mayor respecto de  $OP$ .

**Solución.** Evaluamos según las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0}, \\ l_0 &= mr_0 V_0 \sin \xi_0.\end{aligned}$$

La excentricidad es

$$\begin{aligned}e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{mk^2} \\ &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0})l_0^2}{mk^2}.\end{aligned}$$

La órbita será una elipse si  $E < 0$ , es decir si

$$\left(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0}\right) < 0 \implies r_0 < \frac{2k}{mV_0^2}.$$

Si además reemplazamos  $l_0$  se obtiene

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\left(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0}\right)mr_0^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{k^2}}.$$

La ecuación de la órbita es

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)} \\ &= \frac{mr_0^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{k} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}, \end{aligned}$$

y el ángulo  $\alpha$  queda determinado de

$$r_0 = \frac{mr_0^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{k} \frac{1}{1 - e \cos \alpha},$$

que es una ecuación que dejamos planteada por si alguien quiere resolverla.

---

EJERCICIO 1.4.25 *Admitiendo que la tierra es una esfera fija de radio  $R$  y despreciando la resistencia del aire, considere el lanzamiento de un proyectil con rapidez inicial  $V_0$  formando un ángulo  $\xi_0$  con la vertical del lugar. Si*

$$V_e^2 = \frac{2GM}{R},$$

*donde  $G$  es la constante de gravitación,  $M$  la masa terrestre y  $V_0 < V_e$ , demuestre que la excentricidad y la ecuación de la trayectoria del proyectil son:*

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1 - \sin^2(2\beta) \sin^2(\xi_0)}, \\ R/r &= \frac{(1 - e \cos(\theta - \alpha))}{2 \sin^2(\beta) \sin^2(\xi_0)} \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}\sin \beta &= V_0/V_e, \\ \sin \alpha &= \sin^2 \beta \sin(2\xi_0)/e.\end{aligned}$$

Aquí:  $\alpha$  representa la inclinación del semieje mayor,  $\xi_0$  ángulo de lanzamiento respecto a la vertical.

**Solución.** Podemos usar los resultados del problema anterior pero colocando  $k = GMm$  y  $r_0 = R$ . Así tenemos

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{1 + \frac{(mV_0^2 - \frac{2GMm}{R})mR^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{G^2M^2m^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4(V_0^2 - \frac{2GM}{R})R^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{4G^2M^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \sin^2 \xi_0}{V_e^4}} \\ &= \sqrt{1 - 4(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2})\frac{V_0^2}{V_e^2} \sin^2 \xi_0} \\ &= \sqrt{1 - 4(1 - \sin^2 \beta) \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0} \\ e &= \sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0}.\end{aligned}$$

Pura álgebra. Además

$$\begin{aligned}\frac{l_0^2}{mk} &= \frac{2R^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{2GM} \\ &= \frac{2RV_0^2 \sin^2 \xi_0}{V_*^2} \\ &= 2R \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0,\end{aligned}$$

por lo cual la ecuación de la trayectoria será

$$r = \frac{2R \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}$$

Aquí  $\alpha$  representa la inclinación del semi eje mayor de la cónica.

Para  $\theta = 0$ ,  $r = R$

$$1 = \frac{2 \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0}{1 - e \cos \alpha} \implies$$

$$1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0 = e \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0}}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \frac{(1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0)^2}{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0} \\ &= \frac{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0 - (1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0)^2}{e^2} \end{aligned}$$

bastante álgebra  $\dots \implies$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4 \sin^4 \beta \sin^2 \xi_0 \cos^2 \xi_0}{e^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin^2 \beta \sin 2\xi_0}{e}.$$

---

EJERCICIO 1.4.26 Con respecto al problema anterior,  $V_0 < V_e/\sqrt{2}$  demuestre que el ángulo de disparo para tener un alcance máximo está dado por:

$$\sin \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (V_0/V_e)^2}},$$

y el ángulo para la altura máxima por

$$\sin(\alpha) = \frac{(V_0/V_e)^2}{1 - (V_0/V_e)^2}.$$

¿ Qué ocurre si  $V_0 \geq V_e/\sqrt{2}$  ?

**Solución.** Debemos maximizar

$$\sin \alpha = \frac{\sin^2 \beta \sin 2\xi_0}{e},$$

respecto a  $\xi_0$  siendo

$$e = \sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0}.$$

Derivamos

$$\frac{d}{d\xi_0} \frac{\sin 2\xi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0}} = 0,$$

---

es bastante trabajo, pero resulta

$$\sin \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \beta} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - V_0^2/V_e^2}}.$$

El máximo resultará al reemplazar en

$$\sin \alpha = \frac{\sin^2 \beta \sin 2\xi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0}},$$

con más algebra resulta

$$\sin \alpha = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{V_0^2/V_e^2}{1 - V_0^2/V_e^2}$$

**EJERCICIO 1.4.27** *Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez se reduce a la mitad, determine en términos de  $R_0$  y  $V_0$ : la ecuación de la nueva órbita, su excentricidad y la distancia mínima de la partícula al centro durante el movimiento siguiente.*

**Solución.** Para la órbita circular

$$m \frac{v_0^2}{R_0} = \frac{k}{R_0^2},$$

entonces

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}}$$

que reducida a la mitad implica

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \frac{1}{4} \frac{k}{mR_0} - \frac{k}{R_0} \\ &= -\frac{7}{8} \frac{k}{R_0} \\ l_0 &= mR_0 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{mR_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{mR_0 k}, \end{aligned}$$

luego

$$e^2 = 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{k}{R_0})\frac{1}{4}mR_0k}{mk^2} = \frac{9}{16} \implies e = \frac{3}{4},$$

y

$$\frac{l_0^2}{mK} = \frac{\frac{1}{4}mR_0k}{mk} = \frac{1}{4}R_0,$$

luego la nueva órbita es (tomando  $\alpha = 0$ )

$$r = \frac{1}{4}R_0 \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos\theta} = \frac{R_0}{4 - 3\cos\theta}.$$

---

EJERCICIO 1.4.28 Una partícula de masa  $m = 1$  es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo  $O$  y se mueve describiendo la elipse:

$$r = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}.$$

Si en el punto más alejado de su trayectoria, la rapidez de la partícula es  $V = 1$ , determine la constante de la ley de fuerza. Si en el punto más alejado, la rapidez de la partícula es duplicada, determine la ecuación de la nueva órbita.

**Solución.** Aquí como  $m = 1$

$$\frac{l_0^2}{k} = 100,$$

el punto más alejado es

$$r_{\text{máx}} = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = 200,$$

luego

$$\begin{aligned} l_0 &= |m\vec{r} \times \vec{v}| = 200 \implies \\ k &= \frac{(l_0)^2}{100} = \frac{200^2}{100} = 400. \end{aligned}$$

Si en el punto más alejado la rapidez se hace  $V = 2$ , calculamos

$$\begin{aligned} l_0 &= |m\vec{r} \times \vec{v}| = 200 \times 2 = 400, \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}4 - \frac{400}{200} = 0 \rightarrow \\ e &= 1, \\ \frac{l_0^2}{mk} &= \frac{(400)^2}{400} = 400, \end{aligned}$$

de modo que la nueva órbita es

$$r = \frac{400}{1 - \cos(\theta - \alpha)},$$

una parábola. Para determinar el ángulo  $\alpha$  consideramos que en  $\theta = 0$ ,  $r = 200$  de modo que

$$200 = \frac{400}{1 - \cos(\alpha)}$$

de donde  $\alpha = \pi$  y finalmente

$$r = \frac{400}{1 + \cos(\theta)}.$$

---

**EJERCICIO 1.4.29** Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R_0$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez de la partícula se aumenta a  $V = \sqrt{\alpha}V_0$  siendo  $\alpha > 1$ , demuestre que si  $\alpha \geq 2$  la partícula se aleja hasta el infinito. En cambio si  $\alpha < 2$ , determine la ecuación de la nueva órbita en términos de  $R_0$ ,  $V_0$  y  $\alpha$ .

**Solución.** Tenemos para la órbita circular

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

la nueva rapidez

$$V = \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha \frac{k}{R_0} - \frac{k}{R_0},$$

$$l_0 = mR_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}}.$$

La excentricidad es

$$e^2 = 1 + \frac{2(\frac{1}{2}\alpha \frac{k}{R_0} - \frac{k}{R_0})(mR_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}})^2}{mk^2} = (\alpha - 1)^2.$$

Entonces

$$e = \alpha - 1,$$

que es una parábola o hipérbola si  $\alpha \geq 2$ . Si  $\alpha < 2$  resultará

$$r = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - (\alpha - 1) \cos \theta}$$

$$= \frac{R_0\alpha}{1 - (\alpha - 1) \cos \theta}.$$

---

**EJERCICIO 1.4.30** *Determine las posibles leyes de fuerza central si una partícula describe bajo su acción una circunferencia, con el centro de fuerzas en el interior del círculo.*

**Solución.** Si el origen está sobre un diámetro a distancia  $d$  del centro, la ecuación de la circunferencia será (teorema del coseno)

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta,$$

de

$$0 = r \frac{dr}{d\theta} + dr \sin \theta - d \cos \theta \frac{dr}{d\theta},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr \sin \theta}{d \cos \theta - r},$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{dr \sin \theta}{d \cos \theta - r}$$

$$r = d \cos \theta + \sqrt{(d^2 \cos^2 \theta + R^2 - d^2)},$$

de aquí

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{d \cos \theta + \sqrt{(d^2 \cos^2 \theta + R^2 - d^2)}}$$

Lo dejaremos hasta aquí, por ser demasiada el álgebra necesaria. Calcule

$$\frac{du}{d\theta}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2},$$

expresélas en términos de  $u$  y reemplace en la ecuación de Binet.

---

**EJERCICIO 1.4.31** *Considere una partícula que se mueve en un campo central atractivo  $k/r^2$  con  $k < 0$ . Demuestre que para un momentum angular dado, la mínima energía que puede tener la partícula es:*

$$E = -\frac{mk^2}{2l_0^2}.$$

**Solución.** *Sabemos que la energía es*

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r},$$

y

$$l_0 = mr^2\dot{\theta},$$

de modo que la energía puede escribirse

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{k}{r},$$

a la distancia  $r_1$  donde  $r$  es mínimo  $\dot{r} = 0$  y entonces

$$E = \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr_1^2} - \frac{k}{r_1},$$

función que tiene un mínimo donde

$$-\frac{l_0^2}{mr_1^3} + \frac{k}{r_1^2} = 0 \implies r_1 = \frac{l_0^2}{mk},$$

y luego

$$E_{\min} = \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{m} \frac{m^2k^2}{l_0^4} - k \frac{mk}{l_0^2} = -\frac{mk^2}{2l_0^2}.$$

---

EJERCICIO 1.4.32 *Un cohete de masa  $m$  es disparado desde un punto de la superficie de la tierra con una rapidez inicial  $V_0$  haciendo un ángulo  $\xi_0$  con la vertical del lugar. Despreciando la rotación terrestre, la resistencia del aire y el movimiento de la tierra, demuestre que la excentricidad de la trayectoria está dada por:*

$$e^2 = 1 + \frac{R^2 V_0^2 \sin^2 \xi_0}{G^2 M^2} \left( V_0^2 - \frac{2GM}{R} \right),$$

y la trayectoria es:

$$r = \frac{R^2 V_0^2 \sin^2 \xi_0}{GM(1 - e \cos(\theta - \alpha))}.$$

Aquí  $R$  es el radio terrestre,  $M$  la masa de la tierra y  $G$  la constante de gravitación. ¿Cuál es la ubicación del eje polar?

**Solución.** Tenemos que

$$\begin{aligned} l_0 &= mV_0 R \sin \xi_0, \\ E &= \frac{1}{2} mV_0^2 - \frac{GMm}{R}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{(mV_0^2 - \frac{2GMm}{R})m^2 V_0^2 R^2 \sin^2 \xi_0}{mG^2 M^2 m^2} \\ &= 1 + \frac{V_0^2 R^2 \sin^2 \xi_0}{G^2 M^2} \left( V_0^2 - \frac{2GM}{R} \right). \end{aligned}$$

Además

$$\frac{l_0^2}{mK} = \frac{m^2 V_0^2 R^2 \sin^2 \xi_0}{GMm^2} = \frac{R^2 V_0^2 \sin^2 \xi_0}{GM},$$

que prueban lo solicitado.

---

EJERCICIO 1.4.33 *Respecto al problema anterior, suponga que  $V_0 = \sqrt{GM/R}$  y  $\xi_0 = 30^\circ$ . Demuestre entonces que el proyectil caerá de regreso a la tierra en un punto situado a una distancia  $R\pi/3$  del punto de partida, medida sobre la superficie de la tierra. Demuestre además que la altura máxima del proyectil sobre la superficie terrestre es de alrededor de  $0,866 R$ .*

**Solución.** Particularizamos a  $V_0 = \sqrt{GM/R}$  y  $\xi_0 = 30^\circ$  resultando

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 - \frac{R^2 \sin^2 \frac{\pi}{6}}{G^2 M^2} \left( \frac{G^2 M^2}{R^2} \right), \\ &= 1 - \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}, \\ \frac{l_0^2}{mK} &= R \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{R}{4}, \end{aligned}$$

luego

$$r = \frac{R}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos(\theta - \alpha)},$$

en  $\theta = 0$ ,  $r = R$  luego

$$R = \frac{R}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos(\alpha)} \Rightarrow \alpha = 30^\circ,$$

evidentemente el proyectil caerá de nuevo a la Tierra en  $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$  y eso corresponde a un arco  $R\frac{\pi}{3}$ . Además el máximo  $r$  será

$$r = \frac{R}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = 1.86603R,$$

y eso corresponde a una altura máxima de  $1.86603R - R = 0,86603R$

---

EJERCICIO 1.4.34 Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R_0$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la velocidad se reduce a la mitad, determine en términos de  $R_0$  y  $V_0$  la ecuación de la nueva órbita.

**Solución.** Sabemos que

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

luego

$$k = mR_0V_0^2,$$

la nueva energía será

$$E = \frac{1}{2}m\frac{1}{4}V_0^2 - \frac{mR_0V_0^2}{R_0} = -\frac{7}{8}mV_0^2,$$

el nuevo momentum angular

$$l_0 = mR_0\frac{V_0}{2},$$

luego

$$e^2 = 1 + \frac{-\frac{7}{4}mV_0^2m^2R_0^2\frac{V_0^2}{4}}{m(m^2R_0^2V_0^4)} = \frac{9}{16},$$

luego

$$\begin{aligned} r &= \frac{(mR_0\frac{V_0}{2})^2}{m^2R_0V_0^2} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}R_0}{1 - \frac{3}{4}\cos\theta}. \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 1.4.35** *Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre  $M$ , la constante de gravitación  $G$ ,  $\Omega$  la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente aumentada al doble.*

**Solución.** Si  $\Omega$  denota la velocidad angular terrestre entonces órbita geo estacionaria significa

$$v_0 = \Omega r_0$$

además de (problema anterior)

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

con estas se puede obtener:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{\Omega} \sqrt[3]{(GM\Omega)}, \\ v_0 &= \sqrt[3]{(GM\Omega)}. \end{aligned}$$

Sea por un momento  $v_0 = 2\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$  la velocidad inicial. Entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m4\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= G\frac{Mm}{r_0} \end{aligned}$$

$$l_0 = mr_0 2\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2G\frac{Mm}{r_0}4m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} = 9$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{4m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mGMm} \frac{1}{1 - 3\cos(\theta - \alpha)} \\ &= \frac{4r_0}{1 - 3\cos(\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

Si el ángulo polar se mide desde donde cambió la velocidad entonces debe ser  $\alpha = \pi$  y finalmente

$$\begin{aligned} r &= \frac{4r_0}{1 + 3\cos\theta} \\ &= \frac{4}{\Omega} \sqrt[3]{(GM\Omega)} \frac{1}{1 + 3\cos\theta} \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 1.4.36** *Un satélite de masa  $m$  está en órbita circular de radio  $2R$  en torno a la tierra supuesta esférica, de masa  $M$  y radio  $R$ , en reposo y sin atmósfera. Si la velocidad se altera en un punto de la órbita en un factor  $f$ , determine: a) la ecuación de la nueva órbita. b) el rango de valores de  $f$  para los cuales el satélite chocará con la tierra. c) el rango de valores de  $f$  para los cuales el satélite se aleja indefinidamente.*

**Solución.** Para la órbita circular

$$v = \sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la nueva rapidez es

$$v = f\sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la nueva energía es

$$E = \frac{1}{2}mf^2\frac{GM}{2R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{4}GMm\frac{f^2 - 2}{R},$$

el nuevo momentum angular es

$$l_0 = m(2R)f\sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la excentricidad será dada por

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{m(GMm)^2} = (f^2 - 1)^2,$$

de donde

$$e = |f^2 - 1|.$$

además

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{(m(2R)f\sqrt{\frac{GM}{2R}})^2}{mGMm} = 2Rf^2,$$

de manera que la nueva órbita es

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - |f^2 - 1| \cos(\theta - \alpha)}.$$

Si el cambio de la rapidez ocurre en  $\theta = 0$  debe ser

$$2R = \frac{2Rf^2}{1 - |f^2 - 1| \cos(\alpha)},$$

de donde

$$\begin{aligned} 1 - |f^2 - 1| \cos(\alpha) &= f^2, \\ \cos \alpha &= \frac{1 - f^2}{|1 - f^2|}. \end{aligned}$$

Si  $f < 1 \implies \cos \alpha = 1$  entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2) \cos \theta}.$$

Si  $f > 1 \implies \cos \alpha = -1$  entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1 + (f^2 - 1) \cos \theta}.$$

El satélite puede chocar con la Tierra sólo si  $f < 1$  y para saberlo hay que ver si la ecuación

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2) \cos \theta} = R,$$

tiene o no solución. Esta es

$$2f^2 = 1 - (1 - f^2) \cos \theta,$$

despejando

$$\cos \theta = \frac{1 - 2f^2}{1 - f^2} > -1,$$

debe ser

$$1 - 2f^2 > f^2 - 1$$

de donde

$$f < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Para este caso, el satélite chocará con la Tierra. Por último, el satélite no regresa si  $e = |f^2 - 1| > 1$  o sea si  $f > \sqrt{2}$ .

---

**EJERCICIO 1.4.37** *Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre  $M$ , la constante de gravitación  $G$ ,  $\Omega$  la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente reducida a la mitad.*

**Solución.** Tenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= -\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0} \\ l_0 &= mr_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r_0}} \end{aligned}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0})\frac{1}{4}m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} = \frac{9}{16}$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{m^2r_0^2\frac{1}{4}\frac{GM}{r_0}}{mGMm} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos(\theta - \alpha)} \\ &= \frac{1}{4}r_0 \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos(\theta - \alpha)} \\ &= \frac{1}{\Omega} \sqrt[3]{(GM\Omega)} \frac{1}{4 - 3\cos\theta} \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 1.4.38** Considere la tierra como esférica, en reposo de masa  $M$  y radio  $R$ , sin atmósfera. Se lanza un proyectil con rapidez inicial  $V_0$  formando un ángulo  $\beta$  respecto a la horizontal. Determine el arco que el proyectil recorre hasta llegar al suelo (si lo hace). Discuta las condiciones bajo las cuales el proyectil cae nuevamente al suelo. La constante de gravitación es  $G$ .

**Solución.** La energía es

$$E = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R},$$

el momentum angular es

$$l_0 = mRV_0 \cos\beta,$$

la excentricidad será

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R})m^2R^2V_0^2 \cos^2\beta}{m(GMm)^2} \\ &= 1 + \frac{(V_0^2 - \frac{2GM}{R})R^2V_0^2 \cos^2\beta}{(GM)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{m^2 R^2 V_0^2 \cos^2 \beta}{mGMm} = \frac{R^2 V_0^2 \cos^2 \beta}{GM},$$

de modo que la trayectoria es

$$r = \frac{R^2 V_0^2 \cos^2 \beta}{GM} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}.$$

Para la notación, introducimos la velocidad de escape

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

de manera que

$$e^2 = 1 - \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^4},$$

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2},$$

de modo que la trayectoria es

$$r = \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}.$$

Si  $r(0) = R$  hay necesariamente dos puntos donde la trayectoria intersecta a la superficie de la Tierra. Esos ángulos son  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\alpha$ , además de  $e < 1$ . Entonces

$$R = \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2} \frac{1}{1 - e \cos \alpha},$$

$$R = \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2} \frac{1}{1 - e \cos(\theta_1 - \alpha)},$$

de donde se deduce que

$$\theta_1 - \alpha = \alpha \implies \theta_1 = 2\alpha,$$

y de cualquiera de las anteriores

$$1 - e \cos \alpha = \frac{2V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2},$$

o sea

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2}}{e} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2}}{\sqrt{1 - \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^4}}}\end{aligned}$$

Esta expresión la hemos visto de diversas forma en otros problemas. Si

$$z = V_0^2/V_e^2$$

entonces

$$\cos \alpha = \frac{1 - 2z \cos^2 \beta}{\sqrt{1 - 4(1 - z)z \cos^2 \beta}},$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{1 - 2z \cos^2 \beta}{\sqrt{(1 - 2z \cos^2 \beta)^2 + z^2 \sin^2 2\beta}} \\ &= \frac{1 - 2z \cos^2 \beta}{|1 - 2z \cos^2 \beta|} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2 \sin^2 2\beta}{(1 - 2z \cos^2 \beta)^2}}}\end{aligned}$$

Hay dos casos

a) Si  $1 - 2z \cos^2 \beta > 0$ , o sea

$$z < \frac{1}{2 \cos^2 \beta},$$

ángulos de disparo grandes, entonces

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2 \sin^2 2\beta}{(1 - 2z \cos^2 \beta)^2}}}.$$

b) Si  $1 - 2z \cos^2 \beta < 0$ , o sea

$$1 > z > \frac{1}{2 \cos^2 \beta}$$

ángulos de disparo pequeños, entonces

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2 \sin^2 2\beta}{(1-2z \cos^2 \beta)^2}}}.$$

Note que si  $1 - 2z \cos^2 \beta = 0$

$$\cos \alpha = 0,$$

esto es el semieje mayor está a  $90^\circ$  del punto de lanzamiento, y el proyectil cae diametralmente opuesto por la Tierra al punto de lanzamiento.



### 1.4.3. Sistemas de masa variable

**EJERCICIO 1.4.39** Una cadena de longitud  $L$  y masa total  $M$  se suspende verticalmente de modo que su extremo inferior está justo a nivel del suelo. Si la cadena se suelta, determine la reacción del suelo, mientras la cadena se deposita cayendo por su propio peso.

**Solución.** Tenemos para el eje  $Y$  vertical

$$F_y = m \frac{dv}{dt} - (u - v) \frac{dm}{dt}.$$

Si tomamos el montón depositado como sistema, entonces los eslabones que se incorporan tienen una velocidad

$$u = -gt,$$

la masa  $m(t)$  después de transcurrido un tiempo  $t$  será

$$m = \frac{M}{L} \frac{1}{2} gt^2,$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{M}{L} gt,$$

y entonces, dado que  $v = 0$  (trozo amontonado está en reposo)

$$N - mg = -u \frac{dm}{dt}$$

luego

$$\begin{aligned} N &= \frac{M}{L} \frac{1}{2} g^2 t^2 + \frac{M}{L} g^2 t^2 \\ &= \frac{3M}{2L} g^2 t^2. \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 1.4.40** Una cadena de longitud  $L$  y masa total  $M$  está amontonada sobre el suelo. Si la cadena se levanta de un extremo aplicando una fuerza constante  $F$  hacia arriba, determine la altura que sube la cadena en función del tiempo. Discuta sobre la altura máxima que alcanza la cadena, supuestamente muy larga de tal modo que siempre queda cadena depositada.

**Solución.** La densidad lineal de masa de la cadena es

$$\lambda = \frac{M}{L}.$$

Sea  $y$  el trozo levantado en tiempo  $t$ . Tenemos

$$F - mg = m \frac{dv}{dt} - (u - v) \frac{dm}{dt},$$

siendo  $u = 0$ ,  $m = \lambda y$ , de manera que

$$\begin{aligned} F - mg &= \frac{dmv}{dt} \\ F - \lambda yg &= \frac{d}{dt}(\lambda y \dot{y}). \end{aligned}$$

Para integrar, multiplique por  $y dy$ , resultando

$$F y dy - \lambda y^2 g dy = \lambda y \dot{y} d(y \dot{y}) = \lambda d\left(\frac{1}{2} y^2 \dot{y}^2\right),$$

que al ser integrada da

$$F \frac{y^2}{2} - \frac{\lambda g y^3}{3} = \frac{1}{2} \lambda y^2 \dot{y}^2,$$

simplificando

$$F - \frac{2\lambda g y}{3} = \lambda \dot{y}^2,$$

o bien

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gy}{3}}$$

y finalmente

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gy}{3}}} = \frac{3\sqrt{\frac{F}{\lambda}} - \sqrt{3}\sqrt{\frac{3F-2gy\lambda}{\lambda}}}{g}$$

de donde se despeja

$$\begin{aligned} y &= \frac{6\sqrt{(\lambda F)} - \lambda g t}{6\lambda} t \\ &= \left( \sqrt{\frac{F}{\lambda}} - \frac{gt}{6} \right) t. \end{aligned}$$

La altura máxima corresponde a  $\dot{y} = 0$  lo que da

$$y_{\text{máx}} = \frac{3F}{2g\lambda}.$$

---

NOTA 1.1 Usted puede extrañarse que el peso máximo levantado es mayor que la fuerza aplicada y además que  $\dot{y}(0) = \sqrt{F/\lambda}$  a pesar que la cadena partió del reposo. Hay una singularidad pues en el instante inicial, una fuerza finita  $F$  es aplicada a un elemento infinitésimo de masa y ello provoca un cambio repentino de velocidad. Además por la inercia, la cadena sobrepasa la posición de equilibrio.

**EJERCICIO 1.4.41** *Una gota esférica de agua atraviesa una capa de nube en reposo. Suponiendo que se condensa agua por unidad de tiempo sobre la gota, proporcionalmente a su superficie con constante de proporcionalidad  $K$  conocida, determine como crece el radio de la gota con el tiempo y como varía la altura de ella a medida que transcurre el tiempo.*

**Solución.** Sea  $R$  el radio de la gota,  $S$  su superficie,  $m$  su masa. Tenemos

$$\frac{dm}{dt} = KS.$$

Si  $\rho$  es la densidad podemos calcular la masa

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \rho = K4\pi R^2,$$

entonces

$$\frac{dR}{dt} = \frac{K}{\rho},$$

si el radio inicial  $R_0$  es despreciable, entonces

$$R(t) = \frac{Kt}{\rho}.$$

La ecuación de movimiento de la gota que cae, con  $u = 0$ , será

$$-mg = m \frac{dv}{dt} - (u - v) \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(mv),$$

donde la masa es conocida pues

$$m(t) = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{Kt}{\rho}\right)^3 \rho = \frac{4}{3}\pi \frac{K^3 t^3}{\rho^2},$$

de manera que se puede integrar

$$mv = - \int_0^t \frac{4}{3}\pi \frac{K^3 t^3}{\rho^2} g dt = -\frac{1}{3}\pi \frac{K^3}{\rho^2} g t^4,$$

de donde se obtiene

$$v = -\frac{1}{4}gt.$$

Así resulta finalmente

$$y = y(0) - \frac{1}{8}gt^2.$$

---

**EJERCICIO 1.4.42** *Un carrito, inicialmente de masa  $M$  y en reposo sobre un plano horizontal liso, comienza a moverse debido a que es impulsado por un chorro continuo de masa que se le va incorporando. Dichas masas salen desde el punto de partida (como de una ametralladora) con rapidez  $U_0$  y a razón de  $\lambda$  unidades de masa por unidad de tiempo y se incrustan en el carrito cuando lo impactan. Determine la forma en que varían la aceleración, la velocidad y la posición del móvil con el tiempo.*

**Solución.** Supongamos que el carrito partió del origen con rapidez nula y sea  $x$  lo que recorre. La masa del carrito está dada por

$$\begin{aligned} m &= M + \frac{\lambda t}{U_0 t} (U_0 t - x) \\ &= M + \frac{\lambda}{U_0} (U_0 t - x). \end{aligned}$$

(El chorro de masa tiene una masa total  $\lambda t$  y tendría una longitud  $U_0 t$ , pero todo lo que exceda  $x$  se ha incrustado).

La ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} 0 &= m \frac{dv}{dt} - (U_0 - v) \frac{dm}{dt} \\ &= \left( M + \frac{\lambda}{U_0} (U_0 t - x) \right) \frac{dv}{dt} - (U_0 - v) \frac{\lambda}{U_0} (U_0 - v). \end{aligned}$$

Preferible dejar una ecuación para la masa porque

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{\lambda}{U_0} (U_0 - v) \\ \ddot{m} &= -\frac{\lambda}{U_0} \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 0 &= -m \frac{U_0}{\lambda} \ddot{m} - \frac{U_0}{\lambda} \dot{m}^2, \\ m \ddot{m} + \dot{m}^2 &= 0, \end{aligned}$$

ecuación que es fácil integrar

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dm} \frac{1}{2} \dot{m}^2 &= -\dot{m}^2 \implies \\ \frac{d\dot{m}^2}{\dot{m}^2} &= -2 \frac{dm}{m}, \end{aligned}$$

de donde

$$\ln \frac{\dot{m}^2}{\lambda^2} = -2 \ln \frac{m}{M}$$

o sea

$$\begin{aligned}\frac{\dot{m}}{\lambda} &= \frac{M}{m}, \\ m dm &= \lambda dt, \\ m^2 - M^2 &= 2\lambda t\end{aligned}$$

y luego

$$m = M + \frac{\lambda}{U_0}(U_0 t - x) = \sqrt{M^2 + 2\lambda t},$$

y así

$$\begin{aligned}x &= U_0 \frac{M + \lambda t - \sqrt{(M^2 + 2\lambda t)}}{\lambda}, \\ v &= \frac{dx}{dt} = U_0 \frac{\sqrt{(M^2 + 2\lambda t)} - 1}{\sqrt{(M^2 + 2\lambda t)}}.\end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 1.4.43** *Un cohete de masa total  $M$ , de la cual  $fM$ , con  $f$  menor que uno, es de combustible, descansa verticalmente antes de encender los motores. Si se encienden los motores, que arrojan masa a razón constante  $\sigma$  ( $\sigma = -dm/dt$ ) con rapidez relativa al cohete de magnitud  $U_0$ , establezca la condición que debe cumplirse para que el cohete comience a despegar de inmediato. Para este caso, determine la máxima altura que alcanza, suponiendo aceleración de gravedad constante y despreciando el roce con el aire.*

**Solución.** Tenemos

$$m(t) = M - \sigma t.$$

Si el cohete no ha despegado, existe una reacción normal en el suelo y además la velocidad es nula. Entonces

$$\begin{aligned}N - mg &= -(u - v) \frac{dm}{dt} \\ &= -(-U_0)(-\sigma)\end{aligned}$$

o sea

$$N = mg - U_0\sigma.$$

Si queremos que el cohete despegue en  $t = 0$ , debe ser  $N = 0$  en ese instante lo que lleva a

$$U_0\sigma = Mg.$$

Si se cumple, entonces el cohete acelera siendo ahora

$$-mg = m\frac{dv}{dt} - (-U_0)(-\sigma),$$

o sea

$$m\frac{dv}{dt} = Mg - mg,$$

con  $m = M - \sigma t$  de lo cual

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Mg}{M - \sigma t} - g,$$

que puede integrarse

$$v(t) = \int_0^t \frac{Mg}{M - \sigma t} dt - gt = \frac{Mg}{\sigma} \ln \frac{M}{M - \sigma t} - gt,$$

siendo esto válido hasta

$$t = \frac{fM}{\sigma},$$

para ese tiempo

$$v = gM \frac{f - \ln(1 - f)}{\sigma}.$$

Después sigue con la aceleración de gravedad y se deja para el lector su continuación.



**EJERCICIO 1.4.44** *Una cadena de largo total  $M$  y longitud  $L$ , flexible, es sostenida colgando de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo. Si el extremo superior de la cadena se suelta, determine la reacción del suelo contra la parte depositada, en función del tiempo.*

**Solución.** Sea  $y$  la distancia recorrida por el extremo superior y el sistema de mas variable es el montón depositado. Como eslabones van en caída libre

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}gt^2, \\u &= -gt, \\m &= \frac{1}{2}gt^2 \frac{M}{L}, \\ \frac{dm}{dt} &= gt \frac{M}{L}\end{aligned}$$

luego, si  $R$  es la reacción

$$R - mg = m \frac{dv}{dt} - (u - v) \frac{dm}{dt}, \quad v = 0, \implies$$

$$\begin{aligned}R &= mg - u \frac{dm}{dt} \\ &= \frac{1}{2}g^2t^2 \frac{M}{L} + g^2t^2 \frac{M}{L} = \frac{3}{2} \frac{M}{L} g^2t^2.\end{aligned}$$

---

EJERCICIO 1.4.45 *Una cadena flexible tiene masa total  $M$  y longitud  $L$ . La cadena está inicialmente amontonada en el suelo. Una cuerda se hace pasar sobre una polea lisa, uno de los extremos unido a un extremo de la cadena y el otro extremo de la cuerda a un partícula de masa  $M$ . Si la partícula se suelta partiendo del reposo*

- a) *escriba la ecuación de movimiento para el extremo de la cadena.*
- b) *determine la rapidez del extremo de la cadena en función de su posición.*

**Solución.** Sea  $y$  la longitud levantada por la tensión  $T$  producida por la partícula. Tenemos que

$$\begin{aligned}m &= \frac{M}{L}y, \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{M}{L}\dot{y}, \\ u &= 0,\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} T - mg &= m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}, \\ Mg - T &= M \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

sumando las dos

$$\begin{aligned} Mg - mg &= (M + m) \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}, \\ Mg - \frac{M}{L} yg &= (M + \frac{M}{L} y) \frac{dv}{dt} + \frac{M}{L} \dot{y}^2, \end{aligned}$$

o sea la ecuación de movimiento es

$$gL - gy = (L + y)\ddot{y} + \dot{y}^2.$$

Para integrarla hay que hacer algún truco. Como usted sabe

$$\ddot{y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \dot{y}^2,$$

entonces multiplique por  $L + y$

$$g(L^2 - y^2) = (L + y)^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \dot{y}^2 + (L + y) \dot{y}^2,$$

que es la derivada de un producto

$$g(L^2 - y^2) = \frac{d}{dy} (L + y)^2 \frac{1}{2} \dot{y}^2,$$

como inicialmente  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$  integramos

$$(L + y)^2 \frac{1}{2} \dot{y}^2 = g(L^2 y - \frac{y^3}{3})$$

y finalmente

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2g(L^2 y - \frac{y^3}{3})}{(L + y)^2}}.$$



# Rotaciones

## 2.1. Rotaciones de un sistema

Se estudiarán las rotaciones de un sistema. El sistema a rotar puede ser el objeto físico, lo que se denomina punto de vista activo, o el sistema de coordenadas, punto de vista pasivo. Ambos puntos de vista difieren simplemente en el sentido de la rotación.

### 2.1.1. Rotaciones de un sistema de coordenadas

Entre los cambios de posición o desplazamientos que puede experimentar un sistema de coordenadas, o un cuerpo rígido, son importantes los casos particulares conocidos como *traslaciones paralelas y rotaciones*. En una traslación, todas las posiciones cambian en un mismo vector desplazamiento  $\vec{T}$  de modo que

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{T}. \quad (2.1)$$

Por otro lado, una rotación, mantiene inalterada las posiciones de todos los puntos pertenecientes al llamado eje de la rotación. Al respecto, cabe destacar el siguiente teorema debido a *Euler*:

► **TEOREMA 2.1**

*Todo cambio de posición de un sistema que mantiene un punto fijo, puede ser logrado en forma equivalente mediante una rotación.*

Un enunciado equivalente es:

## ► TEOREMA 2.2

Al cambiar de posición un cuerpo rígido (infinitamente extenso) manteniendo fijo uno de sus puntos, existe otro punto del cuerpo que recobra su posición original.

Una demostración simple de este teorema se encuentra en el libro de *Mecánica de Synge y Griffith*. [6]

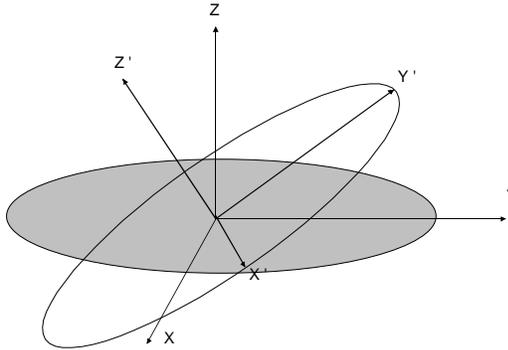


Figura 2.1: Rotación de un sistema

Consideremos un sistema cartesiano de ejes  $x_i$  ( $o x, y, z$ ) con vectores unitarios ortogonales  $\hat{e}_i$  y otro con el mismo origen (el punto que no ha cambiado de posición) de ejes  $x'_i$  ( $o x', y', z'$ ) con vectores unitarios ortogonales  $\hat{e}'_i$ . El índice  $i$  variará entre 1 y 3, ver figura (2.1). Debido al teorema de *Euler*, existe una rotación equivalente al cambio de posición del sistema original al nuevo sistema.

### Cosenos directores

Los cosenos directores de las direcciones  $\hat{e}'_i$ , se definen como sus proyecciones sobre los vectores unitarios originales  $\hat{e}_i$  y se denotarán por  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), así

$$\hat{e}'_1 = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3,$$

$$\hat{e}'_2 = \beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3,$$

$$\hat{e}'_3 = \gamma_1 \hat{e}_1 + \gamma_2 \hat{e}_2 + \gamma_3 \hat{e}_3,$$

o, en notación matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}.$$

De los nueve cosenos directores hay solo 3 independientes porque la ortogonalidad entre los vectores unitarios conduce a seis relaciones entre ellos. Explícitamente, dichas relaciones son, escritas matricialmente

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

que además pueden escribirse

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \delta_{ij},$$

siendo  $\delta_{ij}$  el delta de Kronecker. Preferiremos usar la notación

$$a_{1i} = \alpha_i, \quad a_{2i} = \beta_i, \quad a_{3i} = \gamma_i,$$

o sea

$$a_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j,$$

de manera que la relación (2.2) puede escribirse

$$AA^T = I, \quad \text{con } A = \{a_{ij}\}. \quad (2.3)$$

La matriz  $A$  llamada la matriz de rotación, por la propiedad anterior, es una matriz ortogonal.

### Rotación pasiva de un vector

Aquí se consideran las rotaciones desde un punto de vista pasivo, es decir se rota el sistema de coordenadas, y en consecuencia el vector permanece inalterado pero se modifican sus componentes, es decir

$$\vec{r} = \sum_i x_i \hat{e}_i = \sum_i x'_i \hat{e}'_i,$$

de donde, por la ortogonalidad de los vectores unitarios, se puede obtener

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j.$$

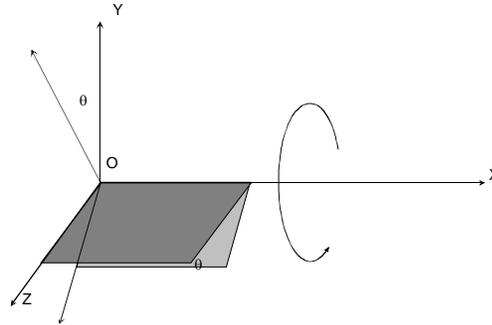


Figura 2.2: Rotación en torno de un eje

### Rotación activa de un vector

Aquí se consideran las rotaciones desde un punto de vista activo, es decir se rota el vector permaneciendo inalterado el sistema de referencia. Esencialmente se tiene el mismo resultado, pero ahora

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \sum x_i \hat{e}_i, \\ \vec{r}' &= \sum x'_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Note que se modifican las componentes pero se mantienen los mismos vectores unitarios. La idea es que el vector rotado tiene sus componentes en el sistema original, iguales a las del vector original en un sistema rotado en sentido contrario. De modo que

$$x'_i = \sum_j a_{ji} x_j,$$

donde se ha considerado que  $R^{-1} = R^T$ .

### Rotación en torno de los ejes cartesianos

Una rotación del sistema en torno de los ejes cartesianos, en sentidos contrario a los punteros de un reloj, mirando hacia el eje, ver figura (2.2) es

realizada por las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 R_x(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \\
 &\quad (1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Similarmente se encuentran

$$\begin{aligned}
 R_y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 R_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### Rotación de un vector en un ángulo $\phi$ respecto a un eje especificado por $\hat{n}$

Considere una rotación activa de un vector  $\vec{r}$  en torno de un eje  $\hat{n}$  en un ángulo  $\phi$  en el sentido de avance de  $\hat{n}$ . (Esto equivale a una rotación pasiva con un ángulo de  $-\phi$ .) De la figura (2.3) es posible demostrar que el vector rotado  $\vec{r}'$  puede escribirse

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\sin \phi) \hat{n} \times \vec{r} + (1 - \cos \phi) \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}). \quad (2.4)$$

La expresión (2.4), puede escribirse en notación matricial. Para ello considere la siguiente forma de realizar un “*producto cruz*”

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix},$$

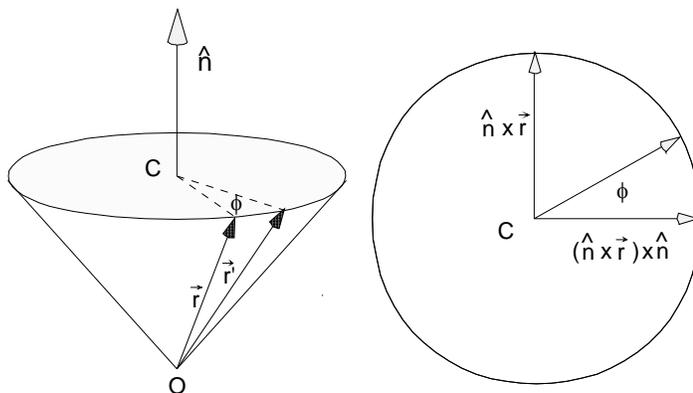


Figura 2.3: Rotación activa de un vector

o sea, en forma matricial, el *producto cruz* es realizado mediante multiplicación por una matriz  $3 \times 3$  que llamaremos  $(\vec{a} \times)$

$$(\vec{a} \times) = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, en términos matriciales

$$\vec{r}' = [I + (\sin \phi)(\hat{n} \times) + (1 - \cos \phi)(\hat{n} \times)^2] \vec{r}, \quad (2.5)$$

por lo cual, la matriz de la rotación (activa) es

$$R_{\hat{n}}(\phi) = [I + (\sin \phi)(\hat{n} \times) + (1 - \cos \phi)(\hat{n} \times)^2], \quad (2.6)$$

donde las matrices están dadas por

$$(\hat{n} \times) = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

con traza cero y

$$(\hat{n} \times)^2 = \begin{pmatrix} -n_z^2 - n_y^2 & n_y n_x & n_z n_x \\ n_y n_x & -n_z^2 - n_x^2 & n_z n_y \\ n_z n_x & n_z n_y & -n_y^2 - n_x^2 \end{pmatrix},$$

con traza  $-2$ .

**Angulo y eje de la rotación**

Dada la matriz de rotación  $R_{\hat{n}}(\phi)$ , podemos obtener expresiones para obtener el ángulo y el eje de la rotación. Si tomamos la traza de (2.6) obtenemos

$$\text{Tr}(R_{\hat{n}}(\phi)) = 3 + (1 - \cos \phi)(-2) = 1 + 2 \cos \phi, \quad (2.8)$$

de donde se obtiene el ángulo.

Si trasponemos la ecuación (2.6) obtenemos

$$R_{\hat{n}}^T(\phi) = [I - (\sin \phi)(\hat{n} \times) + (1 - \cos \phi)(\hat{n} \times)^2], \quad (2.9)$$

luego

$$R_{\hat{n}}(\phi) - R_{\hat{n}}^T(\phi) = 2 \sin \phi (\hat{n} \times),$$

de donde si  $\phi \neq \pi$ , obtenemos  $(\hat{n} \times)$  y de allí  $\hat{n}$ .

**Rotaciones infinitesimales y sus generadores**

Considere la siguiente descomposición:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} = a_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si se definen

$$I_1 = I_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_2 = I_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = I_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puede probarse directamente que

$$[I_i, I_j] = I_i I_j - I_j I_i = \varepsilon_{ijk} I_k. \quad (2.10)$$

Las matrices  $I_i$  se denominan generadores de rotaciones infinitesimales y ellas obedecen la denominada álgebra de *Lie*, definida por la relación básica

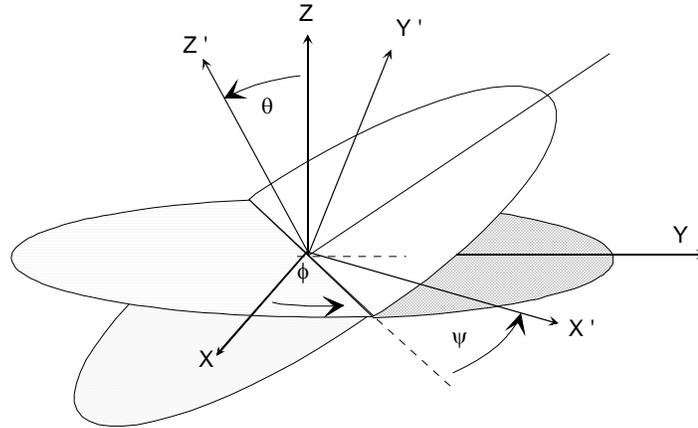


Figura 2.4: Ángulos de Euler

(2.10). En efecto, si el ángulo de rotación es infinitésimo, la relación (2.5) puede escribirse

$$\vec{r}' = \vec{r} + \phi(\hat{n} \times) \vec{r},$$

es decir

$$\vec{r}' = [I + \phi(\hat{n} \times)] \vec{r}.$$

Si un ángulo finito  $\phi$  es descompuesto en  $n$  partes, puede obtenerse la expresión para una rotación finita activa al tomar el límite

$$\vec{r}' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{\phi}{n} (\hat{n} \times) \right)^n \vec{r},$$

o sea

$$\vec{r}' = e^{\phi(\hat{n} \times)} \vec{r},$$

o sea tenemos otra expresión formal para la matriz de rotación finita

$$R_{\hat{n}}(\phi) = e^{\phi(\hat{n} \times)}. \quad (2.11)$$

### 2.1.2. Ángulos de Euler

Una de las diversas formas de parametrizar una rotación de un sistema, es mediante los ángulos de Euler que definiremos de acuerdo a lo siguiente, ver figura (8.2).

- Primero una rotación en ángulo  $\Phi$  en torno del eje  $z$  original.
- Segundo una rotación en ángulo  $\Theta$  respecto al nuevo eje  $x$  (eje  $n$ )  $y$
- finalmente una rotación en ángulo  $\Psi$  respecto a la posición del eje  $z$  de la rotación anterior y que es por lo tanto el eje  $z$  ( $z'$ ) final.

El mismo efecto puede ser logrado haciendo una sucesión de tres rotaciones en esos mismos ángulos pero respecto a los ejes originales. La demostración analítica se deja como problema, aquí se establece el resultado desde un punto de vista intuitivo

$$R = R_{z'}(\Psi)R_n(\Theta)R_z(\Phi) = R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(\Psi), \quad (2.12)$$

de modo que la matriz de la rotación (activa) resultante será

$$\begin{pmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi & 0 \\ \sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note cuidadosamente que se trata de rotaciones de un punto de vista activo (rotar el sistema físico). Si ellas son rotaciones de un punto de vista pasivo (rotar el sistema de coordenadas), todos los ángulos involucrados deben cambiarse de signo.

## 2.2. Velocidad angular

### 2.2.1. Descomposición del movimiento

Un cambio de posición arbitrario de un sistema o de un cuerpo rígido, puede ser en general logrado en forma equivalente mediante una traslación pura, que lleva alguno de sus puntos  $A$  a su posición final  $A'$ , seguido de una rotación pura en torno de un eje que pasa por el punto  $A'$ , en un cierto ángulo. Entonces el cambio de todo vector posición de un punto  $P$  perteneciente al cuerpo rígido, podrá escribirse:

$$\delta \overrightarrow{OP} = \delta \overrightarrow{OA}_{\text{traslación}} + \delta \overrightarrow{A'P}_{\text{rotación}}. \quad (2.13)$$

Si el cambio de posición es finito, nada podemos decir de las posiciones intermedias que ocupó el cuerpo para pasar de su posición inicial a la final.

Sin embargo, si el intervalo de tiempo transcurrido entre ambas posiciones es infinitésimo,  $dt$ , entonces la descomposición anterior, nos describe en forma continua las posiciones que ocupa el cuerpo mediante

$$d\overrightarrow{OP} = d\overrightarrow{OA} + d\overrightarrow{AP},$$

o sea

$$d\overrightarrow{OP} = d\overrightarrow{OA} + d\phi \hat{n} \times \overrightarrow{AP},$$

que si se divide por  $dt$ , constituye una relación entre velocidades de dos puntos  $A, P$  del cuerpo rígido, es decir

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \frac{d\phi}{dt} \hat{n} \times \overrightarrow{AP}.$$

Si definimos

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n}, \quad (2.14)$$

la denominada *velocidad angular instantánea* del cuerpo rígido, se obtiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}. \quad (2.15)$$

Lo anterior es algo engañoso. La existencia del ángulo de rotación y de su eje, está garantizada por el teorema de Euler, sin embargo en la práctica, su determinación no es obvia. En este contexto, es útil el llamado teorema de adición de velocidades angulares.

### 2.2.2. Teorema de adición de velocidades angulares

Si se tienen dos sistemas de referencia,  $S_0$  y  $S_1$  con origen común, y además un cuerpo rígido ( $CR$ ) que mantiene un punto fijo en el origen común, ver figura (2.5), se deja como ejercicio probar el siguiente teorema que relaciona velocidades angulares relativas (*rel*):

#### ► TEOREMA 2.3

*La velocidad angular puede descomponerse de la siguiente forma*

$$\vec{\omega}_{CR \text{ rel } S_0} = \vec{\omega}_{CR \text{ rel } S_1} + \vec{\omega}_{S_1 \text{ rel } S_0} \quad (2.16)$$

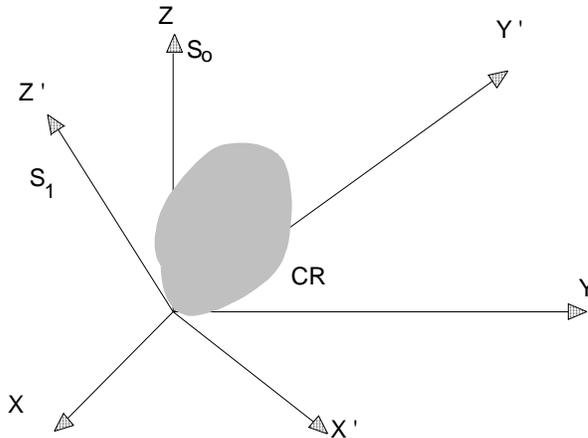


Figura 2.5: Adición de velocidades angulares

## 2.3. Problemas

EJERCICIO 2.3.1 *Demuestre que una transformación lineal con una matriz ortogonal, transformación ortogonal, conserva el producto escalar entre dos vectores y sus magnitudes.*

EJERCICIO 2.3.2 *Demuestre que  $(\vec{a} \times)^3 = -|\vec{a}|^2 (\vec{a} \times)$ .*

EJERCICIO 2.3.3 *Demuestre que las componentes de la velocidad angular de un sistema rígido, en términos de los ángulos de Euler, están dadas por:*

CASO 1 *En el sistema de ejes móviles:*

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

CASO 2 *en el sistema de ejes fijos:*

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 2.3.4 Si se considera un vector de magnitud constante  $\vec{r}(t)$  obtenido mediante una rotación  $R(t)$  del vector inicial  $\vec{r}(0)$ , demuestre que existe una matriz antisimétrica  $\Omega(t)$  tal que

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \Omega(t)\vec{r}(t),$$

y que ello equivale a

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t),$$

donde  $\vec{\omega}(t)$  es llamado el vector velocidad angular.

EJERCICIO 2.3.5 Determine las componentes del vector  $\vec{\omega}(t)$  del problema anterior, en términos de las componentes de la matriz  $R(t)$ .

EJERCICIO 2.3.6 Si las velocidades de tres puntos de un rígido son conocidas, demuestre que:

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AC}}, \quad \text{si } (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AC} \neq 0.$$

EJERCICIO 2.3.7 Obtenga una expresión para la velocidad angular  $\vec{\omega}$ , en el caso en que no se cumpla la condición  $(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AC} \neq 0$  del problema anterior. Indicación: Si  $(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AC} = 0$ , entonces  $\vec{\omega} \times \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ , lo que quiere decir que la velocidad angular está en el plano  $ABC$ . Se puede entonces expresar la velocidad angular como una combinación lineal de  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  con coeficientes determinables, obteniéndose

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})\vec{AB} + (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})\vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2}$$

EJERCICIO 2.3.8 Demuestre la equivalencia establecida en la ecuación (2.12).

## 2.3. Los problemas resueltos

EJERCICIO 2.3.1 Demuestre que una transformación lineal con una matriz ortogonal, transformación ortogonal, conserva el producto escalar entre dos vectores y sus magnitudes.

**Solución.** Tenemos que  $A^T A = I$ , con  $A = \{a_{ij}\}$ . Luego la transformación es para dos vectores con componentes  $\{d_i\}$ ,  $\{e_i\}$  (suma sobre índices repetidos) será

$$\begin{aligned}d'_i &= a_{ij}d_j, \\e'_i &= a_{ij}e_j,\end{aligned}$$

luego la magnitud será

$$\begin{aligned}d'_i d'_i &= a_{ij}d_j a_{ik}d_k, \\&= a_{ij}a_{ik}d_j d_k, \\&= a_{ji}^T a_{ik}d_j d_k, \\&= (A^T A)_{jk}d_j d_k \\&= \delta_{jk}d_j d_k = d_j d_j,\end{aligned}$$

esto es

$$|\vec{d}'| = |\vec{d}|.$$

Similarmente

$$\begin{aligned}d'_i e'_i &= a_{ij}d_j a_{ik}e_k, \\&= a_{ij}a_{ik}d_j e_k, \\&= (A^T A)_{jk}d_j e_k, \\&= d_j e_j,\end{aligned}$$

o sea

$$\vec{d}' \cdot \vec{e}' = \vec{d} \cdot \vec{e}.$$

---

EJERCICIO 2.3.2 Demuestre que  $(\vec{a} \times)^3 = -|\vec{a}|^2 (\vec{a} \times)$ .

**Solución.** Preferible considerar vectores y el desarrollo trivial

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = -|\vec{a}|^2 (\vec{a} \times \vec{b}),$$

de donde sigue que

$$(\vec{a} \times)^3 = -|\vec{a}|^2 (\vec{a} \times).$$


---

EJERCICIO 2.3.3 Demuestre que las componentes de la velocidad angular de un sistema rígido, en términos de los ángulos de Euler, están dadas por:

a) En el sistema de ejes móviles:

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

b) En el sistema de ejes fijos:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.\end{aligned}$$

**Solución.** De la figura y del teorema de adición de velocidades angulares tenemos

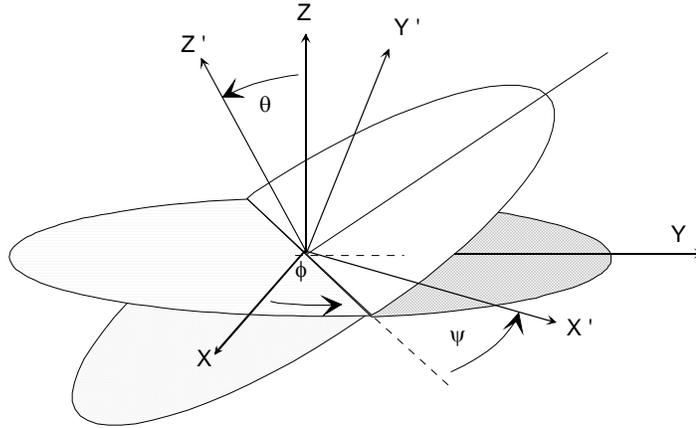


Figura 2.6: Ángulos de Euler

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{n} + \dot{\psi} \hat{k}' + \dot{\phi} \hat{k},$$

donde  $\hat{n}$  corresponde a la línea origen del ángulo  $\dot{\psi}$ . Debemos reducir a una base común. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\hat{k} &= \cos \theta \hat{k}' + \sin \theta (\cos \psi \hat{j}' + \sin \psi \hat{i}'), \\ \hat{n} &= \cos \psi \hat{i}' - \sin \psi \hat{j}',\end{aligned}$$

luego

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}(\cos \psi \hat{i}' - \sin \psi \hat{j}') + \dot{\psi} \hat{k}' + \dot{\phi}(\cos \theta \hat{k}' + \sin \theta(\cos \psi \hat{j}' + \sin \psi \hat{i}')),$$

que prueban

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

Similarmente reduzca a la base fija.

---

EJERCICIO 2.3.4 Si se considera un vector de magnitud constante  $\vec{r}(t)$  obtenido mediante una rotación  $R(t)$  del vector inicial  $\vec{r}(0)$ , demuestre que existe una matriz antisimétrica  $\Omega(t)$  tal que

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \Omega(t)\vec{r}(t),$$

y que ello equivale a

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t),$$

donde  $\vec{\omega}(t)$  es llamado el vector velocidad angular.

**Solución.** Tendremos

$$\vec{r}(t) = R(t)\vec{r}(0),$$

derivamos respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{R}(t)\vec{r}(0) = \dot{R}(t)R^{-1}(t)\vec{r}(t),$$

pero la matriz rotación es ortogonal, es decir  $R^{-1} = R^T$  de manera que

$$\Omega(t) = \dot{R}(t)R^T(t),$$

y falta probar que es antisimétrica. Considere

$$\Omega^T(t) = R(t)\dot{R}^T(t),$$

y sume

$$\Omega(t) + \Omega^T(t) = \dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = \frac{d}{dt}(RR^T) = \frac{d}{dt}I = 0.$$

---

EJERCICIO 2.3.5 *Determine las componentes del vector  $\vec{\omega}(t)$  del problema anterior, en términos de las componentes de la matriz  $R(t)$ .*

**Solución.** Tendremos

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & -\omega_y \\ -\omega_x & 0 & \omega_z \\ \omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} = \dot{R}(t)R^T \\ &= \begin{bmatrix} \dot{R}_{11} & \dot{R}_{12} & \dot{R}_{13} \\ \dot{R}_{21} & \dot{R}_{22} & \dot{R}_{23} \\ \dot{R}_{31} & \dot{R}_{32} & \dot{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

de donde identificamos

$$\omega_x = \dot{R}_{11}R_{21} + \dot{R}_{12}R_{22} + \dot{R}_{13}R_{23},$$

y similarmente las otras.

---

EJERCICIO 2.3.6 *Si las velocidades de tres puntos de un rígido son conocidas, demuestre que:*

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overrightarrow{AC}}, \quad \text{si } (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0.$$

**Solución.** Considere la relación básica

$$\begin{aligned}\vec{v}_B - \vec{v}_A &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}, \\ (\vec{v}_C - \vec{v}_A) &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A) &= (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}) \\ &= ((\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overrightarrow{AC})\vec{\omega},\end{aligned}$$

y de allí sigue el resultado.

---

EJERCICIO 2.3.7 Obtenga una expresión para la velocidad angular  $\vec{\omega}$ , en el caso en que no se cumpla la condición  $(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AC} \neq 0$  del problema anterior. Indicación: Si  $(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AC} = 0$ , entonces  $\vec{\omega} \times \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ , lo que quiere decir que la velocidad angular está en el plano ABC. Se puede entonces expresar la velocidad angular como una combinación lineal de  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  con coeficientes determinables, obteniendo

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})\vec{AB} + (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})\vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2}$$

**Solución.** De acuerdo a lo explicado podemos escribir

$$\vec{\omega} = \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{AC},$$

multiplique cruz  $\vec{AB}$  y luego cruz  $\vec{AC}$  obteniendo

$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{\omega} &= \lambda_2 \vec{AB} \times \vec{AC}, \\ \vec{\omega} \times \vec{AC} &= \lambda_1 \vec{AB} \times \vec{AC},\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}\lambda_2 \vec{AB} \times \vec{AC} &= \vec{v}_A - \vec{v}_B, \\ \lambda_1 \vec{AB} \times \vec{AC} &= \vec{v}_C - \vec{v}_A,\end{aligned}$$

de donde usted puede despejar

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2}.\end{aligned}$$

---

EJERCICIO 2.3.8 Demuestre la equivalencia establecida en la ecuación (2.12).

**Solución.** Considere

$$\hat{n} = R_z(\Phi)\hat{i}, \quad \hat{k}' = R_{\hat{n}}(\Theta)\hat{k} = R_{R_z(\Phi)\hat{i}}(\Theta)\hat{k},$$

y

$$R = R_{z'}(\Psi)R_n(\Theta)R_z(\Phi)$$

por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} R &= R_{\hat{n}}(\Theta)R_z(\Psi)R_{\hat{n}}(-\Theta)R_n(\Theta)R_z(\Phi) \\ &= R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(-\Phi)R_z(\Psi)R_z(\Phi) \\ &= R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(\Psi). \end{aligned}$$

pues rotaciones en torno a un mismo eje conmutan.



# Sistema rígido de partículas

## 3.1. Cantidades cinemáticas

Las cantidades cinemáticas, que dependen de las velocidades de las partículas del cuerpo, adquieren una forma especial cuando se trata de un sistema rígido de partículas. De acuerdo a lo estudiado en el capítulo sobre rotaciones, la descripción del movimiento de un cuerpo rígido puede hacerse en términos de tres coordenadas que den cuenta de los desplazamientos de un punto del cuerpo y de tres ángulos o parámetros que den cuenta de las rotaciones del cuerpo. Por esa razón existen en general solo seis variables necesarias en la descripción del movimiento de un cuerpo rígido y por lo tanto, es suficiente considerar solamente las seis ecuaciones escalares (1.2) y (1.3), o bien reemplazar alguna de ellas por el teorema de conservación de energía, si ello corresponde. Aquí solamente indicaremos las consideraciones especiales que permiten expresar tanto la energía cinética y el momentum angular de un cuerpo rígido, en términos de su velocidad angular y la matriz de inercia. Las ecuaciones dinámicas aplicables son aquellas recién citadas de un sistema de partículas. Considerando la relación básica entre las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido, ver fig.(3.1)

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

podemos expresar el momento angular de un sistema rígido de partículas que mantiene un punto  $O$  fijo como

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \quad (3.1)$$

o bien, para un cuerpo rígido continuo que mantiene un punto  $O$  fijo

$$\vec{L}_O = \int dm \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.2)$$

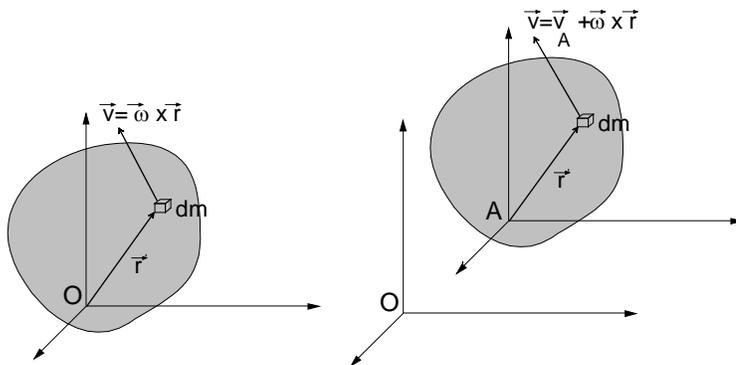


Figura 3.1: Velocidades de un rígido

Si se considera la siguiente forma de realizar un *producto cruz* (ver *rotaciones*)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (\vec{a} \times) \vec{b},$$

cualquiera de las dos expresiones (3.1) o (3.2) puede escribirse, al usar notación matricial, de la siguiente forma

$$\vec{L}_O = H_O \vec{\omega}.$$

donde  $H_O$  es una matriz  $3 \times 3$ , la denominada *matriz de inercia del sistema relativa al origen  $O$*  y que, para el caso de un cuerpo rígido continuo, por definición es

$$H_O = - \int dm (\vec{r} \times)^2.$$

y para un sistema rígido de partículas

$$H_O = - \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)^2.$$

### 3.1.1. Energía cinética y momentum angular

Se deja como ejercicio, en este resumen, probar que:

EJERCICIO 3.1.1 *En el movimiento general de un sistema rígido de partículas, pruebe que:*

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + H_G\vec{\omega}, \\ \vec{L}_G &= H_G\vec{\omega}, \\ K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_G\vec{\omega}\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.1.2 *En el caso que un punto 0 se mantenga fijo, pruebe que:*

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + H_G\vec{\omega} = H_O\vec{\omega}, \\ \vec{L}_G &= H_G\vec{\omega}, \\ K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_G\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_O\vec{\omega}.\end{aligned}$$

### 3.1.2. Algunas propiedades de la matriz de inercia

La expresión explícita de la matriz de inercia (sus componentes), depende del origen elegido, así como de la orientación de los ejes. Sus componentes las indicaremos de acuerdo a

$$H = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

siendo los elementos de la diagonal llamados *momentos de inercia* y los de fuera de la diagonal, *productos de inercia*

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int dm(y^2 + z^2), \quad I_{yy} = \int dm(x^2 + z^2), \quad \text{etc.} \\ I_{xy} &= I_{yx} = - \int xydm, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Por ser la matriz de inercia una matriz real simétrica, ella puede ser diagonalizada. Las direcciones para las cuales ella es diagonal, se denominan direcciones o ejes principales de inercia del cuerpo, en el punto seleccionado. Cuando hay dos valores propios repetidos, todos los ejes del plano correspondiente a esos dos vectores propios, son ejes principales de inercia. Si los tres valores propios son iguales, todo eje es en ese punto es principal de inercia. En cualquier caso, siempre es posible escoger tres direcciones principales de inercia ortogonales entre si. Las propiedades de simetría de un cuerpo, cuando existen, ayudan en la determinación de las direcciones principales de inercia. Para lo que sigue, consideraremos cuerpos rígidos homogéneos de modo que las propiedades de simetría del cuerpo coinciden con sus simetrías geométricas. Pueden entonces probarse los siguientes teoremas:

### 3.1.3. Teoremas

► TEOREMA 3.1

*Todo eje de simetría, es principal de inercia en todos sus puntos.*

► TEOREMA 3.2

*Un eje perpendicular a un plano de simetría de reflexión, es principal de inercia donde se intersectan.*

► TEOREMA 3.3

*Un eje paralelo a un eje de simetría, es principal de inercia donde lo corta perpendicularmente el plano que contiene al centro de masas.*

### 3.1.4. El elipsoide de inercia

Las consideraciones anteriores admiten una visualización gráfica. La forma cuadrática

$$\vec{r}^T \cdot H_O \vec{r} = 1,$$

o bien desarrollada explícitamente en la forma

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1$$

representa en general, un elipsoide centrado en el origen seleccionado del cuerpo pero rotado respecto a los ejes elegidos, ver figura (3.2). Los semiejes del elipsoide serán en consecuencia los ejes principales de inercia del cuerpo en ese origen, puesto que para esos ejes, la forma cuadrática no tiene productos

de inercia. Este elipsoide puede degenerar desde un cilindro de sección elíptica si algún momento de inercia es cero, hasta una esfera si los tres momentos de inercia son iguales. Esta superficie, llamada elipsoide de inercia, que está fija en el cuerpo, debe por lo tanto tener las mismas propiedades de simetría del cuerpo. Por ejemplo, si uno de los ejes elegidos es de simetría de rotación del cuerpo en el origen seleccionado, ese eje debe ser uno de los semiejes del elipsoide, es decir un eje de simetría es principal de inercia en todos sus puntos. Igualmente, si el origen está en un plano de simetría de reflexión del cuerpo, el elipsoide debe tener ese mismo plano como plano de simetría de reflexión. Es decir dos semiejes del elipsoide están sobre ese plano y el tercero es perpendicular a ese plano. En consecuencia todo eje perpendicular a un plano de simetría de reflexión es principal de inercia donde se intersectan con el plano. Otra consecuencia que se entiende con claridad cuando se piensa en el elipsoide de inercia es la siguiente. Si el origen está en un eje de simetría de rotación en un ángulo distinto de  $180^\circ$ , el elipsoide debe tener esa misma propiedad, por lo tanto los dos semiejes del elipsoide que son perpendiculares a ese eje deben ser iguales, o sea esos dos correspondientes momentos de inercia deben ser iguales.

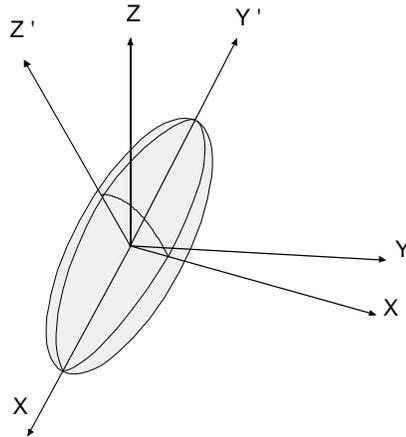


Figura 3.2: Elipsoide de inercia

### Rotaciones de los ejes.

Si la matriz de inercia  $H$  es conocida en componentes para un sistema ortogonal de ejes en un punto de un cuerpo rígido, podemos obtener la matriz en componentes para ejes rotados ortogonales  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  en el mismo punto simplemente proyectando la matriz de inercia sobre estos nuevos ejes de acuerdo a

$$I_{e_1 e_2} = \hat{e}_1^T \cdot H \hat{e}_2 .$$

Debemos remarcar que la matriz de inercia en un punto de un cuerpo rígido es única. Lo que cambia al cambiar ejes en un punto, son sus elementos o componentes.

### Traslaciones de los ejes, Teorema de Steiner

Si se consideran traslaciones (paralelas) de los ejes, la relación de transformación de la matriz de inercia es particularmente simple si uno de los orígenes es el centro de masas  $G$ . Tal relación de transformación, conocida como teorema de Steiner sigue del siguiente análisis. Considere que

$$H_O = - \int dm (\vec{r} \times)^2 ,$$

siendo

$$(\vec{r} \times)^2 = \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ yz & -x^2 - z^2 & yz \\ zx & zy & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} .$$

Si consideramos coordenada  $(x', y', z')$  relativas a  $G$  con origen en el punto  $(a, b, c)$  entonces

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + c, \end{aligned}$$

si consideramos además que

$$\int x' dm = \int y' dm = \int z' dm = 0,$$

entonces podemos no considerar los términos que resulten lineales en  $x'$  o  $y'$  o  $z'$ . Así entonces ( $\triangleq$  significa equivalente bajo la integral)

$$\begin{aligned} xy &= (x' + a)(y' + b) \triangleq x'y' + ab, \\ y^2 + z^2 &= (y' + b)^2 + (z' + c)^2 \triangleq (y')^2 + (z')^2 + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} -(\vec{r} \times)^2 &= \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yz & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'z' & x'^2 + z'^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & x'^2 + y'^2 \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} c^2 + b^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2 + c^2 & -bc \\ -ca & -cb & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el teorema

$$H_O = H_G + M \begin{pmatrix} c^2 + b^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2 + c^2 & -bc \\ -ca & -cb & a^2 + b^2 \end{pmatrix},$$

donde  $a, b, c$  son las coordenadas cartesianas de  $G$  respecto al origen  $O$ .

**EJERCICIO 3.1.3** *Se tiene un sólido homogéneo en forma de un cono recto circular de altura  $h$ , radio basal  $a$ , masa  $m$  y semi ángulo en el vértice  $\alpha$ . Demuestre que:*

- En el vértice sus momentos principales de inercia son  $A = B = \frac{3m}{20}(a^2 + 4h^2)$ ,  $C = \frac{3ma^2}{10}$ .
- En el centro de su base son  $A = B = \frac{m}{20}(3a^2 + 2h^2)$ ,  $C = \frac{3ma^2}{10}$ .
- El momento de inercia en torno de una generatriz es  $I = \frac{3mh^2}{4}(1 + \frac{1}{5} \sec^2 \alpha) \sin^2 \alpha$ .

## 3.2. Ecuaciones dinámicas

Como se estableció, ver ecuaciones (1.2, 1.3, ??) y más generalmente en (??), las ecuaciones dinámicas aplicables a un sistema de partículas y en particular a un cuerpo rígido son

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext},$$

para el movimiento del centro de masas, y

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext},$$

o

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext},$$

es decir para punto fijo  $O$  de un sistema inercial, el centro de masas  $G$  o un punto  $A$  arbitrario, siendo entonces

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A. \quad (3.3)$$

Aunque no es común utilizar la última forma, en una sección más adelante mostraremos que bajo ciertas condiciones su uso simplifica muchos problemas.

### 3.2.1. Movimiento Plano

Cuando todas las velocidades de un cuerpo rígido son paralelas a un plano fijo, por ejemplo el plano  $xy$ , se tiene un movimiento plano. La velocidad angular del cuerpo será de la forma

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k},$$

y en consecuencia el momentum angular en  $G$  estará dado por

$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

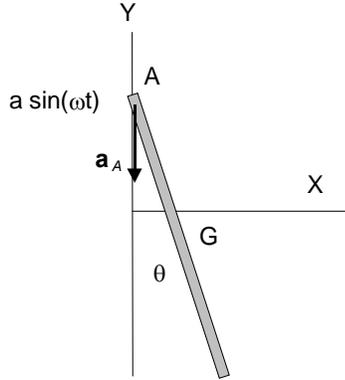


Figura 3.3: Péndulo cuyo punto de suspensión oscila

Si se trata de una lámina ( $z = 0$ ) o bien simplemente si los ejes son principales de inercia entonces

$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = I_{zz}\omega\hat{k}.$$

Presentaremos algunos ejemplos de dinámica plana de un cuerpo rígido, los cuales permiten además una solución más simple si se usa la relación general (3.3). La utilización de la ecuación (??) normalmente involucra calcular el torque de alguna fuerza desconocida que debe ser finalmente eliminada utilizando la ecuación de movimiento de centro de masas. Compare ese método, con el método utilizado en los siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 3.2.1** *Péndulo de longitud  $L$ , masa  $M$  cuyo punto de suspensión  $A$  oscila verticalmente de la forma  $y_A = a \sin \omega t$ .*

**Solución.** Para este caso tenemos

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero puede fácilmente verse que  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2 \sin \omega t \sin \theta$  obteniendo en dos pasos

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta + M\frac{L}{2}a\omega^2 \sin \omega t \sin \theta.$$

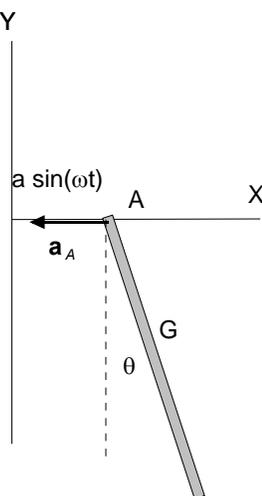


Figura 3.4: Péndulo forzado

---

EJEMPLO 3.2.2 *Péndulo de longitud  $L$ , masa  $M$  cuyo punto de suspensión  $A$  oscila horizontalmente en la forma  $x_A = a \sin \omega t$ .*

**Solución.** Para este caso

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero similarmente  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \cos \theta$  entonces obtenemos en dos pasos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \cos \theta.$$


---

EJEMPLO 3.2.3 *Péndulo de longitud  $L$ , masa  $M$  cuyo punto de suspensión  $A$  se mueve sobre una circunferencia vertical de radio  $R$  con velocidad angular constante  $\omega$ .*

**Solución.** Para este caso tenemos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

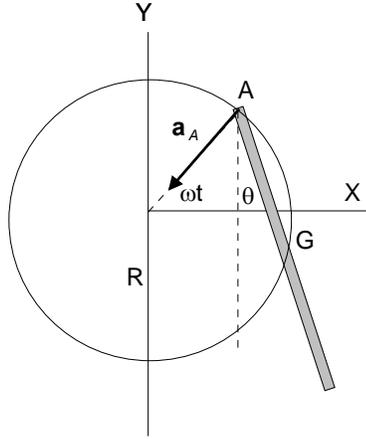


Figura 3.5: Problema de barra

pero  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \omega t + \theta)$  obteniendo

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \cos(\omega t - \theta).$$

**EJEMPLO 3.2.4** *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio  $R$  y masa  $M$  sobre un plano horizontal. En este caso la aceleración del punto de contacto  $A$  del cuerpo con el suelo es de magnitud  $a_A = R\dot{\theta}^2$  hacia arriba.*

**Solución.** Suponiendo que el centro de masas está a distancia  $h$  del centro geométrico, tenemos

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = |\vec{r}_G - \vec{r}_A| R \dot{\theta}^2 \sin \phi,$$

pero

$$\frac{\sin \phi}{h} = \frac{\sin \theta}{|\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A|},$$

entonces

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = R \dot{\theta}^2 h \sin \theta,$$

y finalmente

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - MR \dot{\theta}^2 h \sin \theta.$$

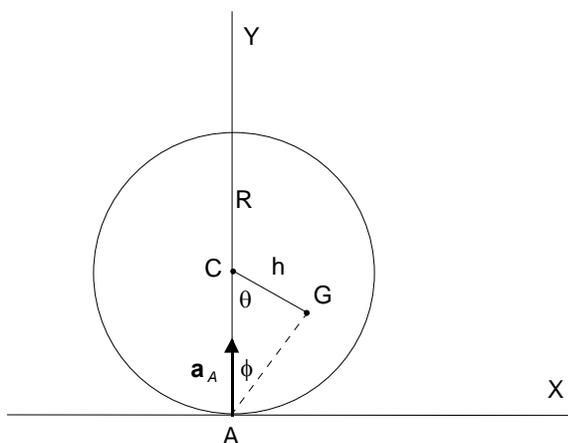


Figura 3.6: Disco que rueda

El momento de inercia puede ser obtenido mediante el teorema de Steiner

$$I_A = I_G + M(h^2 + R^2 - 2hr \cos \theta).$$

---

**EJEMPLO 3.2.5** *El mismo ejemplo, pero la rueda es actuada por una fuerza horizontal constante de magnitud  $F$  sobre su centro.*

**Solución.** Simplemente agregamos el torque de  $F$  obteniendo

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - FR - MR\dot{\theta}^2 h \sin \theta.$$

---

**EJEMPLO 3.2.6** *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio  $a$  sobre un cilindro fijo de radio  $R$ .*

**Solución.** En este caso, demuestre primero que la aceleración del punto  $A$  del cuerpo en contacto con el cilindro es de magnitud  $a_A = aR\omega^2/(R + a)$  hacia el centro de la rueda. Aquí la velocidad angular de la rueda está relacionada con el ángulo  $\theta$  mediante  $\omega = (R + a)\dot{\theta}/a$  y  $R\theta = a\phi$ . Si el centro de masa está a distancia  $h$  del centro geométrico, podemos obtener

$$\begin{aligned} (\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} &= a_A h \sin \phi \\ &= \frac{aR\omega^2}{R + a} h \sin \phi, \end{aligned}$$

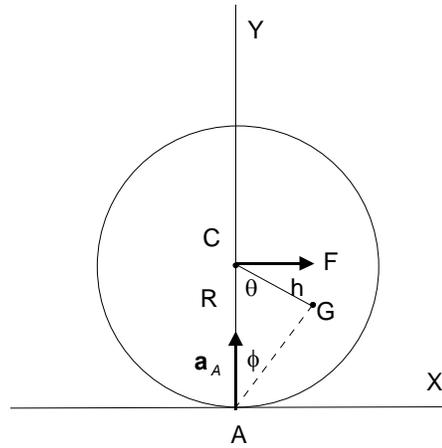


Figura 3.7: Rueda tirada con una fuerza.

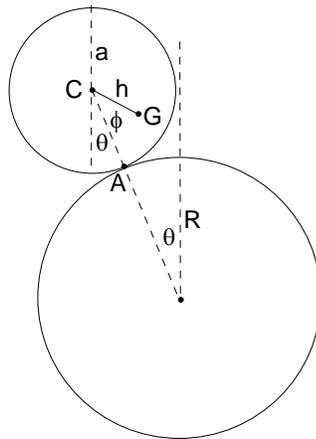


Figura 3.8: Rueda sobre cilindro.

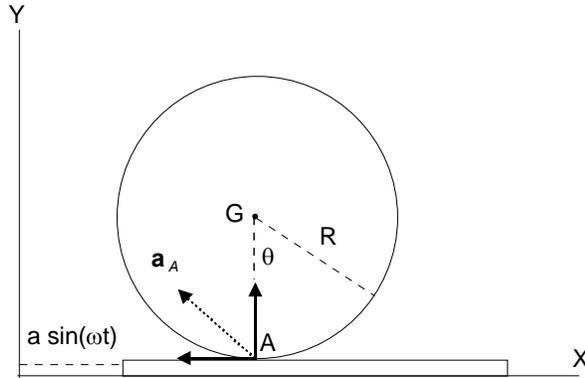


Figura 3.9: Rueda sobre plataforma móvil.

entonces

$$I_A \alpha = -Mg(h \sin(\theta + \phi) - a \sin \theta) - M \frac{aR\omega^2}{R+a} h \sin \phi,$$

$$\frac{R+a}{a} I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin\left(1 + \frac{R}{a}\right) \theta + Mga \sin \theta - M \frac{aR\dot{\theta}^2}{R+a} h \frac{(R+a)^2}{a^2} \sin \frac{R}{a} \theta,$$

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \frac{a}{R+a} \sin \frac{R+a}{a} \theta + \frac{Mga^2 \sin \theta}{(R+a)} - MR\dot{\theta}^2 h \sin \frac{R}{a} \theta,$$

**EJEMPLO 3.2.7** *Movimiento de rodadura de una rueda de masa  $M$  y radio  $R$ , sobre una plataforma que oscila de la forma  $a \sin \omega t$ .*

**Solución.** Aquí la aceleración del punto  $A$  tiene dos componentes,  $a\omega^2 \sin \omega t$ ,  $R\dot{\theta}^2$  pero solo la primera importa, dando por simple inspección  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = Raw^2 \sin \omega t$  lo cual conduce a

$$I_A \ddot{\theta} = -MRa\omega^2 \sin \omega t.$$

**PROBLEMA 3.2.1** *Repita los ejemplos anteriores, pero momentando respecto al centro de masas, es decir haciendo uso de la ecuación  $d\vec{L}_G/dt = \vec{\Gamma}_G^{ext}$ .*

### 3.2.2. Un ejemplo en más dimensiones, la bola de billar

Considere una esfera homogénea de masa  $M$ , radio  $R$ , que se mueve sobre un plano horizontal con coeficiente de roce cinético  $\mu$  sometida a su peso y a la reacción del plano, ver fig.(3.10). Hay dos situaciones, el punto de contacto  $P$  desliza o no lo hace. La matriz de inercia con origen en el centro de masas es diagonal y tiene sus tres momentos de inercia iguales ( $I = 2MR^2/5$ ). Supondremos que inicialmente hay deslizamiento. Para ejes fijos  $OX, OY$  y  $OZ$  vertical, las ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned} M\vec{a}_G &= \vec{f}, \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (-R\hat{k}) \times \vec{f}, \end{aligned}$$

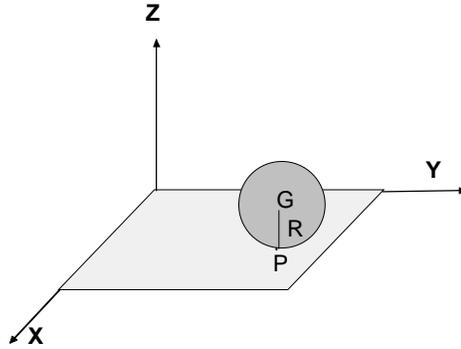


Figura 3.10: Esfera sobre un plano horizontal

y además la fuerza de roce  $\vec{f}$  está dada por  $\vec{f} = -\mu Mg\hat{v}_P$ , siendo  $\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (-R\hat{k})$ . Si derivamos la última ecuación respecto al tiempo y reemplazamos en ella  $\vec{a}_G$  y  $d\vec{\omega}/dt$ , se obtiene

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{1}{M} \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right) \vec{f} = -\mu g \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right) \frac{\vec{v}_P}{v_P},$$

la cual nos dice, obviamente, que la dirección de  $\vec{v}_P$  no cambia con el tiempo y en consecuencia se tiene que

$$\frac{dv_P}{dt} = -\mu g \left( 1 + \frac{MR^2}{I} \right),$$

que se integra trivialmente

$$v_P = v_P(0) - \mu g \left(1 + \frac{MR^2}{I}\right) t. \quad (3.4)$$

Si indicamos por  $\hat{e}$  la dirección fija de  $\vec{v}_P$ , podemos escribir

$$\vec{a}_G = -\frac{\vec{f}}{M} = -\mu g \hat{e},$$

que también es sencillo integrar dos veces, resultando

$$\vec{v}_G = \vec{v}_G(0) - \mu g \hat{e} t$$

y

$$\vec{r}_G = \vec{r}_G(0) + \vec{v}_G(0)t - \frac{1}{2}\mu g \hat{e} t^2,$$

siendo la dirección de  $\hat{e}$  determinables por las condiciones iniciales

$$\vec{e} = \vec{v}_P(0) = \vec{v}_G(0) - \vec{\omega}(0) \times (R\hat{k}).$$

En resumen, el centro de masas describe, en general, una parábola. El análisis realizado vale hasta el instante en que  $v_P$ , se anula, es decir hasta que la bola comienza a rodar sin deslizar. Ese tiempo puede ser determinado de la ecuación (3.4) y está dado por

$$\left| \vec{v}_G(0) - \vec{\omega}(0) \times (R\hat{k}) \right| = \mu g \left(1 + \frac{MR^2}{I}\right) t$$

de allí en adelante, es fácil ver que  $G$  sigue moviéndose en línea recta con velocidad constante. Note que el tiempo que tarda la bola en comenzar a rodar es cero si la condición de rodadura sin deslizamiento es satisfecha inicialmente, y que al contrario, el tiempo es infinito si  $\mu = 0$ .

- Estudio. Varios casos de esferas moviéndose sobre superficies pueden ser estudiados en el libro, *Dynamics of Rigid Bodies*, de William Duncan ([7]).

### 3.3. Movimiento en tres dimensiones

#### 3.3.1. Ecuaciones de Euler

Consideremos primero, un cuerpo que se mueve sostenido de uno de sus puntos, bajo la acción de la reacción en el punto de suspensión y alguna otra fuerza que realice algún torque respecto al punto fijo. Además considere ejes principales  $OXYZ$  móviles fijos al cuerpo rígido con origen en el punto fijo  $O$ . Como sabemos, podemos escribir

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Gamma}_0, \quad (3.5)$$

pero, en ejes principales

$$\vec{L}_0 = I_{xx}\omega_x\hat{i} + I_{yy}\omega_y\hat{j} + I_{zz}\omega_z\hat{k},$$

y su derivada será

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= I_{xx}\dot{\omega}_x\hat{i} + I_{yy}\dot{\omega}_y\hat{j} + I_{zz}\dot{\omega}_z\hat{k} + \\ &\quad \vec{\omega} \times \vec{L}_0, \end{aligned}$$

de modo que si tomamos las componentes de la ecuación (3.5) se obtendrá con algún trabajo las llamadas ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= \Gamma_x^{ext} \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= \Gamma_y^{ext} \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= \Gamma_z^{ext}. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones determinan completamente las componentes de la velocidad angular del cuerpo si el torque es conocido.

#### 3.3.2. Torque nulo

Consideremos segundo, un cuerpo que se mueve sostenido de su centro de masa fijo, bajo la acción de la reacción en el punto de suspensión solamente, de modo que el torque de las fuerzas externas respecto al punto de suspensión

es nulo. Además considere ejes principales móviles fijos al cuerpo rígido con origen en el punto fijo O. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= 0 \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= 0 \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= 0. \end{aligned}$$

Además es de utilidad considerar que lo anterior es el reflejo de  $\vec{L}_0 =$  constante. O sea

$$\vec{L}_0 = I_{xx}\omega_x\hat{i} + I_{yy}\omega_y\hat{j} + I_{zz}\omega_z\hat{k} = \text{constante.}$$

Si además no hay roce, se conserva la energía cinética de modo que

$$K = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2 = \text{constante.} \quad (3.6)$$

También sigue de las ecuaciones anteriores que

$$\vec{L}_0 \cdot \vec{\omega} = 2K = \text{constante,}$$

de modo que la velocidad angular permanece sobre un plano fijo perpendicular a  $\vec{L}_0$ . Además la magnitud del momentum angular es constante, lo cual agrega otra condición (no es independiente)

$$L_0^2 = I_{xx}^2\omega_x^2 + I_{yy}^2\omega_y^2 + I_{zz}^2\omega_z^2 = \text{constante.} \quad (3.7)$$

**EJERCICIO 3.3.1** *A partir de las ecuaciones de Euler pruebe las ecuaciones 3.6 y 3.7.*

Pensemos ahora como se ven las cosas para un observador que se mueve junto con el cuerpo rígido. Para él las direcciones de los ejes permanecen fijas y observa que la velocidad angular varía en esos ejes. De acuerdo a él, la punta del vector velocidad angular se mueve en un punto que es la intersección de dos elipsoides fijos al cuerpo.

$$I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 = 2K$$

y

$$L_0^2 = I_{xx}^2\omega_x^2 + I_{yy}^2\omega_y^2 + I_{zz}^2\omega_z^2 = L_0^2,$$

el primero de los cuales se denomina elipsoide de Poinsot. Además, como explicamos, la punta de vector velocidad angular permanece sobre un plano fijo. Notemos además que la normal al elipsoide de Poinsot donde está  $\vec{\omega}$  es  $\vec{n} = I_{xx}\omega_x\hat{i} + I_{yy}\omega_y\hat{j} + I_{zz}\omega_z\hat{k}$  o sea precisamente el momentum angular, de modo que el plano invariable es tangente al elipsoide de Poinsot. El cuadro que sigue de aquí es que el elipsoide de Poinsot, que se mueve junto con el cuerpo, rueda sin deslizar sobre el plano invariable. Este movimiento, bastante complicado, representa el movimiento de un cuerpo rígido con torque nulo. Desafortunadamente las ecuaciones para  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  resultan elípticas (complicadas) por lo cual no ahondaremos más aquí. Si se interesa vea [6, (pag.378)]. Sin embargo, el problema se simplifica si el sólido rígido es de simetría de revolución.

### 3.3.3. Cuerpo simétrico

Supondremos ahora que el cuerpo tiene simetría de revolución de modo que

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{yy} = A, \\ I_{zz} &= C. \end{aligned}$$

Ahora las ecuaciones de Euler se simplifican a

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (A - C)\omega_y\omega_z &= 0 \\ A\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= 0 \\ C\dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$\begin{aligned} \omega_z &= \text{constante}, \\ \omega_x^2 + \omega_y^2 &= \text{constante}. \end{aligned}$$

Si denotamos por  $\alpha$  el ángulo que  $\vec{\omega}$  forma con el eje  $z$ , ver figura (3.11) sigue que

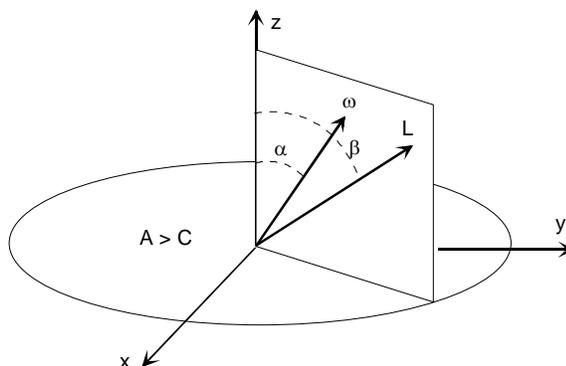


Figura 3.11: Cuerpo rígido simétrico.

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \text{constante}, \\ \omega_z &= \omega \cos \alpha, \\ \omega_\perp &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \omega \sin \alpha, \\ \tan \beta &= \frac{A}{C} \tan \alpha\end{aligned}$$

de modo que si se coloca

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_\perp \cos \phi, \\ \omega_y &= \omega_\perp \sin \phi,\end{aligned}$$

cualquiera de las dos primeras ecuaciones de Euler conduce a

$$-A\omega_\perp \sin \phi \dot{\phi} - (A - C)\omega_\perp \sin \phi \omega_z = 0,$$

o sea

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{(C - A)}{A} \omega_z, \\ \phi &= \frac{(C - A)}{A} \omega_z t.\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_\perp \cos \frac{(C - A)}{A} \omega_z t, \\ \omega_y &= \omega_\perp \sin \frac{(C - A)}{A} \omega_z t.\end{aligned}$$

### Movimiento en el espacio

De acuerdo a los resultados anteriores, se conoce como varía la velocidad angular del cuerpo respecto a ejes fijos al cuerpo. El movimiento del cuerpo en el espacio, al menos en su descripción cualitativa se deduce del hecho que el momentum angular es constante. La dirección del eje  $z$ , el momentum angular y la velocidad angular permanecen sobre un plano formando ángulos constantes entre ellos, de manera que ese plano debe girar en torno a la línea del momentum angular, con cierta velocidad angular que llamaremos  $\Omega$ . Se forman entonces dos conos. El cono que describe  $\vec{\omega}$  al girar en torno a  $\vec{L}_0$ , llamado cono del espacio porque es un cono fijo. El cono que describe  $\vec{\omega}$  en torno al eje  $z$ , llamado cono del cuerpo, porque se mueve de la misma manera que el cuerpo. Las figuras siguientes ilustran esos conos para los dos casos,  $A > C$  y  $A < C$ .

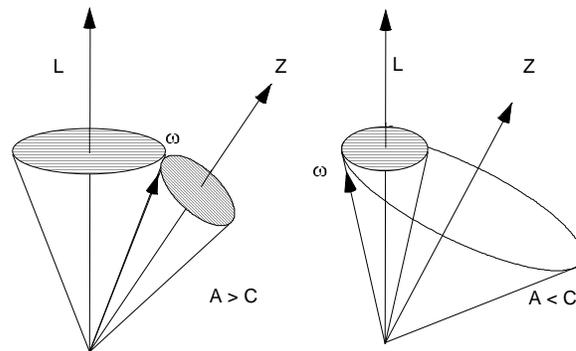
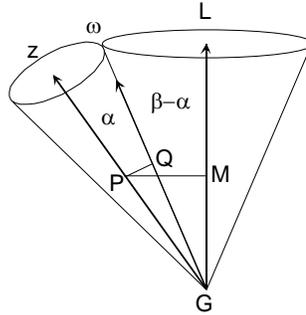


Figura 3.12: Conos del espacio y del cuerpo

Entonces, mirado desde un sistema inercial,  $\vec{\omega}$  precesa en torno de  $\vec{L}$ , formando un cono fijo en el espacio. Además el cono que forma  $\vec{\omega}$  en torno a  $z$ , rueda sin deslizar sobre el cono fijo al espacio. Rueda sin deslizar porque todos los puntos del cuerpo rígido a lo largo de  $\vec{\omega}$  tienen velocidad nula, ver figura (??).



Cono fijo y del espacio.

Tenemos entonces, un problema de cinemática. Sea  $\Omega$  la velocidad angular de  $z$  en torno a  $\vec{L}$ , entonces

$$v_P = \Omega \cdot PM = \omega \cdot PQ$$

pero

$$\frac{PQ}{PG} = \sin \alpha,$$

$$\frac{PM}{PG} = \sin \beta,$$

por lo tanto

$$\Omega = \frac{PQ}{PM} \omega = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \omega,$$

pero  $\tan \beta = (A/C) \tan \alpha$  y puede obtenerse

$$\Omega = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \beta}}{\tan \beta} \omega,$$

$$= \omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

o bien con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}.$$

### ¿Es el movimiento del cuerpo periódico?

Con respecto a la figura anterior, la velocidad angular del cuerpo puede descomponerse de la siguiente manera

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k} + \Omega \hat{k}_0$$

donde  $\hat{k}_0$  es unitario en la dirección de  $\vec{L}_0$ . De modo que

$$\vec{\omega} \cdot \hat{k} = \dot{\phi} + \Omega \hat{k}_0 \cdot \hat{k}$$

o sea

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \Omega \hat{k}_0 \cdot \hat{k} - \vec{\omega} \cdot \hat{k} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \omega \cos \beta - \omega \cos \alpha \\ &= \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \omega - \omega \cos \alpha \\ &= \frac{C - A}{A} \omega \cos \alpha, \end{aligned}$$

como ya sabíamos.

Como explicamos el eje de simetría del cuerpo da una vuelta en un tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}},$$

pero en ese tiempo el plano que contiene  $z$ ,  $\vec{L}_0$  y  $\vec{\omega}$  ha girado respecto del cuerpo un ángulo

$$\phi = \frac{(C - A)}{A} \omega_z t = \frac{(C - A)}{A} \frac{2\pi \cos \alpha}{\sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}},$$

que no es necesariamente un múltiplo de  $2\pi$ . Supongamos  $\alpha = \pi/6$ ,  $A = \frac{1}{4}MR^2$ ,  $C = \frac{1}{2}MR^2$ , resulta

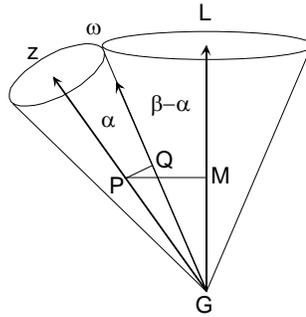
$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \frac{4}{13} \frac{\pi}{\omega} \sqrt{13}, \\ \phi &= \frac{(C - A)}{A} \frac{2\pi \cos \alpha}{\sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \frac{2\pi}{13} \sqrt{3} \sqrt{13} = 0,960\,769\pi \end{aligned}$$

$$0,08135 \times 2 = 0,1627\pi$$

### Otro modo de averiguar sobre el giro del cuerpo sobre su eje

El como del cuerpo rueda sin deslizar sobre el cono del espacio. El punto  $Q$  describe una circunferencia de perímetro

$$2\pi GQ \sin(\beta - \alpha).$$



Cono fijo y del espacio.

Este perímetro debe igualar a  $\phi$  veces el radio de la circunferencia del cono del cuerpo cuyo radio es

$$GQ \sin \alpha.$$

Al igualar se obtiene

$$\begin{aligned} \phi \omega \sin \alpha &= 2\pi \omega \sin(\beta - \alpha), \\ \tan \beta &= \frac{A}{C} \tan \alpha \end{aligned}$$

que junto con  $\tan \beta = \frac{A}{C} \tan \alpha$ , conduce a (haga el desarrollo)

$$\phi = \frac{(C - A)}{A} \frac{2\pi \cos \alpha}{\sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}},$$

salvo un signo que es irrelevante.

### 3.3.4. Trompo

Este caso del movimiento de un cuerpo rígido simétrico con un punto fijo, y a diferencia del último caso, sometido al torque que ejerce su peso. Considere entonces un trompo simétrico ( $I_{xx} = I_{yy}$ ) que mantiene su púa

fija. Para los ángulos  $\theta, \phi, \psi$  indicados en la figura (3.13), siendo  $M$  su masa,  $h$  la distancia de la púa al centro de masa y  $I_{xx} = I_{yy} = A, I_{zz} = C$ , los momentos de inercia, para un eje perpendicular al eje de simetría y respecto al eje de simetría, en el punto fijo, origen del sistema de coordenada. En el capítulo de ecuaciones de Lagrange, este tema será tratado de otra forma. Aquí, las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned} M\vec{a}_G &= \vec{R} + Mg\hat{k}, \\ \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \vec{\Gamma}_0^{ext}. \end{aligned}$$

Los ejes móviles son  $z$  el eje de simetría,  $x$  en el plano que contiene  $z$  y  $z_0$ ,  $y$  en el plano horizontal. La velocidad angular es

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\phi}\hat{k}_0 - \dot{\theta}\hat{j} + \dot{\psi}\hat{k} \\ &= \dot{\phi}(\cos\theta\hat{k} + \sin\theta\hat{i}) - \dot{\theta}\hat{j} + \dot{\psi}\hat{k} \\ &= -\dot{\theta}\hat{j} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{i} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{k} \end{aligned}$$

el momentum angular

$$\vec{L}_0 = -A\dot{\theta}\hat{j} + A\dot{\phi}\sin\theta\hat{i} + C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{k},$$

el torque

$$\vec{\Gamma}_0^{ext} = -Mgh\sin\theta\hat{j}.$$

La derivada del momentum angular puede hacerse con algo de manipulación algebraica. Sea  $s = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= -A\ddot{\theta}\hat{j} - A\dot{\theta}\frac{d\hat{j}}{dt} + A\ddot{\phi}\sin\theta\hat{i} + A\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\hat{i} + \\ &A\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\hat{i}}{dt} + C(\dot{s})\hat{k} + C(s)\frac{d\hat{k}}{dt}. \end{aligned}$$

Las derivadas de los vectores unitarios son

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}}{dt} &= (-\dot{\theta}\hat{j} + (\dot{\phi}\cos\theta)\hat{k}) \times \hat{i} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= (\dot{\phi}\sin\theta\hat{i} + (\dot{\phi}\cos\theta)\hat{k}) \times \hat{j} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= (-\dot{\theta}\hat{j} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{i}) \times \hat{k}, \end{aligned}$$

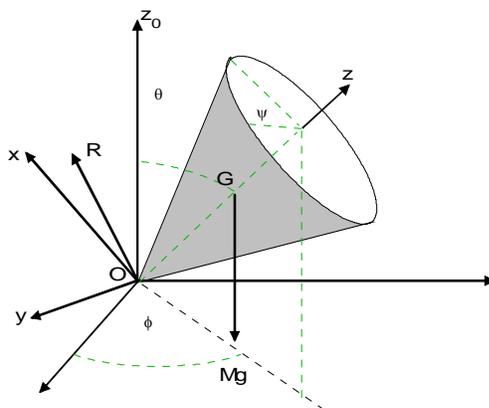


Figura 3.13: Trompo simétrico

que se reducen a

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}}{dt} &= \dot{\theta}\hat{k} + (\dot{\phi}\cos\theta)\hat{j} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= \dot{\phi}\sin\theta\hat{k} - (\dot{\phi}\cos\theta)\hat{i} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{i} - (\dot{\phi}\sin\theta)\hat{j},\end{aligned}$$

de modo que

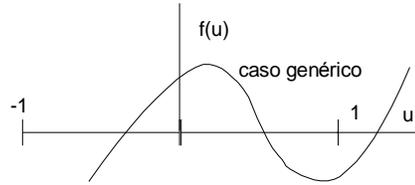
$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_0}{dt} &= -A\ddot{\theta}\hat{j} - A\dot{\theta}(\dot{\phi}\sin\theta\hat{k} - (\dot{\phi}\cos\theta)\hat{i}) + A\ddot{\phi}\sin\theta\hat{i} + A\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\hat{i} + \\ &\quad A\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\theta}\hat{k} + (\dot{\phi}\cos\theta)\hat{j}) + C\dot{s}\hat{k} + Cs(-\dot{\theta}\hat{i} - \dot{\phi}\sin\theta\hat{j}), \\ &= -A\ddot{\theta}\hat{j} + A\ddot{\phi}\sin\theta\hat{i} + 2A\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\hat{i} + \\ &\quad A\dot{\phi}\sin\theta\dot{\phi}\cos\theta\hat{j} + C\dot{s}\hat{k} + Cs(-\dot{\theta}\hat{i} - \dot{\phi}\sin\theta\hat{j}),\end{aligned}$$

entonces las componentes de la ecuación del torque son

$$\begin{aligned}A\ddot{\phi}\sin\theta + 2A\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta - Cs\dot{\theta} &= 0 \\ -A\ddot{\theta} + A\dot{\phi}\sin\theta\dot{\phi}\cos\theta - Cs\dot{\phi}\sin\theta &= -Mgh\sin\theta \\ Cs\dot{s} &= 0.\end{aligned}$$

De la primera se obtiene

$$\frac{d}{dt}(A\dot{\phi}\sin^2\theta + Cs\cos\theta) = 0$$

Figura 3.14: Raíces de  $f(u)$ 

de modo que se tienen dos cantidades conservadas

$$\begin{aligned} s &\equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante}, \\ \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = \text{constante}. \end{aligned}$$

Ahora, en vez de trabajar la segunda ecuación es preferible considerar que la energía se conserva, entonces

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}C(s)^2 + Mgh \cos \theta = \text{constante}.$$

Al eliminar  $\dot{\phi}$  a través de  $\alpha$  en la ecuación de la energía. Si se define  $u = \cos \theta$ , se obtiene (ver apéndice)

$$\dot{u}^2 = f(u) = (2E - Cs^2 - 2Mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left( \frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2,$$

polinomio cúbico en  $u$ , cuyas dos raíces entre  $-1$  y  $1$  tienen importancia en la determinación de la inclinación del eje del trompo en su movimiento. En las figuras siguientes se muestran tres casos particulares donde la forma de  $f(u)$ , la cual está determinada por las condiciones iniciales, determina el tipo de movimiento que se realiza.

En el primer caso, hay dos raíces en el intervalo  $-1, 1$  y la tercera, como es lo usual es mayor que uno. El eje el trompo oscila entre las inclinaciones dadas por esas dos raíces.

El segundo caso corresponde a una inclinación constante  $\theta_0$  del eje del trompo, caso llamado de precesión uniforme que se caracteriza por ser  $f(u_0) = 0$  y  $f'(u_0) = 0$ .

El último caso corresponde al caso de trompo dormido estable, es decir donde el eje del trompo permanece vertical y está caracterizado por ser

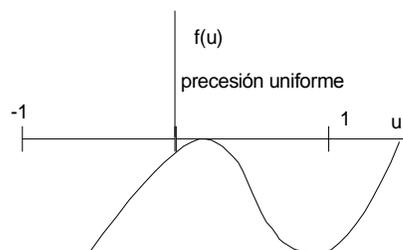


Figura 3.15: Precesión uniforme.

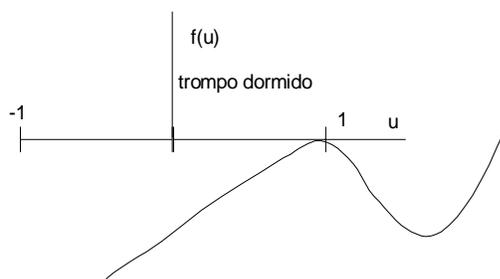


Figura 3.16: Trompo dormido.

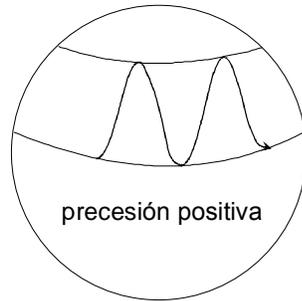


Figura 3.17: Precesión positiva.

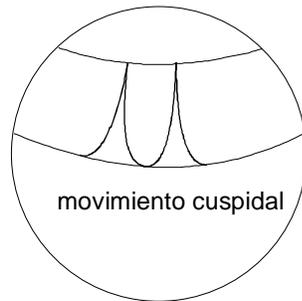


Figura 3.18: Movimiento cuspidal.

$f(1) = 0$  y  $f'(1) = 0$ . Otras características del movimiento del trompo se visualizan mejor siguiendo el movimiento del centro de masas, el cual se mueve sobre una esfera, como se indica en la figura siguiente para tres casos posibles. En el primero  $\dot{\phi} > 0$

en el segundo  $\dot{\phi}$  se anula en el punto más alto y en el tercero  $\dot{\phi}$  se anula y por lo tanto cambia de signo entre las inclinaciones máximas y mínimas del eje del trompo.

La solución completa para condiciones iniciales arbitrarias es complicada pero esbozaremos lo que se necesita hacer. Las condiciones iniciales de posición y velocidad del trompo determinan las constantes  $E$ ,  $s$  y  $\alpha$ . La inclinación del eje polar  $\theta$  se obtendría integrando la última ecuación que tiene la forma

$$dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

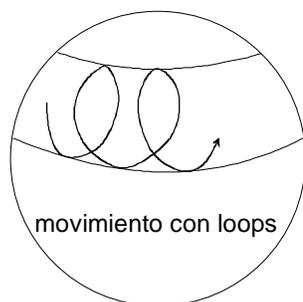


Figura 3.19: Movimiento con loops.

y que conduce a funciones elípticas. En efecto  $f(u)$  que es un polinomio cúbico puede escribirse

$$f(u) = \frac{2Mgh}{A}(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3),$$

donde supondremos que hemos ordenado las raíces de acuerdo a

$$-1 < u_1 < u_2 < 1 < u_3.$$

Sea además  $z = \sqrt{u - u_1}$  de modo que  $2z\dot{z} = \dot{u}$  entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{2Mgh}{A}(z^2)(z^2 + u_1 - u_2)(z^2 + u_1 - u_3), \\ du &= 2zdz \end{aligned}$$

de modo que

$$dt = \sqrt{\frac{2A}{Mgh}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - (u_2 - u_1))(z^2 - (u_3 - u_1))}},$$

que nos proponemos reducir a la forma canónica (ver apéndice)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad (0 < k^2 < 1).$$

Para ello la escribimos

$$\frac{2A}{Mgh} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = ((u_2 - u_1) - z^2)((u_3 - u_1) - z^2),$$

sea además  $z = \sqrt{(u_2 - u_1)}w$  entonces

$$\frac{2A}{Mgh(u_3 - u_1)} \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 = (1 - w^2) \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} w^2 \right),$$

de aquí, puede obtenerse

$$w = \operatorname{sn}(p(t - t_0)),$$

donde  $p$  y el módulo de la función elíptica  $\operatorname{sn}$  están dados por

$$p^2 = \frac{Mgh(u_3 - u_1)}{2A},$$

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

Así finalmente la solución será

$$\begin{aligned} \cos \theta &= u_1 + z^2 \\ &= u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(p(t - t_0)). \end{aligned}$$

### 3.4. Ejemplos

**EJEMPLO 3.4.1** *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $\pi/2$ . Con un movimiento de spin  $s$ . Determine la precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  para el trompo pase por  $\theta = 0$ .*

**Solución.** Podemos evaluar las constantes

$$\begin{aligned} s &\equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante}, \\ \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + Mgh \cos \theta + \frac{1}{2}Cs^2 \\ &= \frac{1}{2}Cs^2 + \frac{1}{2}A\Omega^2 \end{aligned}$$

entonces

$$f(u) = (A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{(1 - u^2)}{A} - \left( \frac{A\Omega - Csu}{A} \right)^2.$$

Una raíz es

$$u_1 = 0,$$

y la otra debe ser  $u = 1$  por lo tanto

$$A\Omega - Cs = 0.$$

---

**EJEMPLO 3.4.2** *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje vertical hacia arriba. Con un movimiento de spin  $s$  solamente. Determine la condición para que el movimiento sea estable.*

**Solución.** De acuerdo a las condiciones iniciales podemos evaluar las constantes

$$\begin{aligned} s &\equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante}, \\ \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + Mgh \cos \theta + \frac{1}{2}Cs^2 \\ &= Mgh + \frac{1}{2}Cs^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= (2Mgh - 2Mghu) \frac{(1-u^2)}{A} - \left( \frac{Cs - Csu}{A} \right)^2, \\ &= 2Mgh(1-u) \frac{(1-u^2)}{A} - \frac{C^2s^2}{A^2}(1-u)^2, \\ &= \frac{(1-u)^2}{A} \left( 2Mgh(1+u) - \frac{C^2s^2}{A} \right). \end{aligned}$$

O sea hay dos raíces repetidas  $u = 1$ , y la tercera raíz es

$$u_3 = \frac{C^2s^2}{2MghA} - 1.$$

Si la tercera raíz fuera menor que 1 entonces el eje del trompo se movería entre  $\theta = 0$  y el valor de  $\cos \theta = u_3$ . Para que ello no ocurra, trompo estable, debe ocurrir que  $u_3 > 1$  y eso impone

$$\frac{C^2s^2}{2MghA} > 2.$$

---

EJEMPLO 3.4.3 *Un trompo con momentos de inercia dados  $A, C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo  $\theta = \pi/2$ , Con un movimiento de spin  $s$  y precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  solamente. Determine la condición para que en el movimiento  $\theta$  no varíe.*

**Solución.** Nuevamente, de acuerdo a las condiciones iniciales podemos evaluar las constantes

$$\begin{aligned} s &\equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante}, \\ \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + Mgh \cos \theta + \frac{1}{2}Cs^2 \\ &= \frac{1}{2}A\Omega^2 + \frac{1}{2}Cs^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= (A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{(1-u^2)}{A} - \left( \frac{A\Omega - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{(1-u^2)}{A} - \left( \Omega - \frac{Cs}{A}u \right)^2. \end{aligned}$$

Obviamente una solución es  $u = 0$  correspondiente a  $\theta = \pi/2$ . Para que  $\theta$  no varíe,  $f(u)$  debe ser negativo en la vecindad de  $u = 0$  y eso requiere que  $f(0)$  sea un máximo relativo. Entonces la condición es

$$f'(0) = 0.$$

Haciendo el cálculo correspondiente resulta

$$\begin{aligned} (-2Mgh) \frac{1}{A} + \frac{2Cs}{A} \Omega &= 0 \\ Cs\Omega &= Mgh \end{aligned}$$


---

EJEMPLO 3.4.4 *Un trompo con momentos de inercia dados  $A, C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo  $\theta_0$ , Con un movimiento de spin  $s$  y precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  solamente. Determine la condición para que en el movimiento  $\theta$  no varíe, aumente o disminuya.*

**Solución.** Evaluamos las constantes en términos de las condiciones iniciales, esto es

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0, \\ 2E - Cs^2 &= A(\sin^2 \theta_0)\Omega^2 + 2Mgh \cos \theta_0,\end{aligned}$$

luego  $f(u)$  será

$$f(u) = (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2Mgh \cos \theta_0 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0 - Csu}{A} \right)^2.$$

Como  $f(u_0) = 0$ ,  $\theta_0$  es un extremo y el ángulo variará hacia la región donde  $f(u)$  sea positiva. De ello se deduce que la condición será  $f'(u_0) = 0$ ,  $f'(u_0) < 0$  o  $f'(u_0) > 0$  para los tres casos señalados. Entonces, derivando y evaluando en  $u_0 = \cos \theta_0$  resulta

$$\begin{aligned}f'(u_0) &= (-2Mgh) \frac{1-u_0^2}{A} + (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0) \frac{-2u_0}{A} + \frac{2Cs}{A^2} A\Omega \sin^2 \theta_0 \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta_0}{A} (-Mgh - (A\Omega^2)u_0 + Cs\Omega),\end{aligned}$$

entonces si

$$-A\Omega^2 u_0 + Cs\Omega - Mgh = 0,$$

hay precesión uniforme con  $\theta = \theta_0$ , si

$$A\Omega^2 u_0 - Cs\Omega + Mgh > 0,$$

el ángulo de inclinación  $\theta$  aumenta y si es negativa, disminuye.

---

**EJEMPLO 3.4.5** *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $m$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo  $\theta_0$ , Con un movimiento de spin  $s$  y precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  solamente. Determine la condición para que debe cumplir  $\Omega$  para que en el movimiento siguiente  $\theta$  aumente y el trompo haga loops.*

**Solución.** Si tomamos condiciones iniciales en  $\theta_1$ , dados  $\dot{\theta}_1 = 0$ ,  $s$ ,  $\dot{\phi}_1$  entonces

$$\alpha = A(\sin^2 \theta_1) \dot{\phi}_1 + Cs \cos \theta_1.$$

Para que la precesión se anule en el intervalo  $(\theta_1, \theta_2)$  debe existir un ángulo  $\theta_3$  tal que  $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$  de modo

$$\alpha = A(\sin^2 \theta_1) \dot{\phi}_1 + Cs \cos \theta_1 = Cs \cos \theta_3$$

es decir

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= u_3 = \frac{\alpha}{Cs}, \\ \left| \frac{\alpha}{Cs} \right| &< 1. \end{aligned}$$

Esta condición puede escribirse

$$-1 < \frac{A(\sin^2 \theta_1) \dot{\phi}_1 + Cs \cos \theta_1}{Cs} < 1$$

o bien, si el spin es positivo

$$-\frac{Cs}{1 - \cos \theta_1} < A \dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos \theta_1)}$$

Aquí  $u_3 = \cos \theta_3$  donde  $\theta_3$  es el hipotético ángulo donde  $\dot{\phi}_3 = 0$  y debería estar entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  para que haya loops. Si hay dos raíces  $\cos \theta_1$  y  $\cos \theta_2$  en el intervalo fundamental  $(-1, 1)$  la condición que falta imponer es que  $u_3$  esté entre ellas lo que se traduce en que debe ser

$$f(u_3) > 0$$

Como

$$f(u) = (2E - Cs^2 - 2mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left( \frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2$$

entonces

$$f(u_3) = (2E - Cs^2 - 2mghu_3) \frac{1 - u_3^2}{A} > 0$$

implica

$$f(u_3) > 0 \implies 2E - Cs^2 - 2mghu_3 > 0$$

que es la condición que falta. Para colocarla en términos de las condiciones iniciales (con  $\dot{\theta}_1 = 0$ )

$$2E - Cs^2 - 2mghu_3 = A\dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2mgh \cos \theta_1 - 2mgh \frac{A(\sin^2 \theta_1)\dot{\phi}_1 + Cs \cos \theta_1}{Cs} > 0$$

que se reduce a

$$0 < \dot{\phi}_1 \left( \dot{\phi}_1 - \frac{2mgh}{Cs} \right).$$

Del ejemplo anterior, para que  $\theta$  aumente, se requiere además que

$$A\dot{\phi}_1^2 \cos \theta_1 - Cs\dot{\phi}_1 + mgh > 0,$$

esto es tenemos tres condiciones (para  $s > 0$ )

$$-\frac{Cs}{1 - \cos \theta_1} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos \theta_1)}, \quad (a)$$

$$0 < \dot{\phi}_1 \left( \dot{\phi}_1 - \frac{2mgh}{Cs} \right), \quad (b)$$

$$0 < A\dot{\phi}_1^2 \cos \theta_1 - Cs\dot{\phi}_1 + Mgh \quad (c)$$

Si  $\dot{\phi}_1 < 0$  y  $\theta_1 < \pi/2$ , (b) y (c) se satisfacen, (a) se reduce a

$$-\frac{Cs}{1 - \cos \theta_1} < A\dot{\phi}_1$$

Si  $\dot{\phi}_1 < 0$  y  $\theta_1 > \pi/2$ , (b) se satisface, y las condiciones son

$$-\frac{Cs}{1 - \cos \theta_1} < A\dot{\phi}_1.$$

$$0 > A\dot{\phi}_1^2 |\cos \theta_1| + Cs\dot{\phi}_1 - mgh.$$

De la última puede obtenerse que

$$-\frac{Cs}{2|\cos \theta_1|} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4A|\cos \theta_1|mgh}{C^2s^2}} \right) < A\dot{\phi}_1$$

y

$$-\frac{Cs}{1 + |\cos \theta_1|} < A\dot{\phi}_1$$

Pero

$$\frac{Cs}{2|\cos\theta_1|} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4A|\cos\theta_1|mgh}{C^2s^2}} \right) > \frac{Cs}{|\cos\theta_1|} > \frac{Cs}{1 + |\cos\theta_1|},$$

luego las dos condiciones se satisfacen si

$$-\frac{Cs}{1 + |\cos\theta_1|} < A\dot{\phi}_1.$$

En consecuencia para  $s > 0$ , durante el movimiento siguiente  $\theta$  aumentará y el trompo realizará loops si se satisface la condición anterior, cualquiera sea el ángulo de inclinación inicial  $\theta_1$ .

---

**EJEMPLO 3.4.6** Para tener un caso concreto, sean  $s = \sqrt{\frac{g}{h}}$ ,  $C = \frac{1}{2}mh^2$ ,  $A = \frac{5}{4}mh^2$ ,  $\theta(0) = \pi/3$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ . Determine algún valor de  $\phi(0)$  para que el ángulo aumente y el trompo realice loops.

**Solución.** Debe ser

$$0 > \dot{\phi}(0) > -\frac{Cs/A}{1 + |\cos\pi/3|} > -\frac{4}{15}\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)},$$

sea entonces  $\dot{\phi}(0) = -\frac{2}{15}\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}$ , luego

$$\alpha = A(\sin^2\pi/3)\left(-\frac{2}{15}\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}\right) + Cs\cos\pi/3 = \frac{1}{8}mh^2\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}$$

$$2E - Cs^2 = \frac{61}{60}mhg,$$

de aquí puede obtenerse

$$f(u) = \frac{1}{300}\frac{g}{h}(241 - 292u^2 - 456u + 480u^3),$$

cuyas raíces son  $u = -0,94938$ ,  $u = 0,5$ ,  $u = 1,0577$  luego el trompo oscila entre los ángulos  $60^\circ$  y  $161,7^\circ$  y la precesión se anula en

$$\cos\theta_3 = \frac{\alpha}{Cs} = \frac{1}{4},$$

o sea en  $\theta_3 = 75,522^\circ$ .

**EJEMPLO 3.4.7** *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $m$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo  $\theta_0$ , Con un movimiento de spin  $s$  y precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  solamente. Determine la condición para que debe cumplir  $\Omega$  para que en el movimiento siguiente  $\theta$  disminuya y el trompo haga loops.*

**Solución.** A diferencia del ejemplo anterior, ahora se desea que el ángulo de inclinación  $\theta$  disminuya. Si tomamos condiciones iniciales en  $\theta_1$ , dados  $\dot{\theta}_1 = 0$ ,  $s$ ,  $\dot{\phi}_1$  entonces similarmente se obtendrá

$$-1 < \frac{A(\sin^2 \theta_1)\dot{\phi}_1 + Cs \cos \theta_1}{Cs} < 1$$

o bien, si el spin es positivo

$$-\frac{Cs}{1 - \cos \theta_1} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos \theta_1)}$$

Similarmente  $f(u_3) > 0$  implica

$$0 < \dot{\phi}_1\left(\dot{\phi}_1 - \frac{2mgh}{Cs}\right).$$

Ahora, para que  $\theta$  disminuya se requiere además que

$$A\dot{\phi}_1^2 \cos \theta_1 - Cs\dot{\phi}_1 + mgh < 0,$$

esto es tenemos tres condiciones (para  $s > 0$ )

$$-\frac{Cs}{1 - \cos \theta_1} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos \theta_1)}, \quad (a))$$

$$0 < \dot{\phi}_1\left(\dot{\phi}_1 - \frac{2mgh}{Cs}\right), \quad (b))$$

$$0 > A\dot{\phi}_1^2 \cos \theta_1 - Cs\dot{\phi}_1 + mgh. \quad (c))$$

Si  $s > 0$ ,  $\dot{\phi}_1 < 0$  y  $\theta_1 < \pi/2$ , no es posible satisfacer (c).

Si  $s > 0$ ,  $\dot{\phi}_1 < 0$  y  $\theta_1 > \pi/2$ , (b) se satisface automáticamente y (c) se satisface si

$$0 > -A\dot{\phi}_1^2 |\cos \theta_1| - Cs\dot{\phi}_1 + mgh,$$

o

$$0 < A\dot{\phi}_1^2 |\cos \theta_1| + Cs\dot{\phi}_1 - mgh,$$

y esto requiere

$$A\dot{\phi}_1 < \frac{1}{2|\cos \theta_1|} \left( -Cs - \sqrt{(C^2s^2 + 4A|\cos \theta_1|mgh)} \right),$$

además de

$$-\frac{Cs}{1 + |\cos \theta_1|} < A\dot{\phi}_1,$$

pero  $\frac{1}{2|\cos \theta_1|} \left( Cs + \sqrt{(C^2s^2 + 4A|\cos \theta_1|mgh)} \right) > \frac{Cs}{|\cos \theta_1|} > \frac{Cs}{1+|\cos \theta_1|}$ , de modo que este caso no es posible.

Resta entonces analizar la posibilidad  $s > 0$ , y  $\dot{\phi}_1 > 0$ . Se deduce entonces que

$$A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos \theta_1)}, \quad (a)$$

$$\dot{\phi}_1 > \frac{2mgh}{Cs}, \quad (b)$$

$$0 > A\dot{\phi}_1^2 \cos \theta_1 - Cs\dot{\phi}_1 + mgh. \quad (c)$$

Para poder satisfacer (a) y (b) es condición necesaria que

$$\frac{2mghA}{Cs} < \frac{Cs}{1 + \cos \theta_1},$$

y que  $\dot{\phi}_1$  esté entre las raíces de

$$A\dot{\phi}_1^2 \cos \theta_1 - Cs\dot{\phi}_1 + mgh = 0,$$

en el caso que  $\theta_1 < \pi/2$ . (Usted podrá comprobar que ambas raíces son reales.)

Entonces si  $s > 0$  y  $\theta_1 < \pi/2$  deben cumplirse

$$\frac{2mghA}{Cs} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos \theta_1)}$$

$$\frac{Cs}{2 \cos \theta_1} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4A(\cos \theta_1)mgh}{C^2s^2}} \right) < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{2 \cos \theta_1} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4A(\cos \theta_1)mgh}{C^2s^2}} \right).$$

Puede probarse que

$$\frac{2mghA}{Cs} > \frac{Cs}{2\cos\theta_1} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4A(\cos\theta_1)mgh}{C^2s^2}} \right),$$

y

$$\frac{Cs}{(1 + \cos\theta_1)} < \frac{Cs}{2\cos\theta_1} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4A(\cos\theta_1)mgh}{C^2s^2}} \right),$$

entonces es suficiente que

$$\frac{2mghA}{Cs} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos\theta_1)}.$$

El caso que resta analizar es si  $s > 0$  y  $\theta_1 > \pi/2$  entonces deben cumplirse

$$\frac{2mghA}{Cs} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{1 - |\cos\theta_1|}$$

y

$$0 > -A\dot{\phi}_1^2 |\cos\theta_1| - Cs\dot{\phi}_1 + mgh,$$

o

$$0 < A\dot{\phi}_1^2 |\cos\theta_1| + Cs\dot{\phi}_1 - mgh,$$

es decir  $\dot{\phi}_1$  debe ser mayor que la raíz positiva entonces

$$\frac{Cs}{2|\cos\theta_1|} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4Amgh|\cos\theta_1|}{C^2s^2}} \right) < A\dot{\phi}_1$$

pero es fácil establecer que

$$\frac{Cs}{2|\cos\theta_1|} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4A|\cos\theta_1|mgh}{C^2s^2}} \right) < \frac{2mghA}{Cs},$$

luego la condición necesaria es

$$\frac{2mghA}{Cs} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{1 - |\cos\theta_1|}$$

EJEMPLO 3.4.8 Un trompo con  $A = Mh^2$ ,  $C = 2Mh^2$ , baila con precesión uniforme con  $\theta = \pi/2$  y precesión  $\Omega$ . Si repentinamente la precesión se duplica, determine el movimiento siguiente.

**Solución.** Para precesión uniforme tenemos

$$\begin{aligned} -A\Omega^2 u_0 + Cs\Omega - Mgh &= 0, \\ u_0 &= 0, \end{aligned}$$

de donde despejamos el spin

$$Cs = \frac{Mgh}{\Omega}.$$

Calculamos ahora con  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\dot{\phi}_0 = 2\Omega$

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0 = 2A\Omega, \\ 2E - Cs^2 &= 4A\Omega^2, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (4A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{2A\Omega - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (4A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{2A\Omega - \frac{Mgh}{\Omega}u}{A} \right)^2, \\ &= (Mghu - 2A\Omega^2) u \frac{2A\Omega^2 u - Mgh}{\Omega^2 A^2}, \end{aligned}$$

de donde las raíces son

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \frac{2A\Omega^2}{Mgh} = \frac{2h\Omega^2}{g}, \\ u_3 &= \frac{Mgh}{2A\Omega^2} = \frac{g}{2h\Omega^2}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} A\dot{\phi} \sin^2 \theta &= 2A\Omega - Cs \cos \theta, \\ &= 2Mh^2 \left( \Omega - \frac{g}{2h\Omega} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Hay dos casos:

- $\frac{2h\Omega^2}{g} > 1$ , las raíces son que dan los extremos son

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_3 &= \frac{g}{2h\Omega^2} < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\theta_3) &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_3} \left( \Omega - \frac{g}{2h\Omega} \cos \theta_3 \right), \\ &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_3} \left( \Omega - \frac{g^2}{4h^2\Omega^3} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_3} \Omega \left( 1 - \frac{g^2}{4h^2\Omega^4} \right) > 0.$$

- $\frac{g}{2h\Omega^2} > 1$ , las raíces son que dan los extremos son

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \frac{2h\Omega^2}{g} < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\theta_2) &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_2} \left( \Omega - \frac{g}{2h\Omega} \cos \theta_2 \right), \\ &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_2} \left( \Omega - \frac{g}{2h\Omega} \frac{2h\Omega^2}{g} \right) = 0, \end{aligned}$$

*es un movimiento cuspidal*

## 3.5. Movimiento con loops

### 3.5.1. Resumen

En los ejemplos anteriores se han establecido las condiciones para que el trompo, partiendo desde una posición extrema de su inclinación, realice loops, es decir que la precesión  $\dot{\phi}$  se anule entre las posiciones extremas. En resumen se probó que las condiciones son

- a) si  $s > 0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_1 < 0$ ,  $\theta(0) = \theta_1$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$  el ángulo de inclinación  $\theta$  aumentará y hay loops si

$$-\frac{Cs}{1 - \cos \theta_1} < A\dot{\phi}_1 < 0.$$

- b) si  $s > 0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_1 > 0$ ,  $\theta(0) = \theta_1$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$  el ángulo de inclinación  $\theta$  disminuirá y hay loops si

$$\frac{2mghA}{Cs} < A\dot{\phi}_1 < \frac{Cs}{(1 + \cos \theta_1)},$$

lo cual es posible solamente si

$$2mghA < \frac{C^2s^2}{(1 + \cos \theta_1)}.$$

### 3.6. Ejercicios

EJERCICIO 3.6.1 (*Synge y Griffith, [6]*) Un cono sólido de altura  $b$  y semi ángulo en el vértice  $\alpha$  rueda en movimiento estacionario sobre un plano rugoso horizontal de modo que la línea de contacto rota con velocidad angular  $\Omega$  en torno de la vertical. Demuestre que la reacción de la superficie sobre el cono equivale a una fuerza que corta la generatriz de contacto a distancia

$$\frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{k^2\Omega^2}{g} \cot \alpha$$

de su vértice, siendo  $k$  el radio de giro del cono ( $I = mk^2$ ) en torno a la generatriz. Deduzca que el valor máximo posible de  $\Omega$  es

$$\frac{1}{2k \cos \alpha} \sqrt{gb(1 + 3 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}.$$

EJERCICIO 3.6.2 (*Synge y Griffith*) Una placa delgada elíptica de semieje  $a, b$  ( $a \geq b$ ) puede moverse libremente en torno de su centro que está fijo. Es colocada en movimiento dándole una velocidad angular de magnitud  $n$  en torno de un eje sobre su plano, igualmente inclinado respecto a ambos

semiejes de la elipse. Demuestre que el eje instantáneo de rotación, volverá a estar sobre el plano de la elipse después de un tiempo

$$2 \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 - x^4}} dx,$$

siendo

$$\lambda^2 = \frac{n^2 a^2 - b^2}{2 a^2 + b^2}.$$

**EJERCICIO 3.6.3** Considere dos cuerpos rígidos que chocan de modo que existe una tangente común a las superficies en el punto de contacto, donde se desarrolla una fuerza normal y posiblemente otra tangente (de roce), ver fig.(3.22). Establezca la equivalencia entre conservación de energía (choque elástico) y coeficiente de restitución unidad ( $e = 1$ ). Otros ejemplos de

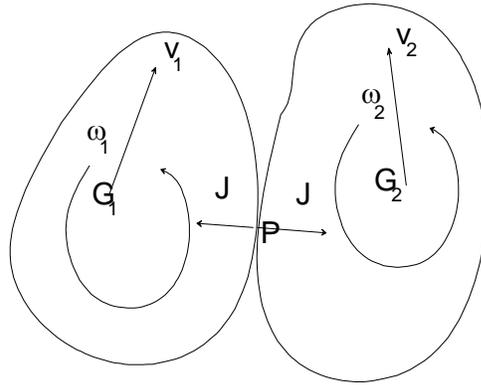


Figura 3.20: Choque de cuerpos rígidos

la dinámica de los cuerpos rígidos, tales como el movimiento del trompo simétrico bajo la acción de su peso y de la reacción en su púa, se estudiarán en el capítulo sobre ecuaciones de Lagrange, pues ese método tiene, en general, ventajas respecto a la formulación newtoniana usual.

**EJERCICIO 3.6.4** Una semiesfera homogénea de radio  $a$  está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa, sobre la cual la superficie semi esférica, se apoya. La semiesfera comienza a moverse

partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son  $\omega = \sqrt{\frac{15}{8}}g/a$ ,  $v = \frac{3}{8}a\omega$  respectivamente. Demuestre además durante el movimiento siguiente, el ángulo entre la base y la horizontal no excede de  $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$ .

EJERCICIO 3.6.5 Un disco uniforme de radio  $a$  que está rotando con rapidez angular inicial  $\Omega$  alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es  $\mu$ . Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo  $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$ .

EJERCICIO 3.6.6 Un trompo con momentos de inercia  $A = 5Mh^2/4$ ,  $C = Mh^2/2$  se coloca en movimiento con su eje horizontal  $\theta = \pi/2$ . El spin  $s$  es dado. Determine los valores de la precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  para los cuales  $\theta$  aumentará, disminuirá o permanecerá constante.

EJERCICIO 3.6.7 Un trompo con momentos de inercia  $A = 5Mh^2/4$ ,  $C = Mh^2/2$  se coloca en movimiento con su eje horizontal  $\theta = \pi/2$ . El spin  $s$  es dado. Si la precesión inicial es  $\dot{\phi}(0) = 0$  determine los extremos del ángulo  $\theta$  para el movimiento siguiente.

EJERCICIO 3.6.8 Un trompo con momentos de inercia  $A = 5Mh^2/4$ ,  $C = Mh^2/2$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $\theta = \pi/3$ . El spin  $s$  es dado. Si la precesión inicial es  $\dot{\phi}(0) = 0$  determine los extremos del ángulo  $\theta$  para el movimiento siguiente.

EJERCICIO 3.6.9 Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $\theta$ . Determine la relación que debe haber entre el spin  $s$  y la precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  para que el ángulo  $\theta$  no varíe. (Precesión uniforme)

EJERCICIO 3.6.10 Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $\theta_0$ . Si el trompo tiene spin solamente, determine los valores extremos del ángulo  $\theta$ . (Movimiento cuspidal)

EJERCICIO 3.6.11 Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje vertical hacia arriba ( $\theta_0 = 0$ ). Si

el trompo tiene spin solamente, determine los valores del spin para los cuales el trompo baila establemente. (Movimiento de trompo dormido)

EJERCICIO 3.6.12 Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  baila en precesión uniforme  $\dot{\phi} = \Omega$  con su eje inclinado un ángulo  $\theta$ . Si repentinamente el spin se duplica determine los ángulos extremos de inclinación del eje del trompo.

### 3.6. Los problemas resueltos

EJERCICIO 3.6.1 En el movimiento de un cuerpo rígido simétrico (es decir con  $A = B$ ) bajo la acción de la reacción en el centro de masas solamente, ver fig.(3.21), pruebe que:

- La magnitud de la velocidad angular del cuerpo permanece constante.
- La velocidad angular  $\vec{\omega}$  del cuerpo describe un cono en torno del eje de simetría de cuerpo (eje  $z$ ) con velocidad angular relativa al cuerpo  $\vec{n} = (C - A)\omega_z \hat{k}/A$ .
- El eje de simetría del cuerpo (eje  $z$ ) describe un cono en torno a la dirección fija del momentum angular  $\vec{L}_G$ , con velocidad angular de magnitud  $\Omega = \omega \sqrt{\sin^2 \alpha + (C/A)^2 \cos^2 \alpha}$  siendo  $\alpha$  el ángulo constante que forma  $\vec{\omega}$  con el eje  $z$ .

**Solución.** Para ejes principales  $GXYZ$  fijos al cuerpo, podemos utilizar las ecuaciones de Euler donde el torque es nulo, por lo tanto

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G = 0 \Rightarrow \vec{L}_G = \text{constante.}$$

En componentes

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z &= 0, \\ B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= 0, \\ C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y &= 0, \end{aligned}$$

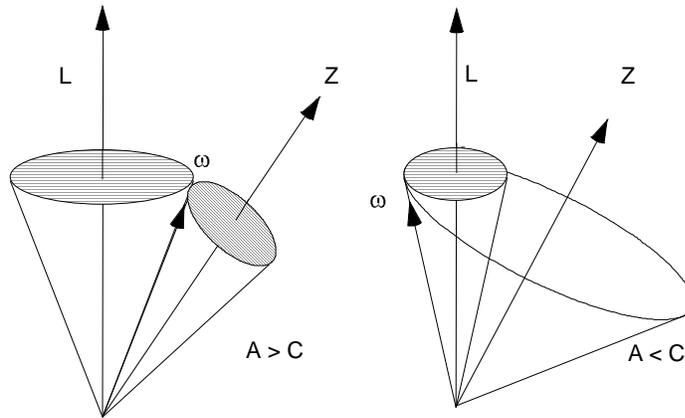


Figura 3.21: Conos del espacio y del cuerpo

pero  $A = B$ , de modo que

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (A - C)\omega_y\omega_z &= 0, \\ A\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= 0, \\ C\dot{\omega}_z &= 0, \end{aligned}$$

de aquí se deduce  $\omega_z$  es constante. De las dos primeras se deduce que

$$\omega_x\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\omega}_y = 0,$$

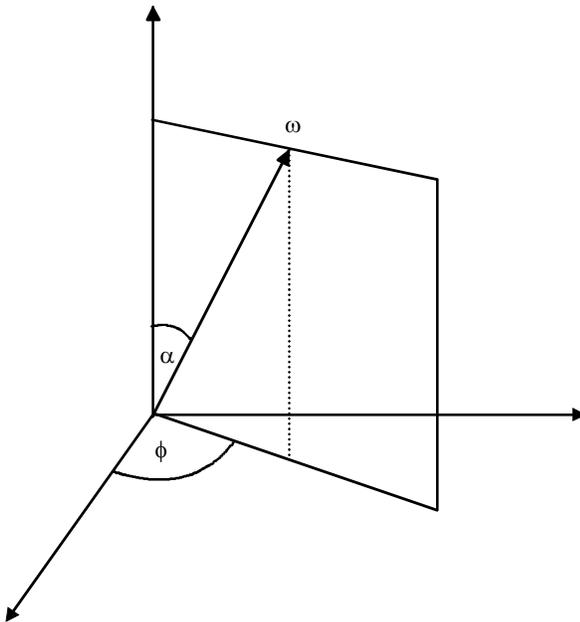
de donde

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{constante},$$

y luego

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \text{ es constante.}$$

La figura



nos dice entonces que

$$\omega_x = \omega \sin \alpha \cos \phi,$$

$$\omega_y = \omega \sin \alpha \sin \phi,$$

reemplazando en la primera ecuación de Euler  $A\dot{\omega}_x - (A-C)\omega_y\omega_z = 0$  resulta

$$-A\omega \sin \alpha (\sin \phi) \dot{\phi} - (A-C)(\omega \sin \alpha \sin \phi)(\omega \cos \alpha) = 0,$$

de donde

$$\dot{\phi} = \frac{(C-A)(\omega \cos \alpha)}{A} = \frac{(C-A)\omega_z}{A}.$$

---

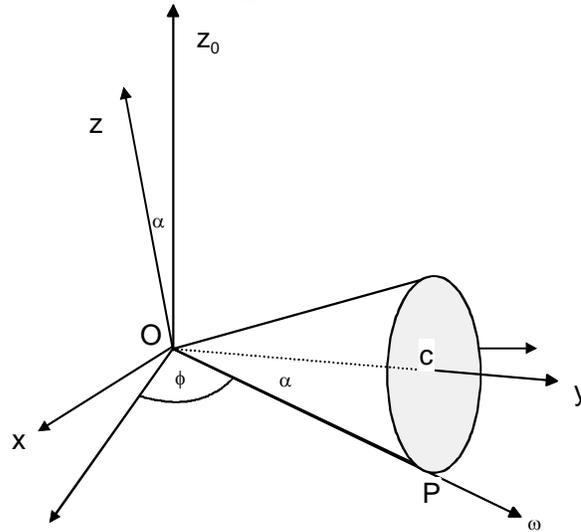
**EJERCICIO 3.6.2** (*Synge y Griffith, [6]*) Un cono sólido de altura  $b$  y semi ángulo en el vértice  $\alpha$  rueda en movimiento estacionario sobre un plano rugoso horizontal de modo que la línea de contacto rota con velocidad angular  $\Omega$  en torno de la vertical. Demuestre que la reacción de la superficie sobre el cono equivale a una fuerza que corta la generatriz de contacto a distancia

$$\frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{k^2 \Omega^2}{g} \cot \alpha$$

de su vértice, siendo  $k$  el radio de giro del cono ( $I = mk^2$ ) en torno a la generatriz. Deduzca que el valor máximo posible de  $\Omega$  es

$$\frac{1}{2k \cos \alpha} \sqrt{gb(1 + 3 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}.$$

**Solución.** Con relación a la figura



usemos los ejes principales  $OXYZ$ . La matriz de inercia en  $O$  será de la forma

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \text{ con } I_{xx} = I_{zz}.$$

La velocidad angular del cuerpo está en la dirección de la generatriz de contacto de modo que

$$\vec{\omega} = \omega \cos \alpha \hat{j} - \omega \sin \alpha \hat{k},$$

y resulta

$$\vec{L}_0 = \omega I_{yy} \cos \alpha \hat{j} - \omega I_{zz} \sin \alpha \hat{k}.$$

Las derivadas de los vectores unitarios son

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{j}}{dt} &= \Omega \hat{k}_0 \times \hat{j} = -\Omega \sin(90 - \alpha) \hat{i}, \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= \Omega \hat{k}_0 \times \hat{k} = \Omega \sin(\alpha) \hat{i}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \omega I_{yy} \cos \alpha (-\Omega \sin(90 - \alpha) \hat{i}) - \omega I_{zz} \sin \alpha (\Omega \sin(\alpha) \hat{i}) \\ &= -\omega \Omega (I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha) \hat{i}.\end{aligned}$$

Por otro lado no hay aceleración vertical del centro de masa por lo tanto la reacción  $R = mg$ . El centro de masa está a distancia horizontal  $\frac{3}{4}b \cos \alpha$  del vértice 0 por lo tanto si llamamos  $h$  a la distancia a la cual actúa  $R$  tenemos que

$$\vec{\Gamma} = (-mg \frac{3}{4}b \cos \alpha + Rh) \hat{i} = -\omega \Omega (I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha) \hat{i},$$

de aquí, usando  $R = mg$ , despejamos  $h$

$$h = \frac{3}{4}b \cos \alpha - \frac{\omega \Omega}{g} \left( \frac{I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha}{m} \right).$$

Falta determinar  $\omega$ . Si evaluamos la velocidad del centro de la base del cono ella es

$$\omega b \sin \alpha = -\Omega b \cos \alpha,$$

luego

$$h = \frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{\Omega^2 \cos \alpha}{g \sin \alpha} \left( \frac{I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha}{m} \right).$$

Pero el momento de inercia respecto a la generatriz de contacto es

$$I = \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} H_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} = I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha,$$

lo que prueba lo solicitado

$$h = \frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{k^2 \Omega^2}{g} \cot \alpha.$$

Obviamente  $h \leq OP = \frac{b}{\cos \alpha}$  de manera que

$$\frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{k^2 \Omega^2}{g} \cot \alpha \leq \frac{b}{\cos \alpha},$$

de donde

$$\begin{aligned}\Omega^2 &\leq \frac{g}{k^2} \left( b \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} - \frac{3}{4} b \cos \alpha \tan \alpha \right), \\ &= \frac{gb}{k^2 \cos^2 \alpha} \left( \sin \alpha - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha \sin \alpha \right), \\ \Omega &\leq \frac{1}{2k \cos \alpha} \sqrt{gb} \sqrt{4 \sin \alpha - 3(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{2k \cos \alpha} \sqrt{gb} \sqrt{\sin \alpha + 3 \sin^3 \alpha}.\end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 3.6.3** (*Synge y Griffith*) Una placa delgada elíptica de semieje  $a, b$  ( $a \geq b$ ) puede moverse libremente en torno de su centro que está fijo. Es colocada en movimiento dándole una velocidad angular de magnitud  $n$  en torno de un eje sobre su plano, igualmente inclinado respecto a ambos semiejes de la elipse. Demuestre que el eje instantáneo de rotación, volverá a estar sobre el plano de la elipse después de un tiempo

$$T = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 - x^4}} dx,$$

siendo

$$\lambda^2 = \frac{n^2 a^2 - b^2}{2 a^2 + b^2}.$$

**Solución.** Las ecuaciones de Euler darán con  $C = A + B$

$$\begin{aligned}A\dot{\omega}_x - (B - A - B)\omega_y\omega_z &= 0, \\ B\dot{\omega}_y - (A + B - A)\omega_z\omega_x &= 0, \\ (A + B)\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y &= 0,\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z &= 0, \\ \dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x &= 0, \\ (A + B)\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y &= 0,\end{aligned}$$

de las dos primeras

$$\omega_x \dot{\omega}_x + \omega_y \dot{\omega}_y = 0,$$

de donde

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{constante} = n^2.$$

Sea además

$$\omega_x = n \cos \Psi/2, \quad \omega_y = n \sin \Psi/2$$

sustituimos en  $\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z = 0$  y obtenemos

$$-n \frac{\dot{\Psi}}{2} \sin \frac{\Psi}{2} + n \sin \frac{\Psi}{2} \omega_z = 0 \Rightarrow \omega_z = \frac{\dot{\Psi}}{2},$$

sustituimos en la tercera ecuación de Euler

$$(A+B) \frac{\ddot{\Psi}}{2} - (A-B)n^2 \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Psi}{2} = 0, \quad \text{con } \dot{\Psi}(0) = 0, \quad \Psi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

que puede escribirse

$$\ddot{\Psi} + \frac{(B-A)n^2}{(A+B)} \sin \Psi = 0, \quad \text{con } \dot{\Psi}(0) = 0, \quad \Psi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

que corresponde a la ecuación de un péndulo simple con  $\Omega^2 = \frac{(B-A)n^2}{(A+B)}$  que partió del reposo en posición horizontal. Podemos integrar obteniendo

$$\dot{\Psi}^2 - 2\Omega^2 \cos \Psi = 0 \Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = -\Omega\sqrt{2}\sqrt{\cos \Psi}$$

reordenando

$$\frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = -\Omega\sqrt{2}dt$$

y el tiempo necesario para que  $\Psi \rightarrow -\pi/2$  será

$$T = -2 \frac{1}{\Omega\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^0 \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = \frac{2}{\Omega\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}}.$$

Si elegimos los semiejes de la elipse como eje  $X, Y$  los momentos de inercia serán

$$A = I_{xx} = \int_R y^2 dm, \quad B = I_{yy} = \int_R x^2 dm, \quad C = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy},$$

notemos que para la frontera  $R$  de la región de integración

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

además

$$\begin{aligned} A &= I_{xx} = \frac{M}{\pi ab} \int_R y^2 dx dy, \\ B &= I_{yy} = \frac{M}{\pi ab} \int_R x^2 dx dy \end{aligned}$$

para reducir la región a un círculo unitario  $R'$  tomemos  $x = ax'$ ,  $y = by'$  luego

$$\begin{aligned} A &= I_{xx} = \frac{Mb^2}{\pi} \int_{R'} y'^2 dx' dy' = \frac{Mb^2}{\pi} \frac{1}{2} \int_{R'} r'^2 r' dr' d\theta = \frac{Mb^2}{4}, \\ B &= I_{yy} = \frac{Ma^2}{\pi} \int_{R'} x'^2 dx' dy' = \frac{Ma^2}{4}. \end{aligned}$$

(Hemos usado  $\int_{R'} y'^2 dx' dy' = \int_{R'} x'^2 dx' dy' = \frac{1}{2} \int_{R'} r'^2 r' dr' d\theta$ ). Entonces

$$\Omega^2 = \frac{(a^2 - b^2)n^2}{(a^2 + b^2)} = 2\lambda^2$$

o sea nuestro resultado es

$$T = -2 \frac{1}{\Omega\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^0 \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = \frac{2}{\Omega\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}}.$$

El resultado propuesto es

$$T = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 - x^4}} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} dx'$$

Me dio lata demostrarlo, pero un cálculo numérico indica que son iguales porque

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = 2.62206, \quad 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} dx = 2.62206.$$



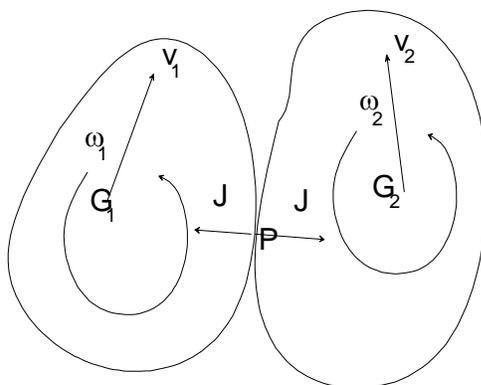


Figura 3.22: Choque de cuerpos rígidos

**EJERCICIO 3.6.4** Considere dos cuerpos rígidos que chocan de modo que existe una tangente común a las superficies en el punto de contacto, donde se desarrolla una fuerza normal y posiblemente otra tangente (de roce), ver fig.(3.22). Establezca la equivalencia entre conservación de energía (choque elástico) y coeficiente de restitución unidad ( $e = 1$ ). Otros ejemplos de la dinámica de los cuerpos rígidos, tales como el movimiento del trompo simétrico bajo la acción de su peso y de la reacción en su púa, se estudiarán en el capítulo sobre ecuaciones de Lagrange, pues ese método tiene, en general, ventajas respecto a la formulación newtoniana usual.

**Solución.** Si llamamos  $\vec{J}$  a la interacción impulsiva y  $P_1$ (y  $P_2$ ) al punto de contacto, 1 y 2 a los centros de masas e indicamos con  $+y-$  a valores de las diversas cantidades justo después y justo antes de la colisión, tenemos que

$$M_1(\vec{v}_1^+ - \vec{v}_1^-) = \vec{J}, \quad (3.8)$$

$$M_2(\vec{v}_2^+ - \vec{v}_2^-) = -\vec{J}, \quad (3.9)$$

$$H_1(\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^-) = G_1\vec{P} \times \vec{J}, \quad (3.10)$$

$$H_2(\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^-) = -G_2\vec{P} \times \vec{J}, \quad (3.11)$$

y conservación de energía

$$\frac{1}{2}M_1v_1^{+2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{+2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ =$$

$$\frac{1}{2}M_1v_1^{-2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{-2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^- . \quad (3.12)$$

De las ecuaciones (8.4) y (8.5) se obtiene

$$\vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- = (\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \cdot G_1\vec{P} \times \vec{J} ,$$

$$\vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^- = -(\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \cdot G_2\vec{P} \times \vec{J} .$$

De aquí, con algo de álgebra, puede obtenerse de la ecuación de conservación de la energía

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1^+ + \vec{v}_1^-) \cdot \vec{J} - (\vec{v}_2^+ + \vec{v}_2^-) \cdot \vec{J} &= -(\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \times G_1\vec{P} \cdot \vec{J} + \\ &+ (\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \times G_2\vec{P} \cdot \vec{J} , \end{aligned}$$

pero

$$\vec{v}_{P_1}^+ = \vec{v}_1^+ + \vec{\omega}_1^+ \times G_1\vec{P} ,$$

y similarmente las otras, entonces

$$(\vec{v}_{P_1}^+ + \vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^+ - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J} ,$$

es decir

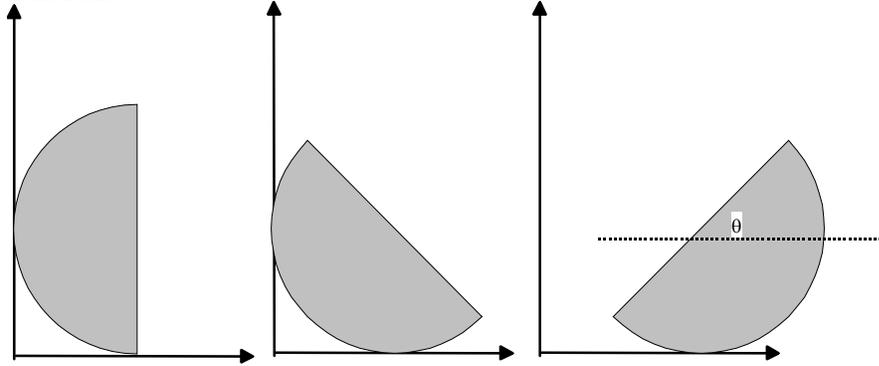
$$(\vec{v}_{P_1}^+ - \vec{v}_{P_2}^+) \cdot \vec{J} = -(\vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J} .$$

que significa coeficiente de restitución unidad, en la dirección del impulso de interacción.

---

**EJERCICIO 3.6.5** Una semiesfera homogénea de radio  $a$  está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa, sobre la cual la superficie semi esférica, se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son  $\omega = \sqrt{\frac{15}{8}}g/a$ ,  $v = \frac{3}{8}a\omega$  respectivamente. Demuestre además durante el movimiento siguiente, el ángulo entre la base y la horizontal no excede de  $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$ .

Solución.



El centro de masa del cuerpo está a distancia  $3a/8$  del centro. Mientras no despega, el cuerpo mantiene su centro fijo, y la única fuerza que realiza torque respecto a ese punto es el peso. Si en la segunda figura  $\theta$  es el ángulo que ha girado la línea que contiene el centro de masa, entonces

$$I_C \ddot{\theta} = Mg \frac{3}{8} a \cos \theta,$$

donde el momento de inercia es  $I = 2Ma^2/5$ , luego

$$\frac{2Ma^2}{5} \ddot{\theta} = Mg \frac{3}{8} a \cos \theta,$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \frac{15g}{16a} \cos \theta,$$

que podemos integrar porque

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \dot{\theta}^2,$$

obteniendo

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{15g}{16a} \sin \theta,$$

y cuando la base se coloca horizontal  $\theta = \pi/2$  resultando

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{15g}{8a}},$$

y

$$v_{CM} = \frac{3}{8} a \omega.$$

Puede probarse que en esta posición el cuerpo despegas y tiene una energía inicial (respecto a la posición inicial del centro)

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3}{8}a = 0,$$

y su momentum en la dirección horizontal es

$$P_x = M\frac{3}{8}a\omega = M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15g}{8a}}.$$

Esas dos cantidades son conservadas, pero ahora todo el cuerpo se traslada y rota, de manera que la coordenada  $x$  del centro de masa varía. Así la energía se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0,$$

además

$$\begin{aligned} M\dot{x} &= M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15g}{8a}}, \\ y_{CM} &= \frac{3a}{8}\cos\theta, \\ \dot{y}_{CM} &= -\frac{3a}{8}\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Cuando  $\theta$  sea un extremo,  $\dot{\theta} = 0$ , y en ese caso,  $\dot{y}_{CM} = 0$  y la ecuación de energía da

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15g}{8a}}\right)^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0$$

que se reduce a

$$\cos\theta = \frac{45}{128},$$

o sea  $\theta = 69.417^\circ$ .

---

**EJERCICIO 3.6.6** *Un disco uniforme de radio  $a$  que está rotando con rapidez angular inicial  $\Omega$  alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es  $\mu$ . Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo  $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$ .*

**Solución.** Si la fuerza normal está distribuida uniformemente, la que actúa sobre un elemento de área  $dA = r dr d\theta$  en polares será

$$dN = \frac{mg}{\pi a^2} r dr d\theta,$$

la cual produce un torque retardador

$$d\Gamma = -\mu r dN = -\frac{\mu mg}{\pi a^2} r^2 dr d\theta,$$

siendo el torque total

$$\Gamma = -\frac{\mu mg a^3}{\pi a^2} \frac{2\pi}{3} = -\frac{2}{3} \mu m g a$$

luego la desaceleración angular estará dada por

$$\frac{1}{2} m a^2 \alpha = -\frac{2}{3} \mu m g a \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{3} \frac{\mu g}{a},$$

luego frena cuando

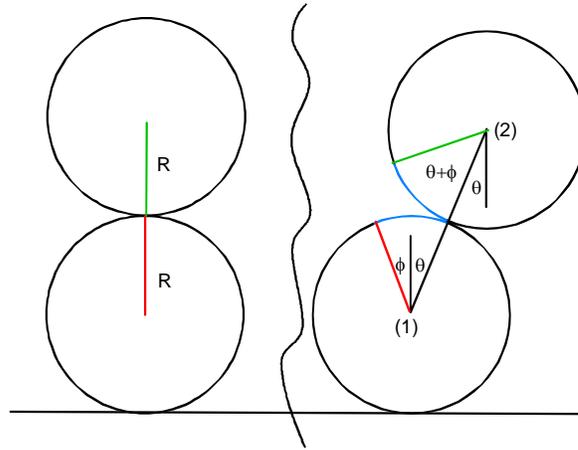
$$0 = \Omega - \frac{4}{3} \frac{\mu g}{a} t \Rightarrow t = \frac{3\Omega a}{4\mu g}.$$

---

**EJERCICIO 3.6.7** *Un cilindro sólido de radio  $R$ , descansa sobre otro igual que a su vez se apoya sobre el suelo, en equilibrio inestable. Si el sistema se perturba levemente y no hay deslizamiento en las superficies de contacto, demuestre que mientras los cilindros permanecen en contacto, el ángulo  $\theta$  que forma la línea que une los centros con la vertical satisface*

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1 - \cos \theta)}{a(17 + 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta)}.$$

**Solución.** Lamentablemente se nos coló este problema aquí que es mejor hacerlo por el método de lagrange. La figura ilustra que si el cilindro de abajo gira un ángulo  $\phi$ , el de arriba gira un ángulo  $2\theta + \phi$ . Note que los arcos azules son iguales.



Las coordenadas de los centros de masa son

$$\begin{aligned}x_1 &= -R\phi, \\y_1 &= R, \\x_2 &= -R\phi + 2R \sin \theta, \\y_2 &= R + 2R \cos \theta,\end{aligned}$$

luego las componentes de velocidad son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -R\dot{\phi}, \\ \dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= -R\dot{\phi} + 2R\dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_2 &= -2R\dot{\theta} \sin \theta.\end{aligned}$$

luego la energía cinética será

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}M((-R\dot{\phi} + 2R\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \\ & 4R^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(2\dot{\theta} + \dot{\phi})^2, \\ &= \frac{3}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + 3MR^2\dot{\theta}^2 - 2MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + MR^2\dot{\theta}\dot{\phi},\end{aligned}$$

y la potencial será

$$V = Mg2R \cos \theta,$$

de aquí

$$L = \frac{3}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + 3MR^2\dot{\theta}^2 - 2MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} - Mg2R \cos \theta,$$

luego se conserva

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 3MR^2\dot{\phi} - 2MR^2\dot{\theta} \cos \theta + MR^2\dot{\theta} = 0,$$

despejamos

$$\dot{\phi} = \frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta},$$

la energía también es constante

$$E = \frac{3}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + 3MR^2\dot{\theta}^2 - 2MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} + Mg2R \cos \theta = Mg2R,$$

reemplazamos  $\dot{\phi}$  resultando

$$\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta}\right)^2 + 3\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta}\right) \cos \theta + \dot{\theta}\left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta}\right) = \frac{2g}{R} - \frac{2g}{R} \cos \theta,$$

de donde sigue que

$$\dot{\theta}^2 = 12g \frac{1 - \cos \theta}{R(17 + 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta)}$$

---

**EJERCICIO 3.6.8** *Un trompo con momentos de inercia  $A = 5Mh^2/4$ ,  $C = Mh^2/2$  se coloca en movimiento con su eje horizontal  $\theta = \pi/2$ . El spin  $s$  es dado. Determine los valores de la precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  para los cuales  $\theta$  aumentará, disminuirá o permanecerá constante.*

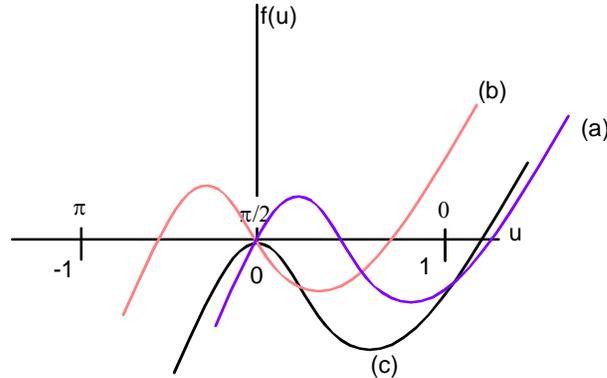
**Solución.** como siempre se evalúan las constantes

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = A\Omega^2, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2 \\ &= (A\Omega^2 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{A\Omega - Csu}{A}\right)^2 \end{aligned}$$

como se ilustra en la figura



$\theta$  aumentará (b) si  $f'(0) < 0$ , permanecerá constante si (c)  $f'(0) = 0$ , disminuirá (a) si  $f'(0) > 0$ . Evaluamos

$$f'(0) = (-2mgh)\frac{1}{A} + \frac{2Cs}{A}(\Omega) = \frac{2Cs}{A}\left(\Omega - \frac{mgh}{Cs}\right),$$

de donde  $\theta$  aumentará si  $\Omega < \frac{mgh}{Cs}$ , permanecerá constante si  $\Omega = \frac{mgh}{Cs}$ , disminuirá si  $\Omega > \frac{mgh}{Cs}$ .

---

**EJERCICIO 3.6.9** *Un trompo con momentos de inercia  $A = 5Mh^2/4$ ,  $C = Mh^2/2$  se coloca en movimiento con su eje horizontal  $\theta = \pi/2$ . El spin  $s$  es dado. Si la precesión inicial es  $\dot{\phi}(0) = 0$  determine los extremos del ángulo  $\theta$  para el movimiento siguiente.*

**Solución.** Similarmente resulta

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2Mgh \cos \theta = 0, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2Mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2 \\ &= (-2Mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{-Csu}{A}\right)^2 = u\frac{2MghAu^2 - C^2s^2u - 2MghA}{A^2} \end{aligned}$$

una raíz es  $u_1 = 0$  ( $\theta_1 = \pi/2$ ) y las otras satisfacen

$$\begin{aligned} 0 &= 2MghAu^2 - C^2s^2u - 2MghA, \\ 0 &= 10gu^2 - hs^2u - 10g \\ \cos \theta_2 &= \frac{s^2h}{20g} - \sqrt{1 + \frac{s^4h^2}{400g^2}}. \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 3.6.10** *Un trompo con momentos de inercia  $A = 5Mh^2/4$ ,  $C = Mh^2/2$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $\theta = \pi/3$ . El spin  $s$  es dado. Si la precesión inicial es  $\dot{\phi}(0) = 0$  determine los extremos del ángulo  $\theta$  para el movimiento siguiente.*

**Solución.** De nuevo la misma rutina

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2Mgh \cos \theta = 2Mgh \cos \frac{\pi}{3} = Mgh, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}Cs, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2 \\ &= Mgh(1-2u) \frac{1-u^2}{A} - \frac{C^2s^2}{4A^2} (1-2u)^2 \\ &= (-1+2u) \frac{4MghAu^2 - 4MghA + C^2s^2 - 2C^2s^2u}{4A^2} \end{aligned}$$

de donde  $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$  y las otras satisfacen

$$\begin{aligned} 0 &= 4Mgh \frac{5Mh^2}{4} u^2 - 2 \frac{M^2h^4}{4} s^2 u - 4Mgh \frac{5Mh^2}{4} + \frac{M^2h^4}{4} s^2, \\ 0 &= -2s^2uh + s^2h + 20gu^2 - 20g \Rightarrow \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{20g} \left( s^2h - \sqrt{s^4h^2 - 20s^2hg + 400g^2} \right). \end{aligned}$$


---

EJERCICIO 3.6.11 *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $\theta$ . Determine la relación que debe haber entre el spin  $s$  y la precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  para que el ángulo  $\theta$  no varíe. (Precesión uniforme)*

**Solución.** Sea  $\theta_0$  el ángulo constante. Debe ser

$$f'(u_0) = 0.$$

Derivando

$$f'(u) = (2E - Cs^2 - 2Mghu) \frac{-2u}{A} + (-2Mgh) \frac{1-u^2}{A} + \frac{2Cs}{A^2} (\alpha - Csu),$$

Pero

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2Mgh \cos \theta_0, \\ \alpha &= A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0, \end{aligned}$$

evaluando en  $u_0 = \cos \theta_0$  resulta

$$\begin{aligned} f'(u_0) &= (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0) \frac{-2 \cos \theta_0}{A} + (-2Mgh) \frac{\sin^2 \theta_0}{A} + \frac{2Cs}{A^2} (A\Omega \sin^2 \theta_0) \Rightarrow \\ 0 &= A\Omega^2 (\cos \theta_0) - Cs\Omega + Mgh. \end{aligned}$$

la relación pedida,

---

EJERCICIO 3.6.12 *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $\theta_0$ . Si el trompo tiene spin solamente, determine los valores extremos del ángulo  $\theta$ . (Movimiento cuspidal)*

**Solución.** Nuevamente

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = 2mgh \cos \theta_0, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs \cos \theta_0, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (2mgh \cos \theta_0 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{Cs \cos \theta_0 - Csu}{A} \right)^2, \\ &= \frac{(-\cos \theta_0 + u)}{A^2} (2mghAu^2 - 2mghA + C^2s^2 \cos \theta_0 - C^2s^2u), \end{aligned}$$

de donde  $\theta_1 = \theta_0$  y las otras satisfacen

$$0 = 2mghAu^2 - C^2s^2u - 2mghA + C^2s^2 \cos \theta_0,$$

de donde resulta

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{4mghA} \left( C^2s^2 - \sqrt{C^4s^4 + 16m^2g^2h^2A^2 - 8mghAC^2s^2 \cos \theta_0} \right).$$

---

**EJERCICIO 3.6.13** *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  se coloca en movimiento con su eje vertical hacia arriba ( $\theta_0 = 0$ ). Si el trompo tiene spin solamente, determine los valores del spin para los cuales el trompo baila establemente. (Movimiento de trompo dormido)*

**Solución.** Evaluamos

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2Mgh \cos \theta = 2Mgh, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2Mgh - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{Cs - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (1-u)^2 \frac{2MghAu - C^2s^2 + 2MghA}{A^2} \end{aligned}$$

donde hay dos raíces repetidas  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  y la otra debe ser mayor que uno, es decir

$$u = \frac{1}{2} \frac{C^2s^2 - 2MghA}{MghA} > 1 \implies C^2s^2 > 4MghA.$$

---

**EJERCICIO 3.6.14** *Un trompo con momentos de inercia dados  $A$ ,  $C$  y dados  $M$  y  $h$  baila en precesión uniforme  $\dot{\phi} = \Omega$  con su eje inclinado un ángulo  $\theta$ . Si repentinamente el spin  $s_0$  se duplica determine los ángulos extremos de inclinación del eje del trompo.*

**Solución.** Para precesión uniforme en ángulo  $\theta_0$  se tiene que

$$0 = A\Omega^2 (\cos \theta_0) - Cs_0\Omega + Mgh.$$

de donde

$$\Omega = \frac{1}{2A(\cos \theta_0)} \left( Cs_0 \pm \sqrt{C^2s_0^2 - 4AMgh(\cos \theta_0)} \right),$$

supondremos que ambas soluciones son reales. Las nuevas condiciones serán

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2A(\cos \theta_0)} \left( Cs_0 \pm \sqrt{C^2s_0^2 - 4AMgh(\cos \theta_0)} \right), \\ s &= 2s_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \end{aligned}$$

Ahora evaluamos

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2mgh \cos \theta_0, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2mgh \cos \theta_0 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} \\ &\quad - \left( \frac{A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0 - Csu}{A} \right)^2, \end{aligned}$$

$f(u)$  puede ser factorizada por  $\cos \theta_0 - u$  y la otra solución satisface

$$\begin{aligned} 0 &= 2MghAu^2 + (-C^2s^2 - A^2\Omega^2 \sin^2 \theta_0) u + C^2s^2 \cos \theta_0 - 2A\Omega Cs \cos^2 \theta_0 \\ &\quad - A^2\Omega^2 \cos \theta_0 + A^2\Omega^2 \cos^3 \theta_0 + 2A\Omega Cs - 2MghA. \end{aligned}$$

Lamentablemente esto no se simplifica nada aún sin reemplazamos  $\Omega =$

$$\frac{1}{2A(\cos \theta_0)} \left( Cs_0 + \sqrt{C^2s_0^2 - 4AMgh(\cos \theta_0)} \right) \text{ y } s = 2s_0.$$





# Ecuaciones de Lagrange

## 4.1. Introducción

Presentaremos las ecuaciones de Lagrange que constituyen una formulación alternativa a la formulación clásica Newtoniana, con ventajas que explicaremos. Las ecuaciones de Lagrange así como la función lagrangiano pueden ser introducidas de diversas formas. La justificación última de cualquiera de los métodos es que el formalismo conduzca a las ecuaciones correctas de movimiento del sistema (cuando ellas son conocidas). De este punto de vista pueden existir diversos lagrangianos que originen las mismas ecuaciones de movimiento. Esos lagrangianos se denominan equivalentes. Una de las formas modernas es partir del principio variacional de Hamilton buscando una función lagrangiano que satisfaga el criterio anterior. Las simetrías del sistema pueden ser de ayuda en postular una determinada función lagrangiano. En estos apuntes preferiremos partir de las ecuaciones clásicas de Newton de movimiento de un sistema y derivar de allí la formulación lagrangiana, con lo cual el principio variacional de Hamilton pasa a ser en realidad un teorema de la Mecánica Clásica. En esta formulación, el lagrangiano del sistema estará dado por  $L = K - V$ , la energía cinética menos la energía potencial del sistema. Otros casos en que ello no sea así se considerarán en particular.

## 4.2. Restricciones o vínculos

Una forma equivalente a la formulación newtoniana de la Mecánica, la constituye la formulación lagrangiana. La principal ventaja práctica que tiene esta formulación, es que de partida, el número de variables es el mínimo posible para determinar la configuración del sistema y además que no es necesario conocer el detalle de las fuerzas de vínculos para su formulación, siempre que ellas satisfagan ciertos requisitos que se explican más adelante.

### 4.2.1. Vínculos holonómicos y coordenadas generalizadas

Normalmente sobre un sistema mecánico existen restricciones o vínculos dados. Por ejemplo si se tiene un sistema rígido de partículas, las distancias entre ellas son invariables y por lo tanto las variables necesarias para su descripción serán apenas 6, independientemente del número de partículas que constituye el sistema. Los vínculos llamados de tipo holónomos permiten disminuir el número de variables de las inicialmente consideradas, por constituir *relaciones funcionales* que permitirían hacer la eliminación de variables redundantes. Rara vez se procede a eliminar variables redundantes explícitamente. En vez, razonando se decide sobre cuántas variables son necesarias y se las elige. Así, para el caso de vínculos holónomos, si el sistema tiene  $N$  partículas, existen en principio  $N$  vectores posición o  $3N$  coordenadas por determinar. La existencia de un cierto número de vínculos constantes o funciones conocidas del tiempo, hace que sea necesario un número menor de coordenadas  $n$  ( $n < 3N$ ). Denotaremos por  $q_i$  a esas coordenadas elegidas, llamadas coordenadas generalizadas del sistema. Todo los cambios virtuales posibles de posición del sistema corresponden a cambios arbitrarios de las coordenadas generalizadas, supuestas independientes. El número de coordenadas generalizadas  $n$ , es llamado el número de grados de libertad del sistema. Los cambios reales del sistema son logrados mediante cambios virtuales de las coordenadas generalizadas más los cambios que se originen en las variaciones con el tiempo de los vínculos, en el caso en que hayan vínculos variables.

### 4.2.2. Fuerzas de vínculos

La presencia de ciertos tipos de vínculos equivalen a ciertas fuerzas, normalmente desconocidas, actuando sobre algunas partículas. Por ejemplo la

condición para que una partícula permanezca sobre una superficie lisa dada es equivalente a una cierta reacción normal. La formulación lagrangiana usual, exige que las llamadas fuerzas de vínculos, realicen un trabajo total nulo cuando las partículas tienen desplazamientos (infinitésimos) compatibles con los vínculos *a tiempo fijo*. Para el ejemplo anterior, suponga que la superficie lisa tiene un movimiento dado. Si la partícula es desplazada sobre la superficie sin permitir su movimiento (a tiempo fijo), la reacción normal no realiza trabajo. Sin embargo, si el desplazamiento de la partícula es sobre la superficie que se mueve, la reacción normal realiza trabajo distinto de cero. Si las fuerzas que vinculan un sistema de partículas para que este sea un sistema rígido de partículas, obedecen el principio de acción y reacción, es muy simple demostrar que el trabajo total que realizan esas fuerzas al desplazar arbitrariamente el sistema, es nulo.

### 4.2.3. Desplazamientos virtuales

Para sistematizar la discusión llamaremos *desplazamientos virtuales compatible con los vínculos*, a los cambios de posición infinitésimos  $\delta\vec{r}_i$  asociados a cambios arbitrarios infinitésimos de las coordenadas generalizadas  $\delta q_i$  a tiempo fijo.

La diferencia entre desplazamientos virtuales  $\delta\vec{r}_i$  y desplazamientos reales  $d\vec{r}_i$  debe estar clara. Si, por definición de coordenadas generalizadas se tiene

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (4.1)$$

la diferencia señalada es

$$d\vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt,$$

y

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (4.2)$$

La diferencia puede ser importante en el caso que los vínculos sean funciones del tiempo, es decir cuando el tiempo aparezca explícitamente en (4.1).

### 4.3. Ecuaciones de Lagrange

Si se escriben las ecuaciones de Newton para las  $N$  partículas, separando las fuerzas que actúan sobre ellas en fuerzas de *vínculos* y las de otro tipo

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{vinc.}$$

La esencia de la formulación lagrangiana es que las fuerzas de vínculos no realizan trabajo virtual, es decir

$$\sum_i \vec{F}_i^{vinc.} \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

o sea

$$\delta W \equiv \sum m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i (\vec{F}_i + \vec{F}_i^{vinc.}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (4.3)$$

El resto, la obtención de las ecuaciones de Lagrange, son detalles que veremos a continuación.

Partiendo de (4.1), se deja como ejercicio demostrar la siguiente identidad.

**EJERCICIO 4.3.1** Si  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ , demuestre la identidad

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} v_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{2} v_i^2 \equiv \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Si esa identidad se multiplica por  $m_i$ ,  $\delta q_j$  y se suma en  $i, j$  se obtiene

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j \equiv \sum_{i,j} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

que sigue siendo una identidad. La *Física* recién entra ahora, al utilizar (4.3)

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j, \quad (4.4)$$

siendo  $K$  la energía cinética y

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \delta W = \sum_j \left( \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j,$$

por último, si las coordenadas generalizadas son independientes, como se ha supuesto, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K = Q_j. \quad (4.5)$$

Este conjunto de ecuaciones se conoce como las *ecuaciones de Lagrange* del sistema (en una primera versión).

### 4.3.1. Vínculos no holonómicos

Un cierto tipo de vínculo *no holonómico* puede ser tratado con mínimas variaciones con lo explicado. El caso que analizaremos consiste en restricciones adicionales lineales en las velocidades generalizadas del tipo

$$\sum_j A_{ij} \dot{q}_j + A_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p,$$

siendo los  $A_{ij}$  ciertas funciones conocidas de las coordenadas generalizadas. Por constituir relaciones en general no integrables, dichas relaciones no permiten a disminuir a priori el número de coordenadas generalizadas. Ellas imponen restricciones a las variaciones virtuales de las coordenadas generalizadas en uso, de la forma

$$\sum_j A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (4.6)$$

Se supone también que las fuerzas de vínculos realizan trabajo total nulo en los desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos holonómicos originales, y con los adicionales (4.6) no holonómicos. Así todo lo dicho anteriormente vale, salvo en lo relativo a la independencia de las coordenadas. Por lo tanto se tiene

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

junto con

$$\sum_j A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p$$

de allí, utilizando  $p$  multiplicadores de *Lagrange*,  $\lambda_i$ , se obtiene

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K + \sum_i \lambda_i A_{ij} - Q_j \right) \delta q_j = 0,$$

y considerando la idea del uso de los multiplicadores de Lagrange, se deduce que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K + \sum_i \lambda_i A_{ij} = Q_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

que junto con

$$\sum_j A_{ij} \dot{q}_j + A_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p,$$

constituyen  $n + p$  ecuaciones para las incógnitas,  $q_i, \lambda_i$ . Estas ecuaciones son las llamadas ecuaciones de Lagrange para el sistema que tiene vínculos del tipo considerado.

### Función Lagrangiano

En la formulación presentada, las ecuaciones de Lagrange se han escrito en términos de la energía cinética  $K$ . Si algunas de las fuerzas que realizan trabajo son conservativas, derivables de un potencial, la expresión del trabajo virtual puede escribirse

$$\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j = \delta W^{NC} - \delta V = \sum_j Q_j^{NC} \delta q_j - \sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j,$$

siendo  $Q_j^{NC}$  la llamada fuerza generalizada “no conservativa”. Por lo tanto, para vínculos holonómicos, las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = Q_j^{NC}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4.7)$$

siendo el lagrangiano del sistema

$$L(q, \dot{q}, t) = K(q, \dot{q}, t) - V(q, t).$$

Esta forma constituye la versión más conocida de las ecuaciones de Lagrange para un sistema con vínculos holonómicos. Se darán ejemplos en que el lagrangiano correcto no está dado por  $K - V$ . Naturalmente esos otros casos corresponden a sistemas en que las ecuaciones clásicas de movimiento no están dadas por las ecuaciones clásicas de Newton.

### 4.3.2. Condición de integrabilidad

El sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, el conjunto de las ecuaciones de Lagrange, requiere como condición para su integrabilidad que

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\} \neq 0. \quad (4.8)$$

Esa condición significa en el fondo poder despejar las aceleraciones del conjunto de ecuaciones diferenciales de Lagrange. Quedan así, excluidos en esta formulación, los lagrangianos singulares o de primer orden en las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ .

## 4.4. Sistemas Conservativos

Por definición, un sistema será llamado conservativo, si  $Q_j^{NC} = 0$ ,  $\forall j$ . Para ellos, las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.9)$$

que, escritas explícitamente son

$$\sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

lo que explica el significado de la condición de integrabilidad anterior. Es esencialmente la condición para poder despejar las aceleraciones del conjunto de ecuaciones de movimiento.

### 4.4.1. Momentos canónicos

Los momentos canónicos conjugados a las variable  $q_i$ , se define por

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

La inversión de las ecuaciones anteriores, para despejar las velocidades generalizadas en términos de los momentos canónicos (teorema de la función implícita), requiere la misma condición anterior (4.8), de modo que hay una segunda razón para excluir lagrangianos singulares de este formalismo.

### 4.4.2. El hamiltoniano del sistema

#### Transformación de Legendre

Considere como ejemplo, en una dimensión, una función convexa  $f(x)$  (con  $f''(x) > 0$ ). La transformada de Legendre de  $f(x)$ , se define por, (figura 4.1):

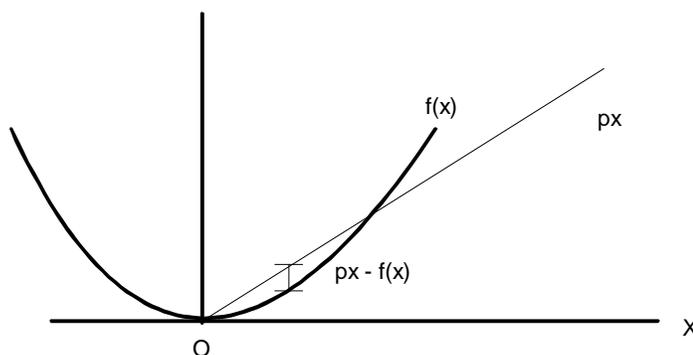


Figura 4.1: Transformada de Legendre

$$F(p) = \text{mín}(px - f(x)).$$

Dado que el mínimo ocurre cuando la derivada respecto a  $x$  sea nula, entonces

$$F(p) = px - f(x),$$

siendo

$$p = f'(x),$$

que esencialmente genera a partir de una función de variable independiente  $x$ , una función de variable independiente  $p$ . (vea Arnold [2])

- Un ejemplo de la Termodinámica. En termodinámica se utilizan transformaciones de Legendre para generar funciones termodinámicas. Considere la energía interna  $U = U(S, V)$ , la temperatura  $T = (\partial U / \partial S)_V$ . La transformada de Legendre de la energía interna es la función de Helmholtz, función de el volumen y la temperatura:

$$A(V, T) = U - TS.$$

### Función hamiltoniano

Dado un lagrangiano  $L(q, \dot{q}, t)$ , definimos su transformada de Legendre respecto a las velocidades generalizadas por

$$h = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

siendo

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Si las condiciones de invertibilidad se cumplen, podemos expresar las velocidades generalizadas en términos de los momentos. Así, eliminando las velocidades se tendría

$$H(q, p, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t),$$

el denominado hamiltoniano del sistema.

**EJEMPLO 4.4.1** Si  $g(p) = L_p f(x)$  indica la transformada de Legendre de  $f(x)$ , demuestre que:

$$L_x g(p) = f(x).$$

**Solución.** Si  $g(p) = p\bar{x} - f(\bar{x})$ , con  $p = f'(\bar{x})$ , entonces  $g'(p) = \bar{x} + \bar{x}'(p) - f'(\bar{x})\bar{x}'(p) = \bar{x}(p)$ . Luego  $L_x g(p) = px - g(p)$  con  $x = g'(p) = \bar{x}(p)$ .

---

**EJEMPLO 4.4.2** Dado un hamiltoniano  $H(p)$ , indique una forma de determinar un lagrangiano.

**Solución.**

$$L(\dot{q}) = \int (H')^{-1}(\dot{q}) d\dot{q}.$$

---

**EJEMPLO 4.4.3** Si un sistema tiene como hamiltoniano  $H = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ , determine el lagrangiano.

**Solución.**

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}},$$

note que este lagrangiano relativista, no está dado por  $K - V$ .

---

### 4.4.3. Teoremas de conservación.

Escritas en términos de los momentos canónicos, las ecuaciones de Lagrange para un sistema conservativo son

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (4.10)$$

#### Conservación del momento canónico.

► **TEOREMA 4.1**

Si el lagrangiano no contiene una coordenada (se dice que el lagrangiano es cíclico en esa coordenada), se conserva el correspondiente momento canónico conjugado, es decir

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \implies p_i = \text{constante}$$

#### Conservación del hamiltoniano.

De la definición del hamiltoniano y de las ecuaciones de Lagrange (4.10), se puede obtener

$$dH = \sum \dot{q}_j dp_j - \sum \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (4.11)$$

de donde se deducen importantes ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Además, si (4.11) se divide por  $dt$ , se obtiene

$$\frac{dH}{dt} = \sum \dot{q}_j \dot{p}_j - \sum \dot{p}_j \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t},$$

es decir

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

de aquí sigue un teorema de conservación:

## ► TEOREMA 4.2

Si el lagrangiano no contiene el tiempo en forma explícita, se conserva el hamiltoniano. Es decir, de la última ecuación se desprende

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies H = \text{constante.} \quad (4.14)$$

## 4.4.4. Hamiltoniano y energía

Analizaremos la relación entre hamiltoniano y energía del sistema. Para sistemas mecánicos clásicos, donde  $L = K - V$ , si el potencial no depende de las velocidades, se tiene

$$H = \sum \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - K + V,$$

luego la condición suficiente para que la energía y el hamiltoniano sean iguales es que

$$\sum \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2K.$$

De acuerdo al teorema de Euler de las funciones homogéneas, las funciones homogéneas de grado 2 cumplen precisamente la última condición. Se señala un importante teorema cuya demostración se deja como ejercicio.

- Definición . Se define una función homogénea de grado  $p$  en  $n$  variables, cuando ella cumple:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

siendo  $\lambda \neq 0$ . De aquí, derivando respecto a  $\lambda$  y luego haciendo  $\lambda = 1$ , se deduce que:

## ► TEOREMA 4.3

Si  $f$  es una función homogénea de grado  $p$ , entonces:

$$pf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i.$$

Con todos los antecedentes considerados, si la energía cinética es una función homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas, entonces el hamiltoniano del sistema coincide con la energía del sistema. Es simple ir al fondo y responder la pregunta. ¿Cuándo ocurre eso? Si se analiza la transformación de coordenadas generalizadas a posiciones (4.1), la velocidad estará dada por

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

de donde es evidente que la energía cinética resultará homogénea de grado dos en las velocidades generalizadas cuando  $\partial \vec{r}_i / \partial t = 0, \forall i$ , es decir cuando los vínculos sean independientes del tiempo. Todo lo señalado se puede resumir en:

► **TEOREMA 4.4**

Si un sistema tiene sus vínculos independientes del tiempo, entonces  $H = E$ .

#### 4.4.5. Fuerzas dependientes de la velocidad

Para ciertos casos, donde la fuerza generalizada dependiente de la velocidad satisfice

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j},$$

para un cierto  $V(q, \dot{q}, t)$ , es posible definir el lagrangiano  $L = K - V$ , de modo que las ecuaciones correctas de movimiento son las ecuaciones de Lagrange.

**EJERCICIO 4.4.1** *Un ejemplo notable lo constituye la fuerza de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  donde los campos magnéticos y eléctricos satisfacen  $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$ , y  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Demuestre en este caso que*

$$F_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j}, \quad \text{con } V = q\Phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}.$$

**Solución.** La solución es directa considerando que los  $\dot{q}$  están sólo en la velocidad de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} &= -qA_j, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} &= -q \frac{d}{dt} A_j, \end{aligned}$$

por otro lado

$$\frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} = q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi - q \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A},$$

de modo que se tiene

$$\begin{aligned} F_j &= -q \frac{d}{dt} A_j - q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi + q \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A} \\ &= -q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi - q \frac{\partial}{\partial t} A_j - q \vec{v} \cdot \nabla A_j + q \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A} \end{aligned}$$

Por otro lado la componente  $j$  de la fuerza de Lorentz es

$$F_j = -q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi - q \frac{\partial}{\partial t} A_j + q \left( \vec{v} \times \left( \nabla \times \vec{A} \right) \right)_j.$$

O sea son iguales pues

$$\left( \vec{v} \times \left( \nabla \times \vec{A} \right) \right)_j = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A} - \vec{v} \cdot \nabla A_j.$$

Podemos notar además que si la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} m v^2,$$

el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q \Phi + q \vec{v} \cdot \vec{A},$$

entonces el momento canónico  $p_j$  estará dado por

$$p_j = m \dot{q}_j + q A_j.$$



### 4.4.6. Teorema de Noether

Considere transformaciones continuas de las coordenadas generalizadas dependientes de un parámetro real  $s$  tales que para  $s = 0$  se trata de la transformación identidad, es decir

$$Q_j = Q_j(q, s), \quad \text{siendo } q_j = Q_j(q, 0).$$

Aquí  $q$  representa el conjunto completo de coordenadas generalizadas. Si el lagrangiano de un sistema autónomo  $L(q, \dot{q})$  es invariante bajo esa transformación, es decir si

$$L(Q(q, s), \dot{Q}(q, s))$$

no depende de  $s$ , entonces se tiene una cantidad conservada, o integral del movimiento. En forma más precisa

► **TEOREMA 4.5 (NOETHER)**

Si

$$\frac{d}{ds} L(Q(q, s), \dot{Q}(q, s)) = 0$$

entonces

$$I(q, \dot{q}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{ds} Q_j(q, s) \Big|_{s=0} = \text{constante}.$$

- La demostración (ver [5], pag. 102) sigue de

$$0 = \frac{d}{ds} L(Q(q, s), \dot{Q}(q, s)),$$

o sea

$$0 = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{d\dot{Q}_j}{ds} + \sum \frac{\partial L}{\partial Q_j} \frac{dQ_j}{ds},$$

donde

$$\frac{d\dot{Q}_j}{ds} = \frac{d}{dt} \frac{dQ_j}{ds},$$

y al hacer  $s = 0$  tendremos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial Q_j} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

de modo que se obtiene

$$0 = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{dQ_j}{ds} + \sum \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{dQ_j}{ds} \Big|_{s=0},$$

o bien

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{dQ_j}{ds} \Big|_{s=0} = 0,$$

que prueba el teorema.

### Ejemplos

- Si el lagrangiano de un sistema es  $L = L(\dot{q})$  es dependiente de las velocidades generalizadas solamente, entonces el es obviamente invariable, en el sentido considerado más arriba, ante la transformación

$$Q_j = q_j + sa_j,$$

siendo  $a_j$  constantes arbitrarias. Entonces se conserva

$$I(q, \dot{q}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} a_j,$$

y como los  $a_j$  son arbitrarios, deben conservarse independientemente todos los momentos canónicos

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

- Si el lagrangiano  $L = L(\dot{q}, q)$  no depende de una de las coordenadas generalizadas  $q_k$  por ejemplo, o sea que es invariante bajo la transformación

$$Q_j = q_j + s\delta_{jk},$$

entonces se conserva el momento canónico  $p_k$ , puesto que

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{ds} Q_j(q, s) \Big|_{s=0} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta_{j,k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k.$$

- Si un lagrangiano  $L(\vec{v}, \vec{r})$  es invariante bajo una rotación infinitesimal

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\theta \hat{n} \times \vec{r},$$

entonces se conserva

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot \hat{n} \times \vec{r},$$

o sea la cantidad conservada es

$$\vec{r} \times \vec{p} \cdot \hat{n},$$

que es la componente  $\hat{n}$  del momentum angular.

NOTA 4.1 Volveremos sobre el teorema de Noether en el capítulo sobre el principio variacional de Hamilton.

## 4.5. Ejemplos y aplicaciones

### 4.5.1. Trompo simétrico.

EJEMPLO 4.5.1 *Considere un trompo simétrico que mantiene su púa fija. Para los ángulos  $\theta, \phi, \psi$  indicados en la figura (4.2), siendo  $M$  su masa,  $h$  la distancia de la púa al centro de masa y  $A, C$ , los momentos de inercia, para un eje perpendicular al eje de simetría y respecto al eje de simetría, en el origen. Escriba las ecuaciones de movimiento.*

**Solución.** Se puede deducir que el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgh \cos \theta,$$

de allí

$$\begin{aligned} p_\theta &= A\dot{\theta}, \\ p_\phi &= A(\sin^2 \theta)\dot{\phi} + C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta, \\ p_\psi &= C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}), \end{aligned}$$

considerando que el lagrangiano es cíclico en  $\psi$ , y  $\phi$ , y que no contiene el tiempo en forma explícita, se conservan  $H = E$ ,  $p_\psi$ , y  $p_\phi$ . Por lo tanto, tenemos

$$s \equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante},$$

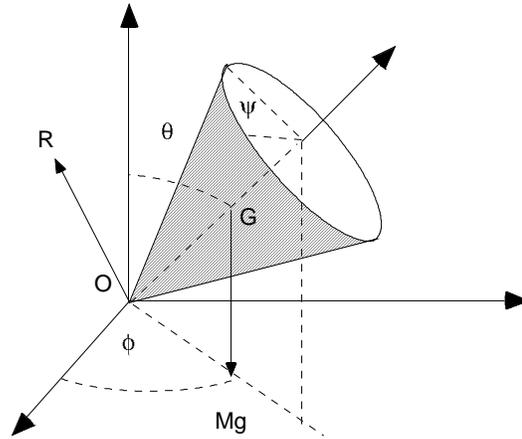


Figura 4.2: Trompo simétrico

$$A(\sin^2 \theta) \dot{\phi} + Cs \cos \theta = \alpha = \text{constante},$$

$$E = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} A (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} C (s)^2 + mgh \cos \theta = \text{constante}.$$

Una ecuación que determina los cambios de la inclinación del eje del trompo, ángulo  $\theta$ , puede obtenerse al eliminar  $\dot{\phi}$  a través de  $\alpha$  en la ecuación de la energía. Si se define  $u = \cos \theta$ , se obtiene (ver apéndice)

$$\dot{u}^2 = f(u) = (2E - Cs^2 - 2mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left( \frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2,$$

polinomio cúbico, cuyas raíces entre  $-1$  y  $1$  tienen importancia en la determinación de la inclinación del eje del trompo en su movimiento.

---

**EJEMPLO 4.5.2** Considere un trompo simétrico con momentos de inercia  $C$ ,  $A$ , masa  $m$  y distancia  $h$  de su púa fija al centro de masas, que durante su movimiento tiene valores extremos para  $\theta$  iguales a  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Determine valores iniciales adecuados de la precesión en términos del spin  $s$  para que ello ocurra, y analice la posibilidad de que la precesión  $\dot{\phi}$  se anule en el intervalo.

**Solución.** Dado que son conocidos los extremos del ángulo polar  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , una primera condición es que  $\dot{\theta}$  se anule en  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , de donde las constantes

del movimiento son

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2mgh \cos \theta_1 \\ &= A\dot{\phi}_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2mgh \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= A(\sin^2 \theta_1)\dot{\phi}_1 + Cs \cos \theta_1 \\ &= A(\sin^2 \theta_2)\dot{\phi}_2 + Cs \cos \theta_2 \end{aligned}$$

de modo que al eliminar  $\dot{\phi}_2$  y simplificando se puede obtener

$$(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)\Omega^2 - 2\frac{Cs}{A}\Omega + \frac{2mgh \sin^2 \theta_2}{A \sin^2 \theta_1} - \frac{C^2 s^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}{A^2 \sin^2 \theta_1} = 0,$$

ecuación de segundo grado que relaciona la precesión inicial  $\dot{\phi}_1 = \Omega$  con el spin  $s$  para que en el movimiento se realicen los extremos de  $\theta$  dados. Si llamamos  $a = mghA/(Cs)^2$  la solución de la ecuación anterior puede escribirse como

$$\Omega = \frac{Cs}{A(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)} \left( 1 \mp \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \sqrt{1 - 2a(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)} \right).$$

La condición para que existan valores reales de  $\Omega$  es  $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 < \frac{1}{2}a$ . Puede además observarse que si  $\theta_1 = \theta_2$  se obtiene entonces una condición para el movimiento llamado de precesión uniforme, donde  $\theta$  permanece constante

$$\Omega^2 \cos \theta - \frac{Cs}{A}\Omega + \frac{2mgh}{A} = 0.$$

En el capítulo de cuerpo rígido se analizan, en diversos ejemplos, las condiciones para que el trompo realice “loops” partiendo de cualquiera de las posiciones extremas de inclinación del ángulo  $\theta$ .

---

**EJEMPLO 4.5.3** *Considere un trompo simétrico con momentos de inercia  $C$ ,  $A$ , masa  $m$  y distancia  $h$  de su pua fija al centro de masas, que baila dormido con  $\theta = 0$ . Analice la estabilidad de este movimiento.*

**Solución.** Aquí

$$2E - Cs^2 = A\dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta + 2mgh \cos \theta = 2mgh,$$

$$\alpha = A(\sin^2 \theta)\dot{\phi} + Cs \cos \theta = Cs,$$

de donde

$$\dot{u}^2 = f(u) = (2mgh - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left( \frac{Cs - Csu}{A} \right)^2,$$

o bien

$$f(u) = \frac{2mgh}{A} (1-u)^2 \left( u - \left( \frac{C^2 s^2}{2mghA} - 1 \right) \right)$$

$$= \frac{2mgh}{A} (1-u)^2 (u - u_3).$$

El movimiento del trompo será estable si  $f(u) < 0$  en el rango  $-1 < u < 1$ , por lo cual la tercera raíz debe ser mayor que uno, o sea  $u_3 = C^2 s^2 / (2mghA) - 1 > 1$ , entonces  $C^2 s^2 > 4mghA$ , es la condición de estabilidad del trompo dormido. Si esta condición no se cumple, el trompo se moverá de acuerdo a

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{\frac{2mgh}{A}} (1-u) \sqrt{(u-u_3)},$$

que integraremos como sigue

$$t = -\sqrt{\frac{A}{2mgh}} \int_1^u \frac{du}{(1-u)\sqrt{u-u_3}}.$$

Sea  $u = 1 - (1 - u_3) \sin^2 \psi$ ,  $du = -2(1 - u_3) \sin \psi \cos \psi d\psi$  entonces

$$t = -\sqrt{\frac{A}{2mgh}} \int_0^\psi \frac{-2(1-u_3)d\psi}{(1-u_3)\sin\psi\sqrt{(1-u_3)}},$$

o bien

$$t = \frac{2A}{\sqrt{2mghA}\sqrt{(1-u_3)}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sin\psi} = \infty,$$

o sea el trompo tarda infinito tiempo en alcanzar la inclinación dada por  $\cos \theta = C^2 s^2 / (2mghA) - 1$ .



### 4.5.2. Bola que rueda sobre un plano, sometida en su centro a una fuerza

Suponga que una bola homogénea de masa  $M$ , radio  $R$ , rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, plano  $OXY$ , actuada en su centro  $G$  por una fuerza (elástica) hacia el eje  $OZ$ ,  $-K\vec{r}$ , además del peso, la reacción normal y la fuerza de roce en el punto de contacto  $P$ , suponiendo que ella no realiza trabajo en la situación de no deslizamiento, ver figura (4.3). Utilizando las componentes de la velocidad angular en los ejes fijo, en términos de los ángulos de Euler,  $\theta$ ,  $\phi$ , y  $\psi$ , el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

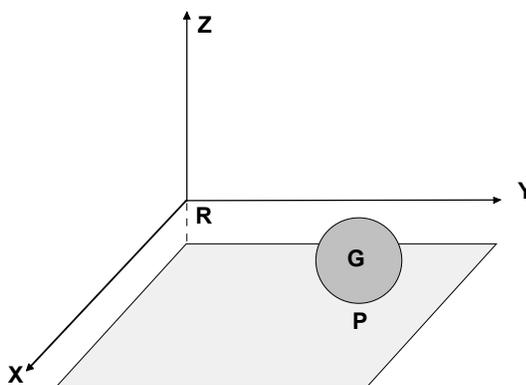


Figura 4.3: Esfera atraída hacia el origen

o sea

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2),$$

y las restricciones adicionales no holonómicas (punto de contacto con velocidad cero) son

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (-R\hat{k}) = 0,$$

es decir

$$\dot{x} - R\omega_y = 0, \quad \dot{y} + R\omega_x = 0. \quad (4.15)$$

Considerando las componentes de la velocidad angular en términos de los ángulos de Euler

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi},\end{aligned}$$

se puede escribir el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

y las dos relaciones de vínculos

$$\begin{aligned}\dot{x} - R(-\dot{\psi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi) &= 0, \\ \dot{y} + R(\dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi) &= 0,\end{aligned}$$

Al utilizar dos multiplicadores de Lagrange, se tiene

$$M\ddot{x} + Kx + \lambda_1 = 0, \quad (4.16)$$

$$M\ddot{y} + Ky + \lambda_2 = 0, \quad (4.17)$$

$$I(\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta) - \lambda_1 R \sin \phi + \lambda_2 R \cos \phi = 0, \quad (4.18)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = 0, \quad (4.19)$$

$$I(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\ddot{\theta} \sin \theta) + \lambda_1 R \cos \phi \sin \theta + \lambda_2 R \sin \phi \sin \theta = 0. \quad (4.20)$$

De aquí, el álgebra es algo tediosa. De la ecuación (4.19) obtenga  $\ddot{\phi}$  y reemplacemos en la ecuación (4.20). En seguida, de las ecuaciones (6.11) y (4.20) obtenga  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Compruebe que se obtiene

$$\lambda_1 = \frac{I}{R}\dot{\omega}_y, \quad \lambda_2 = -\frac{I}{R}\dot{\omega}_x, \quad (4.21)$$

de allí es fácil obtener, un sorprendentemente simple resultado para las ecuaciones de movimiento de las coordenadas del centro de masas de la esfera, es decir

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} + Kx = 0, \quad (4.22)$$

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{y} + Ky = 0, \quad (4.23)$$

que más generalmente pudo escribirse (para  $I = \frac{2}{5}MR^2$ ) como

$$M\vec{a}_G = \frac{5}{7}\vec{F},$$

para una fuerza cualquiera  $\vec{F}$  aplicada al centro, paralelamente al plano horizontal. Las ecuaciones diferenciales para los ángulos de Euler no las analizaremos aquí. Es ilustrativo sin embargo, comparar con el planteamiento usual, newtoniano.

Las ecuaciones dinámicas son más simples. Si  $\vec{f}$  denota la fuerza de roce, entonces

$$M\vec{a}_G = \vec{F} + \vec{f}, \quad (4.24)$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -R\hat{k} \times \vec{f}, \quad (4.25)$$

además aplica la restricción de no resbalamiento

$$0 = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (-R\hat{k}). \quad (4.26)$$

Derivando la (4.26) respecto al tiempo y reemplazando en ella las aceleraciones, se obtiene

$$0 = \vec{F} + \left(I + \frac{MR^2}{I}\right) \vec{f}, \quad (4.27)$$

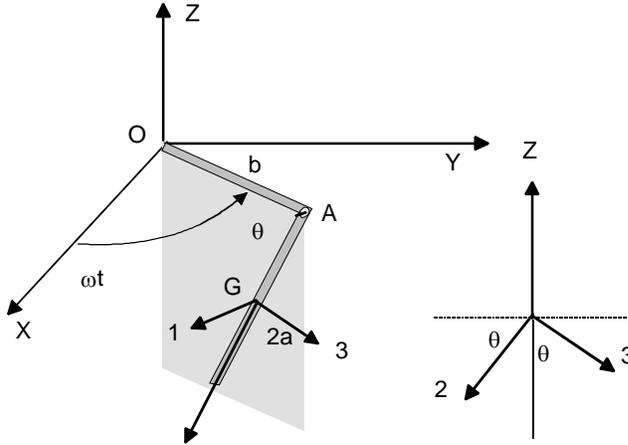
de donde la ecuación de movimiento del centro de masas es:

$$M\vec{a}_G = \frac{\vec{F}}{1 + I/(MR^2)}.$$

**COROLARIO 1** *No siempre el método de Lagrange simplifica el problema.*

**EJEMPLO 4.5.4** *Este ejemplo se desarrollará por método tradicional y por el método de Lagrange para comprender las diferencias y ventajas de un método sobre otro. Considere una barra de masa  $m$  y de longitud  $2a$ , la cual puede oscilar libremente en torno a un articulación en  $A$  variando sólo el ángulo de inclinación  $\theta$  definido con la barra horizontal  $AB$  de longitud  $b$  la cual gira en torno al eje  $OZ$  con velocidad angular constante  $\omega$ . La barra permanece sobre el plano gris que rota en torno al eje  $OZ$  con velocidad angular constante  $\omega$ . Determine la ecuación de movimiento para el ángulo  $\theta$ .*

**Solución.** En la figura se ilustran ejes principales (1), (2) y (3) fijos a la barra en su centro de masa (2) a lo largo de la barra, (1) perpendicular al plano gris y (3) sobre ese plano y perpendicular a (2).



a) Método de Lagrange: La velocidad angular de la barra es

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_1 \\ &= -\omega(\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_2) + \dot{\theta} \hat{e}_1.\end{aligned}$$

La velocidad del centro de masa puede escribirse

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (a \hat{e}_2) \\ &= -b\omega \hat{e}_1 + (-\omega \cos \theta \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_1) \times (a \hat{e}_2) \\ &= (\omega a \cos \theta - b\omega) \hat{e}_1 + a \dot{\theta} \hat{e}_3.\end{aligned}$$

Si  $I$  indica el momento de inercia de la barra para un eje perpendicular a ella en  $G$ , entonces

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m((\omega a \cos \theta - b\omega)^2 + a^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\omega a \cos \theta - b\omega)^2 + a^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta),\end{aligned}$$

luego el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m((\omega a \cos \theta - b\omega)^2 + a^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta) + mga \sin \theta,$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ma^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m(\omega a \cos \theta - b\omega)\omega a \sin \theta - I(\omega^2 \cos \theta \sin \theta) + mga \cos \theta,\end{aligned}$$

y resulta la ecuación de movimiento

$$(ma^2 + I)\ddot{\theta} + m(\omega a \cos \theta - b\omega)\omega a \sin \theta + I(\omega^2 \cos \theta \sin \theta) - mga \cos \theta = 0,$$

que puede simplificarse a

$$(ma^2 + I)\ddot{\theta} + \omega^2(ma^2 + I) \cos \theta \sin \theta - mb\omega^2 a \sin \theta - mga \cos \theta = 0.$$

b) Podemos utilizar las ecuaciones de Euler que son

$$\begin{aligned}I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= \Gamma_x^{ext} \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= \Gamma_y^{ext} \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= \Gamma_z^{ext}.\end{aligned}$$

Para los ejes principales (1), (2) y (3) ellas se reducen a

$$\begin{aligned}I\dot{\omega}_1 + I\omega_2\omega_3 &= \Gamma_1^{ext} \\ 0 &= \Gamma_2^{ext} \\ I\dot{\omega}_3 - I\omega_1\omega_2 &= \Gamma_3^{ext}.\end{aligned}$$

Reemplazando las componentes de la velocidad angular obtenemos

$$\begin{aligned}I\ddot{\theta} + I(-\omega \sin \theta)(-\omega \cos \theta) &= \Gamma_1^{ext} \\ 0 &= \Gamma_2^{ext} \\ I\frac{d}{dt}(-\omega \cos \theta) - I\dot{\theta}(-\omega \sin \theta) &= \Gamma_3^{ext}.\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}I\ddot{\theta} + I\omega^2 \sin \theta \cos \theta &= \Gamma_1^{ext} \\ 0 &= \Gamma_2^{ext} \\ 2I\omega\dot{\theta} \sin \theta &= \Gamma_3^{ext}.\end{aligned}$$

El problema es establecer el torque que se ejerce sobre el centro de masa de la barra, como consecuencia del mecanismo que la obliga a moverse sobre el plano indicado en la figura. Estamos entonces obligados a analizar al movimiento del centro de masa. Derivando  $\vec{v}_G$  obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{a}_G &= \frac{d}{dt}((\omega a \cos \theta - b\omega)\hat{e}_1 + a\dot{\theta}\hat{e}_3), \\ &= (-\omega a\dot{\theta} \sin \theta)\hat{e}_1 + a\ddot{\theta}\hat{e}_3 + (\omega a \cos \theta - b\omega)\vec{\omega} \times \hat{e}_1 + a\dot{\theta}\vec{\omega} \times \hat{e}_3, \\ &= -2\omega a\dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_1 + a\ddot{\theta}\hat{e}_3 - (\omega^2 a \cos \theta - b\omega^2)(\cos \theta \hat{e}_2 - \sin \theta \hat{e}_3) - a\dot{\theta}^2 \hat{e}_2,\end{aligned}$$

pero las fuerzas que actúan sobre la barra son

$$\vec{F} = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3 + mg(\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_2)$$

donde las  $F_i$  indican las componentes de la reacción en  $A$ , luego

$$\begin{aligned}F_1 &= -2m\omega a\dot{\theta} \sin \theta, \\ F_2 + mg \sin \theta &= m(-(\omega^2 a \cos \theta - b\omega^2) \cos \theta - a\dot{\theta}^2), \\ F_3 + mg \cos \theta &= m(a\ddot{\theta} + (\omega^2 a \cos \theta - b\omega^2) \sin \theta)\end{aligned}$$

Averiguando cual de estas fuerzas  $F_i$  produce un torque respecto a la dirección (1) en  $G$ , se tiene que

$$\Gamma_1^{ext} = -aF_3,$$

de modo que

$$I\ddot{\theta} + I\omega^2 \sin \theta \cos \theta = -ma(a\ddot{\theta} + (\omega^2 a \cos \theta - b\omega^2) \sin \theta) + mga \cos \theta,$$

o sea

$$(ma^2 + I)\ddot{\theta} + \omega^2(ma^2 + I) \sin \theta \cos \theta - mab\omega^2 \sin \theta - mga \cos \theta = 0.$$

Mismo resultado, pero mucho más laborioso. ¿Porqué se ha elegido  $\Gamma_1^{ext}$ ? La respuesta es que el mecanismo también ejerce un “par”  $\vec{M}$  sobre la barra, pero el no puede tener componente sobre el eje (1) porque la barra puede girar libremente en esa dirección.



## 4.6. Ejercicios

EJERCICIO 4.6.1 Demuestre que entre el lagrangiano y el hamiltoniano de un sistema se cumple que

$$\sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_i} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \delta_{ij}.$$

EJERCICIO 4.6.2 Demuestre que si  $H$  es una función cuadrática positiva definida de los momenta, entonces  $L$  es una función cuadrática positiva definida en las velocidades generalizadas y recíprocamente, es decir

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \delta p_i \delta p_j \geq 0 \iff \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j \geq 0.$$

EJERCICIO 4.6.3 Si se considera la transformación

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3),$$

siendo los  $q_i$  funciones del tiempo. Demuestre la identidad:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial v^2}{\partial q_j} = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}.$$

EJERCICIO 4.6.4 Utilice la identidad señalada en el problema anterior para obtener las componentes de la aceleración de una partícula en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

EJERCICIO 4.6.5 Considere una barra de masa  $m$ , largo  $2a$  que se mueve en un plano vertical bajo acción de su peso de modo que su extremo  $A$  puede moverse libremente sobre una corredera lisa  $OX$ . Escriba las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas generalizadas  $x$  el desplazamiento del punto  $A$ , y el ángulo  $\theta$  que forma la barra con la vertical.

EJERCICIO 4.6.6 Una barra de longitud  $2l$  se balancea sin deslizarse sobre un cilindro horizontal de radio  $a$ , como se indica en la figura (4.10) de modo el centro de la barra toca al cilindro en el punto más alto. Demuestre que:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g(h - a \cos \theta - a \theta \sin \theta)}{l^2 + 3a^2 \theta^2}$$

siendo  $h$  una constante.

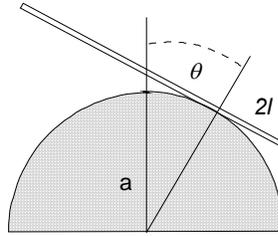


Figura 4.4: Problema

EJERCICIO 4.6.7 *Un cilindro sólido de radio  $a$ , descansa sobre otro igual que a su vez se apoya sobre el suelo, en equilibrio inestable. Si el sistema se perturba levemente y no hay deslizamiento en las superficies de contacto, demuestre que mientras los cilindros permanecen en contacto, el ángulo  $\theta$  que forma la línea que une los centros con la vertical satisface*

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1 - \cos \theta)}{a(17 + 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta)}.$$

EJERCICIO 4.6.8 *El extremo de una barra uniforme de largo  $l$  está montado sobre un eje de modo que la barra puede rotar libremente en un plano normal al eje, como se indica en la figura (4.11). Si el eje se hace rotar sobre un plano horizontal con velocidad de rotación constante  $\Omega$ , permaneciendo fija la unión de la barra al eje, demuestre que el ángulo que la barra forma con la vertical descendente satisface:*

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

EJERCICIO 4.6.9 *Considere un disco de masa  $m$  radio  $r$  que rueda sin deslizar con su plano vertical sobre un plano horizontal tirado de su centro con una fuerza horizontal constante  $F$ .*

- Resuelva el problema por el método de Lagrange considerando que el sistema es integrando con un grado de libertad.*
- Resuelva el mismo problema, tratando al sistema como si fuera no integrando con la restricción adicional:  $\dot{x} - r\dot{\theta} = 0$ .*

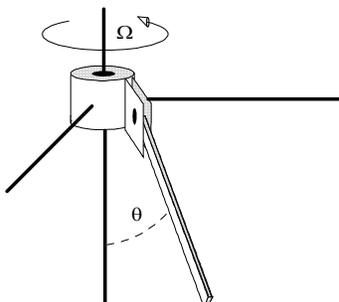


Figura 4.5: De un problema

EJERCICIO 4.6.10 Una argolla de masa  $3m$  puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura. Unido a la argolla hay un péndulo doble, formado por dos partículas de masas  $m$  e hilos de largo  $a$ . Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja al sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura (4.12) en torno de la vertical.

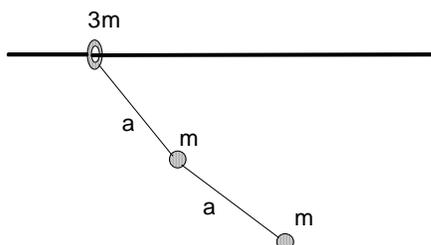


Figura 4.6: De un problema

- Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.
- Determine las aceleraciones cuando los desplazamientos angulares y las velocidades son pequeñas.

EJERCICIO 4.6.11 Un péndulo formado por una barra liviana de longitud  $l$ , unida a dos masas iguales a  $m$  una de ellas que puede oscilar en un plano vertical, la otra restringida a moverse verticalmente unida a un resorte

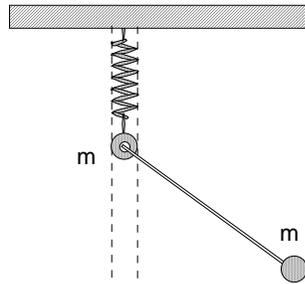


Figura 4.7: De un problema

de constante  $k$ , como se ve en la figura (4.13). Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.

EJERCICIO 4.6.12 Una barra de longitud  $2a$  y masa  $M$  se coloca horizontalmente sobre el punto más alto de un hemisferio rugoso de radio  $R$  y masa igual  $M$  que puede deslizarse sobre un plano horizontal liso, y se perturba levemente. Determine las ecuaciones de movimiento para el sistema. La barra no desliza sobre el hemisferio.

EJERCICIO 4.6.13 Una partícula de masa  $m$  está vinculada suavemente a un tubo liso el cual se hace rotar en torno de la vertical con velocidad angular  $\Omega$  constante, de modo que el ángulo de inclinación del tubo con la vertical es constante  $\alpha$ . Para la coordenada generalizada  $r$ , la distancia de la partícula al punto fijo del tubo se pide

- Escribir la ecuación de movimiento.
- Determinar la posición dentro del tubo donde la partícula puede estar estacionaria, es decir sin moverse respecto al tubo.
- Si la partícula es colocada dentro del tubo en el punto fijo, determine la velocidad mínima que debe tener respecto al tubo, para que ella sobrepase la posición determinada en la pregunta (b).

EJERCICIO 4.6.14 Una partícula de masa  $m$  está en reposo en el punto más alto de un hemisferio liso fijo de radio  $R$ . Si ella es perturbada levemente, comienza a resbalar sobre el hemisferio. Determine el punto donde ella abandona el contacto con el hemisferio.

EJERCICIO 4.6.15 *Un disco de masa  $M$  y radio  $a$  está inicialmente en reposo apoyado en el punto más alto de un hemisferio rugoso de radio  $R$ . Si el disco es perturbado levemente, el comienza a rodar sin resbalar. Escriba la ecuación de movimiento del disco, para el ángulo  $\theta$  indicado en la figura (4.14). Determine además el ángulo para el cual el disco abandona el contacto con el hemisferio.*

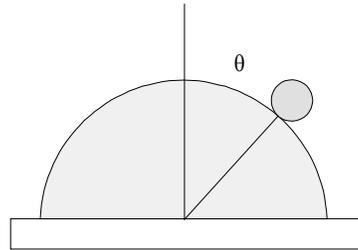


Figura 4.8: Disco que rueda sobre otro

EJERCICIO 4.6.16 *Una partícula de masa  $M$  se coloca en reposo sobre el punto más alto de un hemisferio semicilíndrico de masa  $M$  y radio  $R$ , el cual descansa sobre un plano horizontal liso, como se indica en la figura (4.15). Si la partícula se perturba levemente, el sistema comienza a moverse. Determine la expresión que determina el ángulo para el cual la partícula perderá contacto con el hemisferio.*

EJERCICIO 4.6.17 *Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están en reposo sobre un plano horizontal liso unidas por una cuerda inextensible de largo  $L$ . Si a una de ellas se le da una rapidez inicial  $v_0$  perpendicular a la línea que une las partículas, determine para el movimiento siguiente, la magnitud de la tensión en la cuerda.*

EJERCICIO 4.6.18 *Un cono recto de semiángulo en el vértice  $\alpha$  y generatriz de longitud  $l$  rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo  $\beta$  respecto del plano horizontal. Si  $\theta$  es el ángulo que forma la línea de máxima pendiente con la generatriz de contacto, demuestre que:*

$$\ddot{\theta} + \frac{5g \sin \beta}{l(1 + 5 \cos^2 \alpha)} \sin \theta = 0.$$

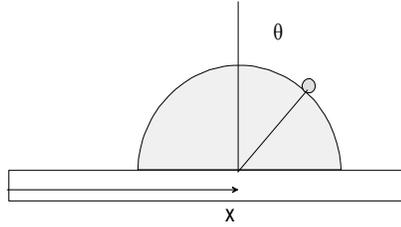


Figura 4.9: Partícula sobre hemisferio

*Indicación:* Si  $H$  es la altura del cono, el momento de inercia respecto a su generatriz en el vértice es  $I = \frac{3}{4}mH^2(1 + \frac{1}{5}\sec^2 \alpha) \sin^2 \alpha$ , la magnitud de la velocidad angular es  $\omega = \dot{\theta} \cot \alpha$ , la energía del cono puede escribirse como  $E = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{3}{4}H(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \cos \theta)$  y de allí derivando sigue el resultado.

## 4.6. Los problemas resueltos

EJERCICIO 4.6.1 Demuestre que entre el lagrangiano y el hamiltoniano de un sistema se cumple que

$$\sum_l \frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial p_l} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_l} = \delta_{ij}.$$

**Solución.** Considere

$$\begin{aligned}
 p_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\
 \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\
 dp_j &= \sum_i \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} dq_i \\
 d\dot{q}_i &= \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} dp_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} dq_j \\
 d\dot{q}_i &= \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \left( \sum_i \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} dq_i \right) + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} dq_j \\
 &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} dq_i
 \end{aligned}$$

como podemos considerar que  $\dot{q}, q$  son variables independientes

$$\sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = \delta_{il}$$

y adicionalmente resulta

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) dq_i \Rightarrow \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} &= - \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j \partial q_i}.
 \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 4.6.2** Demuestre que si  $H$  es una función cuadrática positiva definida de los momenta, entonces  $L$  es una función cuadrática positiva definida en las velocidades generalizadas y recíprocamente, es decir

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \delta p_i \delta p_j \geq 0 \iff \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j \geq 0.$$

**Solución.** Considere

$$p_i = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i},$$

y variemos los  $\dot{q}_i$  en  $\delta \dot{q}_i$ , resultará

$$\delta p_i = \sum_k \delta \dot{q}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \delta p_i \delta p_j &= \sum_{i,j} \sum_k \sum_l \delta \dot{q}_k \delta \dot{q}_l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_l}, \\ &= \sum_j \sum_k \sum_l \delta \dot{q}_k \delta \dot{q}_l \delta_{k,j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_l}, \\ &= \sum_j \sum_l \delta \dot{q}_k \delta \dot{q}_l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_l}. \end{aligned}$$

---

EJERCICIO 4.6.3 Si se considera la transformación

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3),$$

siendo los  $q_i$  funciones del tiempo. Demuestre la identidad:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{v^2}{2} = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}.$$

**Solución.** Considere

$$\vec{v} = \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{v^2}{2} = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j},$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{v^2}{2} &= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \\ &= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_j} \\ &= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{v^2}{2}, \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.6.4 *Utilice la identidad señalada en el problema anterior para obtener las componentes de la aceleración de una partícula en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.*

**Solución.** En coordenadas cilíndricas  $\rho, \phi, z$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= z\hat{k} + \rho\hat{\rho} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \hat{\rho}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \rho \hat{\phi} \\ v^2 &= \dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2,\end{aligned}$$

luego resultan

$$\begin{aligned}a_z &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial v^2}{\partial z} = \ddot{z}, \\ a_\rho &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial v^2}{\partial \rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2, \\ \rho a_\phi &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial v^2}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \rho^2 \dot{\phi}^2}{2} \\ &= \frac{d}{dt} \rho^2 \dot{\phi} = 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} + \rho^2 \ddot{\phi}. \\ a_\phi &= 2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}.\end{aligned}$$

Similarmente, para coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \hat{r}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\hat{\theta}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r(\sin \theta)\hat{\phi} \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2(\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2,\end{aligned}$$

luego resultan

$$\begin{aligned}
 a_r &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}} \frac{1}{2} - \frac{\partial v^2}{\partial r} \frac{1}{2} = \ddot{r}, \\
 ra_\theta &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\theta}} \frac{1}{2} - \frac{\partial v^2}{\partial \theta} \frac{1}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r^2 \dot{\theta}^2}{\partial \dot{\theta}} \frac{1}{2} - \frac{\partial r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2}{\partial \theta} \frac{1}{2}, \\
 &= \frac{d}{dt} r^2 \dot{\theta} - r^2 (\sin \theta \cos \theta) \dot{\phi}^2 = r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2 (\sin \theta \cos \theta) \dot{\phi}^2, \\
 a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r(\sin \theta \cos \theta) \dot{\phi}^2 \\
 r(\sin \theta) a_\phi &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\phi}} \frac{1}{2} - \frac{\partial v^2}{\partial \phi} \frac{1}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2}{\partial \dot{\phi}} \frac{1}{2} \\
 &= \frac{d}{dt} r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi}, \\
 a_\phi &= r(\sin \theta) \ddot{\phi} + 2\dot{r}(\sin \theta) \dot{\phi} + 2r(\cos \theta) \dot{\theta} \dot{\phi}
 \end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 4.6.5** Considere una barra de masa  $m$ , largo  $2a$  que se mueve en un plano vertical bajo acción de su peso de modo que su extremo  $A$  puede moverse libremente sobre una corredera lisa  $OX$ . Escriba las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas generalizadas  $x$  el desplazamiento del punto  $A$ , y el ángulo  $\theta$  que forma la barra con la vertical.

**Solución.** Las coordenadas de  $G$  serán

$$x_G = x + a \sin \theta, \quad y_G = -a \cos \theta,$$

de donde

$$\dot{x}_G = \dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_G = a\dot{\theta} \sin \theta, \quad v_G^2 = \dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + a^2\dot{\theta}^2,$$

y entonces el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{3} m a^2 \dot{\theta}^2 + m g a \cos \theta,$$

de donde calculamos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + ma\dot{\theta} \cos \theta, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ma\dot{x} \cos \theta + \frac{4}{3} m a^2 \dot{\theta}, \\
 \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -ma\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - m g a \sin \theta,
 \end{aligned}$$

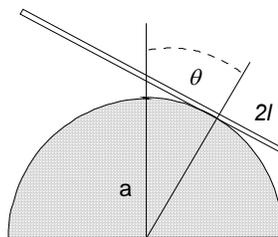


Figura 4.10: Problema

de donde

$$m\dot{x} + ma\dot{\theta} \cos \theta = \text{constante},$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} + ma\ddot{x} \cos \theta + mga \sin \theta = 0.$$

---

EJERCICIO 4.6.6 Una barra de longitud  $2l$  se balancea sin deslizarse sobre un cilindro horizontal de radio  $a$ , como se indica en la figura (4.10) de modo el centro de la barra toca al cilindro en el punto más alto. Demuestre que:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g(h - a \cos \theta - a\theta \sin \theta)}{l^2 + 3a^2\theta^2}$$

siendo  $h$  una constante.

**Solución.** Debido a que la barra no desliza, la distancia desde el punto de apoyo de la barra al centro de masa es

$$s = a\theta,$$

luego

$$x_G = a \sin \theta - a\theta \cos \theta, \quad y_G = a \cos \theta + a\theta \sin \theta,$$

luego

$$\dot{x}_G = a\theta\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y}_G = a\theta\dot{\theta} \cos \theta,$$

entonces la energía será

$$E = \frac{1}{2}ma^2\theta^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + mg(a \cos \theta + a\theta \sin \theta),$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 &= \frac{\frac{6E}{m} - 6g(a \cos \theta + a\theta \sin \theta)}{(3a^2\theta^2 + l^2)} \\ &= \frac{6g\left(\frac{E}{mg} - a \cos \theta - a\theta \sin \theta\right)}{(3a^2\theta^2 + l^2)}.\end{aligned}$$

**EJERCICIO 4.6.7** *El extremo de una barra uniforme de largo  $l$  está montado sobre un eje de modo que la barra puede rotar libremente en un plano normal al eje, como se indica en la figura (4.11). Si el eje se hace rotar sobre un plano horizontal con velocidad de rotación constante  $\Omega$ , permaneciendo fija la unión de la barra al eje, demuestre que el ángulo que la barra forma con la vertical descendente satisface:*

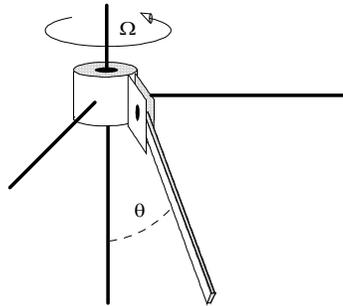
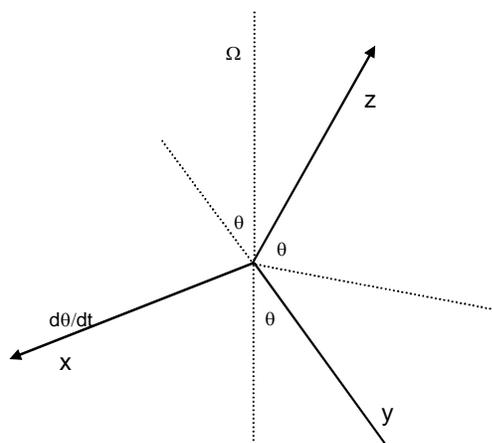


Figura 4.11: De un problema

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

**Solución.** Tomando ejes principales de inercia  $xyz$  en el extremo superior de la barra



tenemos

$$\omega_x = \dot{\theta}, \quad \omega_y = -\Omega \cos \theta, \quad \omega_z = \Omega \sin \theta,$$

entonces

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{3} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + mg \frac{l}{2} \cos \theta,$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} ml^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{3} ml^2 (\Omega^2 \sin \theta \cos \theta) - mg \frac{l}{2} \sin \theta,$$

y sigue

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{3} ml^2 (\Omega^2 \sin \theta \cos \theta) + mg \frac{l}{2} \sin \theta = 0,$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

---

EJERCICIO 4.6.8 Considere un disco de masa  $m$  radio  $r$  que rueda sin deslizar con su plano vertical sobre un plano horizontal tirado de su centro con una fuerza horizontal constante  $F$ .

- a) Resuelva el problema por el método de Lagrange considerando que el sistema es holonómico con un grado de libertad.
- b) Resuelva el mismo problema, tratando al sistema como si fuera no holonómico con la restricción adicional:  $\dot{x} - r\dot{\theta} = 0$ .

**Solución.** Considerado el vínculo hay un grado de libertad y

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{3}{4}m\dot{x}_G^2,$$

de donde sigue

$$\frac{3}{2}m\dot{x}_G = F.$$

Alternativamente consideramos que hay dos grados de libertad con

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right),$$

y la restricción adicional

$$\ddot{x}_G = r\ddot{\theta},$$

o

$$\delta x_G - r\delta\theta = 0,$$

luego la expresión

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j &= \sum_j Q_j \delta q_j \\ m\ddot{x}_G \delta x_G + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\delta\theta &= F\delta x_G, \\ \delta x_G - r\delta\theta &= 0, \end{aligned}$$

multiplicando por  $\lambda$  y sumando

$$(m\ddot{x}_G - F + \lambda)\delta x_G + \left(\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} - \lambda r\right)\delta\theta = 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G - F + \lambda &= 0, \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} - \lambda r &= 0, \end{aligned}$$

la última da

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_G - \lambda = 0,$$

y luego

$$m\ddot{x}_G - F + \frac{1}{2}m\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x}_G = F.$$

---

**EJERCICIO 4.6.9** Una argolla de masa  $3m$  puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura. Unido a la argolla hay un péndulo doble, formado por dos partículas de masas  $m$  e hilos de largo  $a$ . Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja al sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura (4.12) en torno de la vertical.

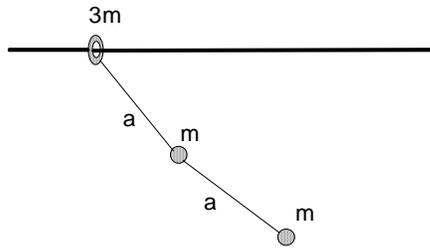


Figura 4.12: De un problema

- a) Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.
- b) Determine las aceleraciones cuando los desplazamientos angulares y las velocidades son pequeñas.

**Solución.** Usemos como coordenadas generalizadas  $x$  de  $3m$  y los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  que forman los hilos con la vertical. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} x_2 &= x + a \sin \theta, \\ y_2 &= -a \cos \theta, \\ x_3 &= x + a \sin \theta + a \sin \phi, \\ y_3 &= -a \cos \theta - a \cos \phi, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_2 &= a\dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{x}_3 &= \dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta + a\dot{\phi} \cos \phi, \\ \dot{y}_3 &= a\dot{\theta} \sin \theta + a\dot{\phi} \sin \phi,\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}L &= \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}a\dot{\theta} \cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{x}a\dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{x}a\dot{\phi} \cos \phi + 2a^2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi)) \\ &\quad + 2mga \cos \theta + mga \cos \phi,\end{aligned}$$

derivando

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 5m\dot{x} + 2m(a\dot{\theta} \cos \theta) + m(a\dot{\phi} \cos \phi) = \text{constante.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2ma^2\dot{\theta} + 3m\dot{x}a \cos \theta + ma^2\dot{\phi} \cos(\theta - \phi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ma^2\dot{\phi} + m\dot{x}a \cos \phi + ma^2\dot{\theta} \cos(\theta - \phi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -2m\dot{x}a\dot{\theta} \sin \theta - ma^2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta - \phi) - 2mga \sin \theta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m\dot{x}a\dot{\phi} \sin \phi + ma^2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta - \phi) - mga \sin \phi,$$

y finalmente

$$0 = 2a\ddot{\theta} + 3\ddot{x} \cos \theta + a\ddot{\phi} \cos(\theta - \phi) - a\dot{\phi}^2 \sin(\theta - \phi) + 2g \sin \theta,$$

$$0 = a\ddot{\phi} + \ddot{x} \cos \phi + a\ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) - a\dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi) + g \sin \phi.$$

---

EJERCICIO 4.6.10 *Un péndulo formado por una barra liviana de longitud  $l$ , unida a dos masas iguales a  $m$  una de ellas que puede oscilar en un plano vertical, la otra restringida a moverse verticalmente unida a un resorte de constante  $k$ , como se ve en la figura (4.13). Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.*

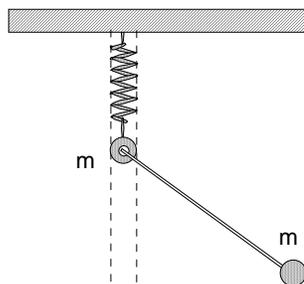


Figura 4.13: De un problema

**Solución.** Sea  $z$  la longitud del resorte y  $\theta$  el ángulo que forma la barra con la vertical. Las coordenadas de la masa que oscila como péndulo son

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta, & y &= -z - l \cos \theta, \\ \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta, & \dot{y} &= -\dot{z} + l \dot{\theta} \sin \theta,\end{aligned}$$

luego

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 - 2l\dot{z}\dot{\theta} \sin \theta + l^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + mgz,$$

o sea

$$\begin{aligned}L &= m\dot{z}^2 - ml\dot{z}\dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(z^2 - 2zl_0 + l_0^2) + mgz, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} - ml\dot{\theta} \sin \theta, & \frac{\partial L}{\partial z} &= -k(z - l_0 - \frac{mg}{k}), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m(-l\dot{z} \sin \theta + l^2\dot{\theta}), & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -ml\dot{z}\dot{\theta} \cos \theta,\end{aligned}$$

si se define

$$u = z - l_0 - \frac{mg}{k},$$

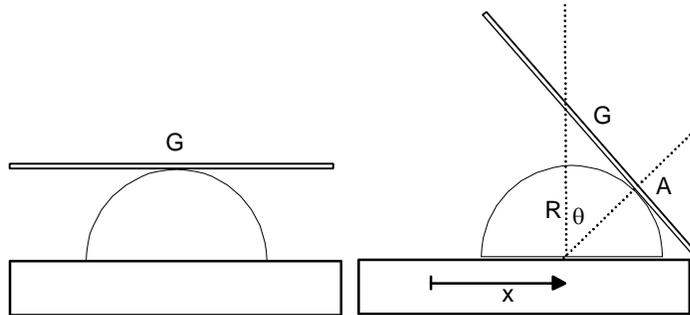
las ecuaciones de lagrange serán

$$\begin{aligned}\ddot{u} - l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{k}{m}u &= 0, \\ -\ddot{u} \sin \theta + l\ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$



EJERCICIO 4.6.11 Una barra de longitud  $2a$  y masa  $M$  se coloca horizontalmente sobre el punto más alto de un hemisferio rugoso de radio  $R$  y masa igual  $M$  que puede deslizarse sobre un plano horizontal liso, y se perturba levemente. Determine las ecuaciones de movimiento para el sistema. La barra no desliza sobre el hemisferio.

**Solución.** Con respecto a la figura



usamos como coordenadas generalizadas el ángulo  $\theta$  y el desplazamiento  $x$  del hemisferio. Debido al no deslizamiento de la barra  $AG = R\theta$  de manera que

$$\begin{aligned}x_G &= x + R \sin \theta - R\theta \cos \theta, \\y_G &= R \cos \theta + R\theta \sin \theta,\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= \dot{x} + R\dot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \theta + R\theta\dot{\theta} \sin \theta = \dot{x} + R\theta\dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y}_G &= -R\dot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta} \sin \theta + R\theta\dot{\theta} \cos \theta = R\theta\dot{\theta} \cos \theta, \\ v_G^2 &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}R\theta\dot{\theta} \sin \theta + R^2\theta^2\dot{\theta}^2,\end{aligned}$$

entonces el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + 2\dot{x}R\theta\dot{\theta} \sin \theta + R^2\theta^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ma^2)\dot{\theta}^2 - Mg(R \cos \theta + R\theta \sin \theta),$$

derivando

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 2M\dot{x} + M\dot{x}R\dot{\theta}\sin\theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= M(\dot{x}R\sin\theta + R^2\dot{\theta}) + \left(\frac{1}{3}Ma^2\right)\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= M(\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta + R^2\dot{\theta}^2) - Mg(R\cos\theta),\end{aligned}$$

y finalmente resultan las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}2\ddot{x} + \ddot{x}R\dot{\theta}\sin\theta + \dot{x}R\dot{\theta}^2\sin\theta + \dot{x}R\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{x}R\dot{\theta}^2\cos\theta &= 0, \\ \ddot{x}R\sin\theta + \dot{x}R\dot{\theta}\sin\theta + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}a^2\ddot{\theta} + gR\cos\theta &= 0.\end{aligned}$$

---

**EJERCICIO 4.6.12** Una partícula de masa  $m$  está vinculada suavemente a un tubo liso el cual se hace rotar en torno de la vertical con velocidad angular  $\Omega$  constante, de modo que el ángulo de inclinación del tubo con la vertical es constante  $\alpha$ . Para la coordenada generalizada  $r$ , la distancia de la partícula al punto fijo del tubo se pide

- a) Escribir la ecuación de movimiento.
- b) Determinar la posición dentro del tubo donde la partícula puede estar estacionaria, es decir sin moverse respecto al tubo.
- c) Si la partícula es colocada dentro del tubo en el punto fijo, determine la velocidad mínima que ella debe tener respecto al tubo, para que ella sobrepase la posición determinada en la pregunta (b).

**Solución.** Si llamamos  $r$  a la distancia de la partícula al origen se tiene

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha,$$

de donde sigue

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \Omega^2 \sin^2 \alpha - mg \cos \alpha,$$

y luego

$$\ddot{r} = r\Omega^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha. \quad ((a))$$

La partícula puede estar estacionaria donde  $\ddot{r} = 0$  o sea a distancia

$$r = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha} \quad ((b))$$

del origen. Integrando la ecuación de movimiento entre  $r = 0$  y  $r$  obtenemos

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}r^2\Omega^2 \sin^2 \alpha - gr \cos \alpha,$$

y la condición es que  $\dot{r}$  en  $r = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}$  de modo que resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_0^2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}\right)^2\Omega^2 \sin^2 \alpha + g\frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha} \cos \alpha, \\ v_0 &= \frac{g \cot \alpha}{\Omega}. \end{aligned} \quad ((c))$$

---

**EJERCICIO 4.6.13** *Una partícula de masa  $m$  está en reposo en el punto más alto de un hemisferio liso fijo de radio  $R$ . Si ella es perturbada levemente, comienza a resbalar sobre el hemisferio. Determine el punto donde ella abandona el contacto con el hemisferio.*

**Solución.** Sea  $\theta$  el ángulo que forma la línea desde el centro del hemisferio a la partícula. Entonces la energía es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta = mgR,$$

de donde

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta).$$

La reacción normal satisface

$$N - mg \cos \theta = -\frac{mv^2}{R},$$

y se anula cuando

$$mg \cos \theta = m2g(1 - \cos \theta) \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.1897^\circ.$$

EJERCICIO 4.6.14 *Un disco de masa  $m$  y radio  $a$  está inicialmente en reposo apoyado en el punto más alto de un hemisferio rugoso de radio  $R$ . Si el disco es perturbado levemente, el comienza a rodar sin resbalar. Escriba la ecuación de movimiento del disco, para el ángulo  $\theta$  indicado en la figura (4.14). Determine además el ángulo para el cual el disco abandona el contacto con el hemisferio.*

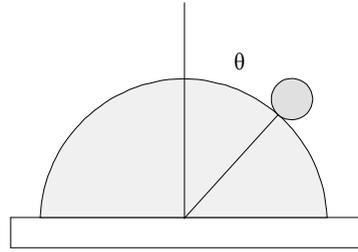
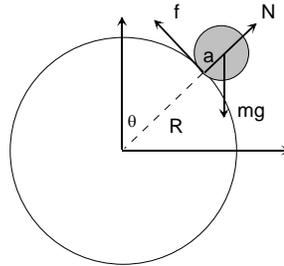


Figura 4.14: Disco que rueda sobre otro

**Solución.** (En los problemas resueltos este problema está resuelto por el método de Newton) Podemos calcular la rapidez del CM de dos manera,



$$v_{CM} = (R + a)\dot{\theta} = a\omega,$$

de donde

$$\omega = \frac{R + a}{a}\dot{\theta},$$

El lagrangiano será

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(R+a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{R+a}{a}\dot{\theta}\right)^2 - mg(R+a)\cos\theta \\ &= \frac{3}{4}m(R+a)^2\dot{\theta}^2 - mg(R+a)\cos\theta \end{aligned}$$

de donde la ecuación de movimiento será

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(R+a)\ddot{\theta} - g\sin\theta &= 0, \\ \ddot{\theta} &= \frac{2g\sin\theta}{3(R+a)}. \end{aligned}$$

Por integración podemos obtener  $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g(1-\cos\theta)}{3(R+a)},$$

La condición de despegue es cuando no hay contacto

$$N = 0,$$

pero

$$N - mg\cos\theta = -(R+a)^2\dot{\theta}^2,$$

de donde

$$mg\cos\theta - \frac{4mg(1-\cos\theta)}{3} = 0,$$

de donde

$$\cos\theta = \frac{4}{7}, \theta = 55.1501^\circ$$

---

EJERCICIO 4.6.15 Una partícula de masa  $M$  se coloca en reposo sobre el punto más alto de un hemisferio semicilíndrico de masa  $M$  y radio  $R$ , el cual descansa sobre un plano horizontal liso, como se indica en la figura (4.15). Si la partícula se perturba levemente, el sistema comienza a moverse. Determine la expresión que determina el ángulo para el cual la partícula perderá contacto con el hemisferio.

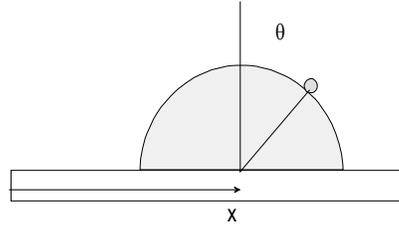


Figura 4.15: Partícula sobre hemisferio

**Solución.** Con relación a la figura las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} M \frac{d^2(x + R \sin \theta)}{dt^2} &= N \sin \theta, \\ M \frac{d^2(R \cos \theta)}{dt^2} &= N \cos \theta - Mg, \\ M \frac{d^2x}{dt^2} &= -N \sin \theta. \end{aligned}$$

Si se elimina  $x$  y  $N$  se obtiene una ecuación diferencial para el ángulo  $\theta$

$$\begin{aligned} M \frac{d^2(R \sin \theta)}{dt^2} &= 2N \sin \theta, \\ M \frac{d^2(R \cos \theta)}{dt^2} &= N \cos \theta - Mg, \\ \frac{2g}{R} \sin \theta &= \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{d^2(\cos \theta)}{dt^2} \sin \theta, \\ \frac{2g}{R} \sin \theta &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{d}{d\theta} \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

que integrada una vez conduce a

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \frac{1 - \cos \theta}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta}.$$

Considerando que la condición para que exista despegue de la superficie es  $N = 0$ , o sea  $\ddot{x} = 0$ , se obtiene

$$\frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} = 0,$$

o bien

$$\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) = 0,$$

que desarrollada conduce a una ecuación de tercer grado para el  $\cos \theta$ . En efecto se obtiene

$$\cos^3 \theta - 6 \cos \theta + 4 = 0,$$

y evaluando numéricamente resulta

$$\cos \theta = 0,732051 \Rightarrow \theta = 42.9414^\circ.$$

---

**EJERCICIO 4.6.16** *Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están en reposo sobre un plano horizontal liso unidas por una cuerda inextensible de largo  $L$ . Si a una de ellas se le da una rapidez inicial  $v_0$  perpendicular a la línea que une las partículas, determine para el movimiento siguiente, la magnitud de la tensión en la cuerda.*

**Solución.** Realmente este problema no es adecuado para Lagrange. La velocidad inicial del centro de masa y que permanece constante es

$$V_G = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Las velocidades iniciales relativas a  $G$  serán

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_0 - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}, \\ v'_2 &= -\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Ellas describen circunferencias de radios

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}, \\ r_2 &= \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}, \end{aligned}$$

en torno al centro de masa. Luego, la segunda ley aplicada a cualquiera partícula da

$$\begin{aligned} T &= m_1 \frac{(v'_1)^2}{r_1}, \\ &= m_2 \frac{(v'_2)^2}{r_2}, \end{aligned}$$

y así resulta

$$T = m_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2 L} \left( \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0^2}{L}.$$

---

EJERCICIO 4.6.17 *Un cono recto de semiángulo en el vértice  $\alpha$  y generatriz de longitud  $l$  rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo  $\beta$  respecto del plano horizontal. Si  $\theta$  es el ángulo que forma la línea de máxima pendiente con la generatriz de contacto, demuestre que:*

$$\ddot{\theta} + \frac{5g \sin \beta}{l(1 + 5 \cos^2 \alpha)} \sin \theta = 0.$$

**Solución.** Si  $H$  es la altura del cono, el momento de inercia respecto a su generatriz en el vértice es  $I = \frac{3}{4}mH^2(1 + \frac{1}{5} \sec^2 \alpha) \sin^2 \alpha$ , la magnitud de la velocidad angular es  $\omega = \dot{\theta} \cot \alpha$ , la energía del cono puede escribirse como  $E = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{3}{4}H(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \cos \theta)$  y de allí derivando sigue el resultado.

---

# Oscilaciones pequeñas.

## 5.1. La energía cinética.

Pondremos atención en el movimiento de sistemas conservativos holonómicos, con vínculos independientes del tiempo, en las vecindades de su posición de equilibrio estable. Como se sabe, la energía cinética es

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2,$$

que expresada en términos de coordenadas generalizadas  $q_i$  de acuerdo a

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q),$$

permite escribir

$$K = \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

expresión que escribiremos usando la convención de suma sobre índices repetidos

$$K = \frac{1}{2} m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (5.1)$$

siendo

$$m_{jk}(q) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_k} = m_{kj}(q),$$

elementos de una matriz simétrica, positiva definida.

## 5.2. La energía potencial.

En términos de las coordenadas generalizadas  $q_i$ , la energía potencial del sistema será escrita

$$V(q) = V(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

La condición para que el sistema tenga una posición de equilibrio estable, es que  $V(q)$  tenga un mínimo. Ello es consecuencia de las ecuaciones de Lagrange que para este caso son

$$\frac{d}{dt}(m_{jk}(q)\dot{q}_k) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0. \quad (5.2)$$

### 5.2.1. Posición de equilibrio.

Configuración de equilibrio significa coordenadas iniciales  $q_j^0$  tales que ellas no varían si inicialmente no varían. Es decir que  $\dot{q}_j^0(0) = 0 \implies \ddot{q}_j^0(0) = 0$ . De las ecuaciones de Lagrange se deduce entonces que tales puntos se caracterizan por

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q_j^0} = 0.$$

De acuerdo a lo que se analiza a continuación, si se trata de un punto de equilibrio estable, ellos corresponden a mínimos de la energía potencial.

### 5.2.2. Estabilidad.

El concepto de estabilidad está relacionado al comportamiento del sistema para condiciones iniciales próximas a la de equilibrio. El equilibrio se dice estable si para condiciones iniciales  $q_j(0) = q_j^0 + \delta q_j^0$ ,  $\dot{q}_j(0) = 0$ , con  $\delta q_j^0 > 0$ , entonces  $\ddot{q}_j(0) < 0$ ,  $\forall j$ , es decir las coordenadas deben variar hacia los valores de equilibrio. Ello impone algunas condiciones a la energía potencial. Desarrollando la ecuación (5.2), se tiene

$$\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0.$$

Si colocamos las condiciones iniciales señaladas, se obtiene

$$m_{jk}(q_0 + \delta q^0) \ddot{q}_k(0) + \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q^0 + \delta q^0} = 0,$$

y si se expande el segundo término hasta primer orden resulta

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \delta q_k^0 = -m_{jk}(q_0 + \delta q^0) \ddot{q}_k(0) > 0,$$

de donde sigue que

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} > 0, \quad \forall j, k,$$

es decir se trata de un mínimo de la energía potencial.

### 5.3. Linealización.

Para movimientos en una vecindad de una posición de equilibrio estable,

$$q_i = q_i^0 + \eta_i(t),$$

expandiremos la energía cinética y potencial para tener las ecuaciones de movimiento apropiadas para esta aproximación. Así resulta hasta segundo orden en las cantidades pequeñas  $\eta$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} m_{jk}(q^0) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k, \\ V &= V(q^0) + \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q^0} \eta_j + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \eta_j \eta_k, \end{aligned}$$

donde podemos olvidar el término constante  $V(q^0)$ , y los coeficientes de los términos lineales en  $\eta$  son cero, de modo que la energía potencial aproximada será

$$V = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \eta_j \eta_k,$$

### 5.4. El lagrangiano aproximado.

Del desarrollo anterior, tenemos el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m_{jk}(q^0) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \eta_j \eta_k,$$

que escribiremos en términos de elementos de matrices simétricas

$$L = \frac{1}{2}K_{jk}\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k - \frac{1}{2}V_{jk}\eta_j\eta_k,$$

siendo

$$K_{jk} = m_{jk}(q^0), \quad V_{jk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0},$$

elementos de matriz constantes, simétricos  $K_{jk}$  positiva definida y  $V_{jk} > 0$ . De aquí resultan ecuaciones de movimiento, llamadas de oscilaciones pequeñas

$$K_{jk}\ddot{\eta}_k + V_{jk}\eta_k = 0, \quad (5.3)$$

que son ecuaciones lineales acopladas, válidas para  $\eta$ , y  $\dot{\eta}$  suficientemente pequeños.

## 5.5. Solución de las ecuaciones de movimiento.

Un primer paso hacia la solución del sistema (5.3) consiste en eliminar la dependencia en el tiempo que puede adivinarse exponencial, de modo que trataremos una solución de la forma

$$\eta_k = a_k e^{-i\omega t},$$

siendo los  $a_k$  complejos constantes y se entiende además que la solución final es la parte real de la que se determine. Al reemplazar resulta

$$-\omega^2 K_{jk}a_k + V_{jk}a_k = 0,$$

que es un sistema lineal homogéneo que tiene solución distinta de la trivial si los coeficientes (en realidad  $\omega$ ) cumplen determinadas condiciones, que determinaremos. En términos simples, alguna de las ecuaciones es una combinación lineal de las otras, lo que significa además que dichas ecuaciones no pueden determinar todas las incógnitas  $a_k$ . En términos matriciales, si  $\mathbf{a}$  denota la matriz columna con elementos  $a_k$  entonces el sistema de ecuaciones es

$$\omega^2 \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{V}\mathbf{a}. \quad (5.4)$$

Los elementos de  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{V}$  son reales y simétricos. Ello trae como primera consecuencia que  $\omega^2$  debe ser real. En efecto considere

$$\omega^2 K_{jk} a_k = V_{jk} a_k,$$

si conjugamos y usamos la realidad y simetría tenemos que

$$(\omega^2)^* a_k^* K_{kj} = a_k^* V_{kj},$$

de donde siguen

$$\omega^2 a_j^* K_{jk} a_k = a_j^* V_{jk} a_k,$$

y

$$(\omega^2)^* a_k^* K_{kj} a_j = a_k^* V_{kj} a_j.$$

intercambiando en la última  $j \longleftrightarrow k$  resulta

$$\begin{aligned} \omega^2 a_j^* K_{jk} a_k &= a_j^* V_{jk} a_k, \\ (\omega^2)^* a_j^* K_{jj} a_j &= a_j^* V_{jk} a_k, \end{aligned}$$

de donde

$$(\omega^2 - (\omega^2)^*) a_j^* K_{jk} a_k = 0, \quad (5.5)$$

Mostraremos que  $a_j^* K_{jk} a_k > 0$ . Considere el siguiente desarrollo donde  $u$ , y  $v$  son las partes real e imaginaria de  $\mathbf{a}$ . (Después de este análisis veremos que en realidad las componentes de  $\mathbf{a}$  son reales.) Desarrolle

$$\begin{aligned} a_j^* K_{jk} a_k &= (u_j - iv_j) K_{jk} (u_k + iv_k) \\ &= K_{jk} u_j u_k + K_{jk} v_j v_k + i(K_{jk} u_j v_k - K_{jk} v_j u_k) \\ &= K_{jk} u_j u_k + K_{jk} v_j v_k > 0 \end{aligned}$$

Que muestra que  $a_j^* K_{jk} a_k$  es real y positivo definido. Entonces de (5.5) sigue que

$$\omega^2 = (\omega^2)^*.$$

Si el sistema lineal se escribe

$$(\omega^2 K_{jk} - V_{jk}) a_k = 0,$$

los  $n$  valores reales de  $\omega^2$  están determinados por la condición de que el determinante de los coeficientes sea cero, es decir

$$\det(\omega^2 K_{jk} - V_{jk}) = 0.$$

Supondremos en lo que sigue que dichos valores son todos diferentes. Además, debido a que los valores  $\omega^2$  son todos reales, el sistema (5.4) tiene soluciones reales para todos los  $a_k$ , si el que está indeterminado se toma real. Por ello, en los desarrollos que siguen se suponen todos los  $a_k$  reales.

### 5.5.1. Diagonalización.

Para valores distintos de  $\omega$ ,  $\omega_k$  con  $k = 1, 2, \dots, n$ , cada conjunto solución  $a_k$  dependen del valor de  $\omega$  considerado. De modo que introducimos un segundo índice que indica la dependencia en alguno de los  $\omega$ . Así  $a_{jk}$  indica la solución  $a_j$  para  $\omega = \omega_k$ . En términos más precisos

$$\omega_l^2 K_{jk} a_{kl} = V_{jk} a_{kl}.$$

Si consideramos otro  $\omega_m$  y conjugamos se obtiene similarmente

$$\omega_m^2 a_{km} K_{kj} = a_{km} V_{kj}$$

de donde siguen

$$\begin{aligned} \omega_l^2 a_{jm} K_{jk} a_{kl} &= a_{jm} V_{jk} a_{kl}, \\ \omega_m^2 a_{km} K_{kj} a_{jl} &= a_{km} V_{kj} a_{jl}, \end{aligned}$$

y que en términos de la matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  pueden ser escritas (sin suma sobre índices repetidos) como

$$\omega_l^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ml} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ml}, \quad (5.6)$$

$$\omega_m^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ml} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ml},$$

donde  $\mathbf{A}^T$  indica la traspuesta de la matriz  $\mathbf{A}$ . Si las dos ecuaciones anteriores se restan, resulta

$$(\omega_l^2 - \omega_m^2) (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ml} = 0.$$

Esto significa que la matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$  es diagonal. Como cada columna de la matriz  $\mathbf{A}$  tiene un elemento indeterminado (el sistema es homogéneo), podemos fijar arbitrariamente ese valor de modo que la matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$  tenga unos en la diagonal principal, es decir

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (5.7)$$

De la relación (5.6), se tiene que la matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A}$  también es diagonal con elementos  $\omega_i$  en la diagonal principal, cuestión que puede escribirse

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ij} = \omega_i^2 \delta_{ij}.$$

### 5.5.2. Solución del sistema.

Supongamos entonces que se ha resuelto la ecuación de valores propios.

$$\omega^2 \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{V} \mathbf{a},$$

donde la condición para solución no trivial

$$\det(\omega^2 K_{jk} - V_{jk}) = 0,$$

nos conduce a  $n$  diferentes  $\omega^2$ . En cada conjunto solución hay uno que está indeterminado y lo elegimos normalizando los vectores  $\mathbf{a}$  (que son las columnas de  $\mathbf{A}$ ) de modo que

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ij} &= \delta_{ij}, \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ij} &= \omega_i^2 \delta_{ij}. \end{aligned}$$

entonces la solución de nuestro problema es una combinación lineal de las soluciones correspondientes a los diversos  $\omega$ .

$$\eta_k = \operatorname{Re} \sum_j C_j a_{kj} e^{-i\omega_j t} = \sum_j a_{kj} \operatorname{Re} C_j e^{-i\omega_j t},$$

faltando considerar las condiciones iniciales.

#### Condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales son los  $2n$  valores  $\eta_k(0)$ , y  $\dot{\eta}_k(0)$  que permiten determinar finalmente las  $2n$  constantes, las partes real e imaginaria de  $C_k$ . Así resultará

$$\begin{aligned} \eta_k(0) &= \sum_j a_{kj} \operatorname{Re}(C_j), \\ \dot{\eta}_k(0) &= \sum_j a_{kj} \operatorname{Re}(-i\omega_j C_j) = \sum_j a_{kj} \omega_j \operatorname{Im}(C_j). \end{aligned}$$

Las propiedades de la matriz  $\mathbf{A}$ , permiten escribir expresiones explícitas para la parte real e imaginaria de  $C_k$  en términos de las condiciones iniciales, como explicamos a continuación. En efecto si definimos una matriz columna  $\mathbf{c}_1$  con

componentes  $\operatorname{Re}(C_j)$  y otra matriz columna  $\mathbf{c}_2$  con componentes  $\omega_j \operatorname{Im}(C_j)$ , las dos relaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{A}\mathbf{c}_1, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = \mathbf{A}\mathbf{c}_2,$$

de modo que al usar (5.7) se obtendrá

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}(0), \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\eta}}(0),$$

que al ser desarrolladas en componentes determinan

$$\operatorname{Re} C_j = \sum_{k,l} a_{kj} K_{kl} \eta_l(0), \quad \operatorname{Im} C_j = \frac{1}{\omega_j} \sum_{k,l} a_{kj} K_{kl} \dot{\eta}_l(0),$$

donde se ha vuelto a la notación usual de sumatoria para que quede claro que no se suma en el índice  $j$ . Así se tiene finalmente la solución de nuestro sistema

$$\eta_k(t) = \sum_j a_{kj} (\operatorname{Re} C_j e^{-i\omega_j t}) = \sum_j a_{kj} (\operatorname{Re} C_j \cos \omega_j t + \operatorname{Im} C_j \sin \omega_j t).$$

No se ahondará aquí en el procedimiento a seguir cuando hay valores repetidos de  $\omega_k$ .

### Coordenadas normales.

Recordando que la solución (sin tomar la parte real) es

$$\eta_k = \sum_j a_{kj} C_j e^{-i\omega_j t}$$

y si llamamos

$$\zeta_j = C_j e^{-i\omega_j t}$$

tenemos que

$$\eta_k = \sum_j a_{kj} \zeta_j, \quad \dot{\eta}_k = \sum_j a_{kj} \dot{\zeta}_j, \quad (5.8)$$

de modo que en términos de estas variables resulta

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} K_{jk} a_{jl} \dot{\zeta}_l a_{km} \dot{\zeta}_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{lm} \dot{\zeta}_l \dot{\zeta}_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_l \dot{\zeta}_l^2,
 \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} V_{jk} \eta_j \eta_k \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} V_{jk} a_{jl} \zeta_l a_{km} \zeta_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} (\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V})_{lm} \zeta_l \zeta_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} \omega_l^2 \delta_{lm} \zeta_l \zeta_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_l \omega_l^2 \zeta_l^2.
 \end{aligned}$$

De modo que en estas coordenadas  $\zeta_l$ , denominadas coordenadas normales, el lagrangiano es

$$L = \sum_l \left( \frac{1}{2} \dot{\zeta}_l^2 - \frac{1}{2} \omega_l^2 \zeta_l^2 \right),$$

que muestra que las coordenadas normales varían independientemente cada una con una de las frecuencias propias de oscilación del sistema, de acuerdo a

$$\ddot{\zeta}_l + \omega_l^2 \zeta_l = 0.$$

Las coordenadas normales en términos de las coordenadas originales se obtiene invirtiendo la ecuación (5.8), es decir

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta},$$

o

$$\zeta_k(t) = \sum_{j,m} a_{jk} K_{jm} \eta_m(t).$$

## 5.6. Ejemplos.

**EJEMPLO 5.6.1** Considere el péndulo doble indicado en la figura (5.1), donde el largo natural del resorte sin masa es  $L_0$ , que coincide con la separación de las masas en su posición de equilibrio. La constante elástica es  $k$  y la longitud de los hilos es  $L$ . Estudie las oscilaciones pequeñas en torno a los valores de equilibrio  $\theta = 0$  y  $\phi = 0$ .

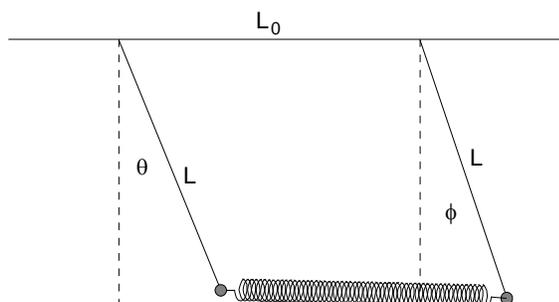


Figura 5.1: Osciladores acoplados

**Solución.** Para valores pequeños de  $\theta$  y  $\phi$ , la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}mgL(\theta^2 + \phi^2) + \frac{1}{2}kL^2(\theta - \phi)^2,$$

por lo cual las matrices  $K$  y  $V$  son

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} mgL + kL^2 & -kL^2 \\ -kL^2 & mgL + kL^2 \end{pmatrix},$$

de aquí el sistema lineal de ecuaciones es

$$\begin{aligned} & \omega^2 \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mgL + kL^2 & -kL^2 \\ -kL^2 & mgL + kL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y las frecuencias propias satisfacen

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2(mL^2) - mgL - kL^2 & kL^2 \\ kL^2 & \omega^2(mL^2) - mgL - kL^2 \end{pmatrix} = 0,$$

con soluciones

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{L}, \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{L} + \frac{2k}{m}. \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, una fila del sistema de ecuaciones es redundante por lo cual elegimos la primera, que es

$$\omega^2 mL^2 a_1 = (mgL + kL^2)a_1 - kL^2 a_2$$

o bien, para cada frecuencia

$$\begin{aligned} \frac{g}{L} mL^2 a_{11} &= (mgL + kL^2)a_{11} - kL^2 a_{21}, \\ \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right) mL^2 a_{12} &= (mgL + kL^2)a_{12} - kL^2 a_{22}, \end{aligned}$$

que se simplifican a

$$a_{11} = a_{21}, \quad a_{12} = -a_{22},$$

por lo cual la matriz  $\mathbf{A}$  sin normalizar aun es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}.$$

Normalización requiere que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & -a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = I,$$

o bien

$$mL^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & -a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde sigue

$$mL^2 a_{11}^2 = 1, \quad mL^2 a_{12}^2 = 1.$$

De donde finalmente, la matriz  $\mathbf{A}$  ha sido determinada

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Condiciones iniciales permitirían seguir con la rutina de expresar las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$  en función del tiempo. Nos limitaremos a dejarlas expresadas como

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \operatorname{Re}(C_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_2 t}), \\ \phi &= \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \operatorname{Re}(C_1 e^{-i\omega_1 t} - C_2 e^{-i\omega_2 t}). \end{aligned}$$

Por último, las coordenadas normales, están dadas por

$$\boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix},$$

que se reducen (salvo un factor irrelevante) a

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \theta + \phi, \\ \varsigma_2 &= \theta - \phi. \end{aligned}$$

Estos dos modos son independientes, por lo cual se puede establecer cada uno de ellos independientemente, y variarán con las frecuencias propias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Es decir

$$\begin{aligned} \theta + \phi &= D \cos \left( \sqrt{\frac{g}{L}} t - \delta \right), \\ \theta - \phi &= E \cos \left( \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}} t - \varepsilon \right), \end{aligned}$$

con constantes  $D$ ,  $E$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$  determinables con las condiciones iniciales que se tengan. Debe notarse que la diferencia de los ángulos es el modo de mayor frecuencia.

---

EJEMPLO 5.6.2 *Resuelva el problema anterior sin hacer uso de la teoría general elaborada.*

**Solución.** En algunos casos sencillos como este ejemplo, una solución directa puede ser más simple. En efecto del lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}mgL(\theta^2 + \phi^2) - \frac{1}{2}kL^2(\theta - \phi)^2,$$

siguen ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)\theta - \frac{k}{m}\phi &= 0, \\ \ddot{\phi} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)\phi - \frac{k}{m}\theta &= 0,\end{aligned}$$

de donde por simple inspección resultan

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} - \ddot{\phi} + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)(\theta - \phi) &= 0, \\ \ddot{\theta} + \ddot{\phi} + \frac{g}{L}(\theta + \phi) &= 0,\end{aligned}$$

que corroboran los resultados obtenidos por el método general.

---

EJEMPLO 5.6.3 *Con relación a la figura (5.2), dos partículas de igual masa  $m$  oscilan horizontalmente unidos a resortes iguales con constante elástica  $k$ , de modo que los extremos exteriores de los resortes están fijos. Analice las oscilaciones pequeñas de las partículas en torno a sus posiciones de equilibrio estable.*

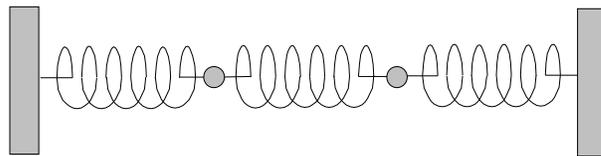


Figura 5.2: Osciladores acoplados

**Solución.** Si  $x_1$  y  $x_2$  indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

De allí las matrices  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{V}$  son

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det \left( \omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

o bien

$$\omega^4 m^2 - 4\omega^2 mk + 3k^2 = 0,$$

de donde resulta

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 3\frac{k}{m}.$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}a_{11} &= a_{21}, \\ a_{12} &= -a_{22}.\end{aligned}$$

Normalización requiere que  $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ , por lo cual

$$m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} = I,$$

entonces  $2ma_{11}^2 = 1$  y  $2ma_{22}^2 = 1$ , obteniendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí, las soluciones oscilatorias son

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \operatorname{Re} (C_1 e^{-\omega_1 t} - C_2 e^{-\omega_2 t}), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \operatorname{Re} (C_1 e^{-\omega_1 t} + C_2 e^{-\omega_2 t}). \end{aligned}$$

También indicaremos los modos normales  $\varsigma = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}$  que resultan ser

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 + x_2), \\ \varsigma_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (-x_1 + x_2). \end{aligned}$$





# Sistemas continuos

## 6.1. Introducción

En el capítulo anterior se explicó el método para analizar oscilaciones pequeñas de un sistema de un número finito de grados de libertad. Cuando el número de grados de libertad se hace muy grande, aunque en principio no habría dificultades, la resolución de las ecuaciones de valores propios se torna poco práctica. Sin embargo hay casos, en que debido a ciertas simetrías, el problema puede resolverse para un número arbitrario de grados de libertad. Pondremos atención en algunos casos particulares de solución simple y luego generalizaremos los resultados a sistemas con infinitos grados de libertad, los sistemas continuos.

## 6.2. Oscilaciones longitudinales

Considere un sistema unidimensional constituido por un conjunto de  $N$  partículas de igual masa que  $m$  que están unidas en línea recta por resortes de constante elástica  $K$ , y largo natural  $a$ . Si denotamos por  $q_i$  las desviaciones longitudinales en torno a las posiciones de equilibrio, ver figura (6.1).

El lagrangiano del sistema es

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} K (q_i - q_{i-1})^2,$$

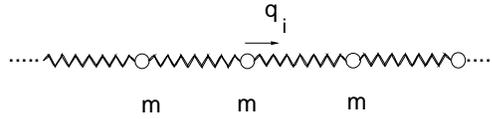


Figura 6.1: Osciladores acoplados

de donde se deducen las ecuaciones de movimiento para cada masa

$$\ddot{q}_j = \frac{K}{m}(q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.1)$$

### 6.2.1. Extremos fijos (a)

Para el caso en que las partículas de los extremos están fijas tomaremos  $q_0, q_{N+1} = 0$ . Podemos además suponer dependencias temporales de la forma

$$q_j(t) = Q_j e^{i\omega t}$$

resultando para las constante  $Q_j$  las ecuaciones lineales

$$\Omega^2(Q_{j+1} + Q_{j-1} - 2Q_j) = -\omega^2 Q_j, \quad \text{con } \Omega^2 = \frac{K}{m}, \quad (6.2)$$

o bien

$$\Omega^2 Q_{j-1} + (\omega^2 - 2\Omega^2)Q_j + \Omega^2 Q_{j+1} = 0,$$

un sistema de ecuaciones homogéneo que admite solución distinta de la trivial solo sí el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. Si hacemos para simplificar

$$\lambda = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2},$$

tenemos que

$$-Q_{j-1} + \lambda Q_j - Q_{j+1} = 0$$

el sistema de ecuaciones puede escribirse

$$\begin{aligned} \lambda Q_1 - Q_2 &= 0 \\ -Q_1 + \lambda Q_2 - Q_3 &= 0 \\ &\vdots \\ -Q_{j-1} + \lambda Q_j - Q_{j+1} &= 0 \\ -Q_{N-1} + \lambda Q_N &= 0, \end{aligned}$$

es decir los  $\lambda$  satisfacen

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Si llamamos

$$D_N = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & \vdots \\ \vdots & & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix},$$

podemos obtener una relación de recurrencia si desarrollamos el determinante de acuerdo a

$$\begin{aligned} D_N &= \lambda D_{N-1} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda D_{N-1} - D_{N-2}, \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} D_1 &= \lambda, \\ D_2 &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

La relación de recurrencia puede resolverse suponiendo

$$D_N = Ap^N,$$

que conduce a

$$\begin{aligned} p^N &= \lambda p^{N-1} - p^{N-2}, \\ p^2 - \lambda p + 1 &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} p &= \frac{\lambda}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4}} \\ &= e^{\pm i\phi}, \end{aligned}$$

con

$$\cos \phi = \frac{\lambda}{2}.$$

de modo que

$$D_N = A_1 e^{iN\phi} + A_2 e^{-iN\phi}.$$

Si consideramos los valores para  $D_1 = \lambda$ , y  $D_2 = \lambda^2 - 1$  se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \cos \phi = A_1 e^{i\phi} + A_2 e^{-i\phi}, \\ \lambda^2 - 1 &= 4 \cos^2 \phi - 1 = A_1 e^{2i\phi} + A_2 e^{-2i\phi}. \end{aligned}$$

que puede resolverse para  $A_1$  y  $A_2$  obteniendo

$$\begin{aligned} 2 \cos \phi e^{i\phi} &= A_1 e^{2i\phi} + A_2, \\ 4 \cos^2 \phi - 1 &= A_1 e^{2i\phi} + A_2 e^{-2i\phi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{e^{-i\phi}}{2i \sin \phi} \\ A_1 &= \frac{e^{i\phi}}{2i \sin \phi}, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} D_N &= \frac{e^{i\phi}}{2i \sin \phi} e^{iN\phi} - \frac{e^{-i\phi}}{2i \sin \phi} e^{-iN\phi} \\ &= \frac{\sin(N+1)\phi}{\sin \phi}. \end{aligned}$$

Entonces,  $D_N = 0$  implica

$$\phi = \frac{n\pi}{N+1} \text{ con } n = 1, 2, \dots, N.$$

Las frecuencias propias resultan entonces que satisfacen

$$\frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} = \lambda = 2 \cos \frac{n\pi}{N+1},$$

entonces

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 2\Omega^2 \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N+1}\right) \\ &= 4\Omega^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2(N+1)}, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\omega_n = 2\Omega \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \text{ con } n = 1, 2, \dots, N.$$

### 6.2.2. Alternativa

Otra forma de encontrar soluciones no triviales de

$$\Omega^2 Q_{j-1} + (\omega^2 - 2\Omega^2) Q_j + \Omega^2 Q_{j+1} = 0,$$

sean

$$Q_j = C \sin j\phi$$

entonces la condición

$$Q_{N+1} = 0$$

da

$$\sin(N+1)\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi n}{N+1}, \text{ con } n = 1, 2, \dots, N$$

luego

$$\Omega^2 \sin \frac{\pi n(j-1)}{N+1} + (\omega^2 - 2\Omega^2) \sin \frac{\pi j n}{N+1} + \Omega^2 \sin \frac{\pi n(j+1)}{N+1} = 0,$$

haciendo  $\lambda = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}$  se simplifica a

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi n(j-1)}{N+1} - \lambda \sin \frac{\pi j n}{N+1} + \sin \frac{\pi n(j+1)}{N+1} &= 0 \\ \left( \sin \pi j \frac{n}{N+1} \right) \left( -2 \cos \pi \frac{n}{N+1} + \lambda \right) &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$\lambda = 2 \cos \frac{n\pi}{N+1} = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2},$$

de donde

$$2 \cos \frac{n\pi}{N+1} = 2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2},$$

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2} = 2 - 2 \cos \frac{n\pi}{N+1} = 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2(N+1)}$$

finalmente

$$\omega_n = 2\Omega \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \text{ con } n = 1, 2, \dots, N,$$

y

$$Q_j = C \sin \frac{\pi j n}{N+1}, \text{ con } n = 1, 2, \dots, N.$$

La solución general será

$$q_j(t) = \sum_{n=1}^N C_n \sin \frac{\pi j n}{N+1} e^{i\omega_n t}$$

### 6.2.3. Condiciones periódicas (b)

Aquí tomaremos  $q_0 = q_{N+1}$ ,  $q_{-1} = q_N$  de modo que tendremos

$$\begin{aligned} -Q_N + \lambda Q_0 - Q_1 &= 0 \\ -Q_0 + \lambda Q_1 - Q_2 &= 0 \\ -Q_1 + \lambda Q_2 - Q_3 &= 0 \\ &\vdots \\ -Q_{j-1} + \lambda Q_j - Q_{j+1} &= 0 \\ -Q_{N-1} + \lambda Q_N - Q_0 &= 0 \end{aligned}$$

es decir las frecuencias admisibles satisfacen

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ \vdots & & & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{bmatrix}_{N+1} = 0,$$

que es más difícil de resolver.

#### 6.2.4. Solución alternativa

Una alternativa sin embargo es encontrar soluciones no triviales de (??). Para ello suponga con  $\phi$  por determinar

$$Q_j = C e^{i(j\phi)}.$$

Si se reemplaza en el sistema de ecuaciones se tiene que

$$\Omega^2 e^{i(j-1)\phi} + (\omega^2 - 2\Omega^2) e^{i(j\phi)} + \Omega^2 e^{i(j+1)\phi} = 0,$$

de donde se obtiene

$$\Omega^2 e^{-i\phi} + (\omega^2 - 2\Omega^2) + \Omega^2 e^{i\phi} = 0,$$

o sea

$$\omega^2 - 2\Omega^2 + 2\Omega^2 \cos \phi = 0$$

entonces

$$\omega = 2\Omega \sin \left( \frac{\phi}{2} \right).$$

y

$$Q_j = C e^{i(j\phi)}.$$

Debe además tenerse que

$$Q_0 = Q_{N+1}$$

o sea

$$e^{i(N+1)\phi} = 1,$$

por lo cual, las soluciones admisibles  $\phi$  son

$$\phi = \frac{2\pi n}{N+1}, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

luego

$$\omega_n = 2\Omega \sin \left( \frac{\pi n}{N+1} \right), \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N.$$

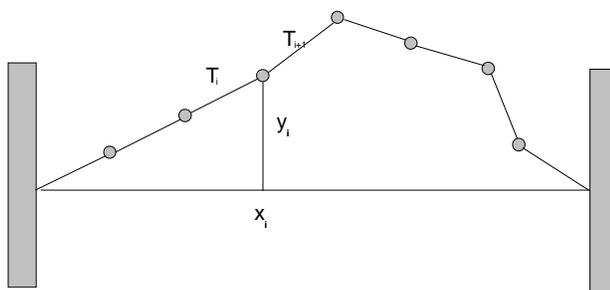


Figura 6.2: Ondas transversales

### 6.3. Oscilaciones transversales

Consideremos ahora partículas de igual masa  $m$  unidas por resortes sin masa de la misma longitud natural y constante elástica  $k$  de modo que en la situación de equilibrio ellas están en línea recta, y los resortes sometidos a una tensión igual  $\tau$ . Si las partículas se desplazan poco lateralmente, estarán sometidos a fuerzas de modo que la segunda ley de Newton conduce a

$$m\ddot{y}_i = T_{i+1} \sin \theta_{i+1} - T_i \sin \theta_i, \quad (6.3)$$

$$m\ddot{x}_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} - T_i \cos \theta_i \quad (6.4)$$

si no hay desplazamientos longitudinales y los transversales son pequeños, podemos aproximar, para ángulos pequeños

$$m\ddot{y}_i = T_{i+1} \sin \theta_{i+1} - T_i \sin \theta_i,$$

$$0 = T_{i+1} - T_i$$

de modo que

$$\begin{aligned} T_i &= \tau, \\ m\ddot{y}_i &= \tau(\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i) \\ &\approx \tau\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a} - \frac{y_i - y_{i-1}}{a}\right) \end{aligned}$$

de modo que tenemos como ecuación de movimiento aproximada

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i).$$

Esta ecuación es de la misma forma que la ya resuelta (6.1)

$$\ddot{q}_j = \frac{K}{m}(q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

luego podemos usar la solución anterior tomando  $K \rightarrow \frac{\tau}{a}$

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{\tau}{ma}} \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N,$$

y

$$Q_j = C \sin \frac{\pi j n}{N+1}, \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N.$$

La solución general será

$$y_j(t) = \sum_{n=1}^N C_n \sin \frac{\pi j n}{N+1} e^{i\omega_n t}$$

y

$$\omega_n = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N,$$

Paso al límite continuo  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ ,  $ja \rightarrow x$ ,  $a \rightarrow dx$ , resultará

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^N C_n \sin \frac{\pi x n}{(N+1)a} e^{i\omega_n t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{i\omega_n t}, \\ \omega_n &\simeq \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \sin \frac{n\pi a}{2L} = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \frac{n\pi}{L}, \end{aligned}$$

llamemos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}},$$

luego en el límite continuo la solución es

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp(i \frac{n\pi v t}{L}),$$

que reestudiaremos después al resolver la ecuación de onda.

## 6.4. Limite continuo

Deseamos estudiar lo que sucede si hacemos  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ , y las masas tender a cero de modo que

$$\frac{m}{a} \rightarrow \sigma,$$

siendo  $\sigma$  una constante llamada la densidad lineal de masa. La ecuación de movimiento

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i),$$

pasará a ser dependiente de una variable continua en la posición

$$y_i \rightarrow y(x, t),$$

siendo

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\rightarrow y(x+a, t) = y(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}a^2, \\ y_{i-1} &\rightarrow y(x-a, t) = y(x, t) - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}a^2, \end{aligned}$$

de modo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x, t) &= \frac{\tau}{ma} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}a^2 \\ &= \frac{a\tau}{m} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

y finalmente, la llamada ecuación de onda para la cuerda elástica con masa uniforme:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\tau}{\sigma} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

## 6.5. Soluciones de la ecuación de onda

La última ecuación puede escribirse

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (6.5)$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}},$$

representa, como veremos, la velocidad de propagación de la onda.

## ► TEOREMA 6.1

Las soluciones de la ecuación de onda (6.5) son

$$y(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt),$$

con  $F$  y  $G$  funciones arbitrarias de una variable.

## DEMOSTRACION 2

Si cambiamos a variables  $\zeta = x + vt$ ,  $\psi = x - vt$  podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \psi} \\ &= v \frac{\partial}{\partial \zeta} - v \frac{\partial}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4v^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi}.$$

Entonces, en estas variables, la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \psi} = 0,$$

que es trivial integrar obteniendo

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = f(\zeta),$$

y

$$\begin{aligned} y &= F(\zeta) + G(\psi) \\ &= F(x + vt) + G(x - vt). \end{aligned}$$

Las soluciones anteriores corresponden a una forma invariable que se propaga hacia la derecha  $G(x - vt)$  o hacia la izquierda  $F(x + vt)$  con velocidad constante  $v = \sqrt{\tau/\sigma}$ . Sin embargo en una cuerda, debemos hacer consideraciones adicionales pues debemos satisfacer por ejemplo que  $y(0, t) = y(L, t) = 0$  en el caso de extremos fijos.

### 6.5.1. Condiciones de frontera

Supongamos que queremos resolver la ecuación de onda sujeta a las condiciones anteriores de extremos fijos  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ .

#### Método de separación de variables

Suponga una solución de la forma

$$y(x, t) = X(x)G(t),$$

entonces si se sustituye se obtiene.

$$X(x)G''(t) - v^2 X''(x)G(t) = 0$$

o bien

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)},$$

de modo que cualquiera de los lados no puede ser función ni de  $x$  ni de  $t$ , por lo tanto

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

de donde el signo se ha elegido de modo de tener soluciones oscilatorias

$$G(t) = Ce^{\pm i\omega t}$$

y

$$X(x) = De^{\pm ikx}$$

donde hemos llamado

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Para satisfacer las condiciones de frontera debemos tomar

$$X(x) = D \sin kx,$$

con

$$\sin kL = 0,$$

de modo que hay un número discreto de valores de  $k$  permitidos, es decir

$$k = \frac{n\pi}{L} \text{ con } n = 1, 2, 3 \dots$$

de ese modo, la solución general, que satisface las condiciones de frontera es

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^+ e^{i\frac{n\pi}{L}vt} + D_n^- e^{-i\frac{n\pi}{L}vt}) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

### 6.5.2. Condiciones iniciales

La determinación completa de los coeficientes  $D_n$  requiere de conocer la forma inicial del hilo y su velocidad inicial, es decir supondremos conocidos

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x), \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V(x). \end{aligned}$$

Considerando esto se obtiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^+ + D_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{n\pi}{L}v(D_n^+ - D_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Pero las funciones  $\sin n\pi x/L$  son ortogonales en el intervalo  $(0, L)$  de modo que podemos despejar

$$\begin{aligned} D_n^+ + D_n^- &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ D_n^+ - D_n^- &= -\frac{2i}{n\pi v} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 D_n^+ &= \frac{1}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{i}{n\pi v} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{L} F_n - \frac{i}{n\pi v} V_n \\
 D_n^- &= \frac{1}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{i}{n\pi v} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{L} F_n + \frac{i}{n\pi v} V_n,
 \end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned}
 F_n &= \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 V_n &= \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.
 \end{aligned}$$

Así finalmente la solución es

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{L} F_n - \frac{i}{n\pi v} V_n \right) e^{i \frac{n\pi}{L} vt} + \right. \\
 &\quad \left. \left( \frac{1}{L} F_n + \frac{i}{n\pi v} V_n \right) e^{-i \frac{n\pi}{L} vt} \right) \sin \frac{n\pi x}{L},
 \end{aligned}$$

que se reduce a

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left( F_n \cos \frac{n\pi}{L} vt + \frac{L}{n\pi v} V_n \sin \frac{n\pi}{L} vt \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.6)$$

### Caso particular, la cuerda parte del reposo

Para este caso, lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \\
 F_n &= \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.5.1 *Demuestre que el resultado anterior puede escribirse:*

$$y(x, t) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left( \sin \left( \frac{n\pi}{L}(x + vt) \right) + \sin \left( \frac{n\pi}{L}(x - vt) \right) \right)$$

o sea, tal como se establece en el teorema. Y además que

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin n\pi \frac{x}{L} \cos n \frac{\pi}{L} vt$$

## 6.6. Método de las series de Fourier

Todas las funciones que se anulan en  $x = 0$ ,  $x = L$  pueden expandirse en serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx'$$

de modo que la solución de la ecuación de onda para la cuerda con extremos fijos puede expandirse así

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

que al sustituir en la ecuación de onda da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin \frac{n\pi x}{L} + v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} = 0,$$

de donde por la independencia de las funciones base se obtiene

$$b_n''(t) + \frac{v^2 n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t) = 0,$$

con soluciones

$$b_n(t) = A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t + B_n \sin \frac{vn\pi}{L} t$$

de modo que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{vn\pi}{L}t + B_n \sin \frac{vn\pi}{L}t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Para tomar en cuenta las condiciones iniciales considere

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ B_n &= \frac{2}{vn\pi} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

o sea se ha obtenido el mismo resultado de (6.6)

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{vn\pi}{L}t + B_n \sin \frac{vn\pi}{L}t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.7)$$

Esta se denomina la solución de Benouilli.

## 6.7. Consideraciones adicionales

Podemos insistir en tratar de satisfacer las condiciones iniciales y de frontera en una cuerda con extremos fijos usando la forma más general

$$y(x, t) = F_1(x + vt) + F_2(x - vt).$$

### 6.7.1. Condiciones iniciales.

#### Cuerda parte del reposo.

Para tener un problema más simples, imaginemos que la cuerda parte del reposo. Entonces debemos imponer

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x) = F_1(x) + F_2(x), \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0 = vF_1'(x) - vF_2'(x), \\ y(0, t) &= F_1(vt) + F_2(-vt) = 0, \\ y(L, t) &= F_1(L + vt) + F_2(L - vt) = 0. \end{aligned}$$

La tercera impone que

$$F_2(x) = -F_1(-x),$$

de modo que tenemos que satisfacer

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x) - F_1(-x), \\ 0 &= vF_1'(x) - vF_1'(-x), \\ y(L, t) &= F_1(L + vt) - F_1(-L + vt) = 0. \end{aligned}$$

si la segunda se integra respecto  $x$  se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= F_1(x) + F_1(-x) - 2F_1(0) \\ F(x) &= F_1(x) - F_1(-x), \end{aligned}$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_1(0) + \frac{1}{2}F(x), \\ F_1(-x) &= F_1(0) + \frac{1}{2}(-F(x)). \end{aligned}$$

ambas son compatibles si

$$F(x) = -F(-x)$$

lo cual requiere extender el rango de definición de  $F$  de modo que ella sea impar. Luego la solución puede escribirse

$$\begin{aligned} y(x, t) &= F_1(x + vt) - F_1(-(x - vt)) \\ &= \frac{1}{2} (F(x + vt) + F(x - vt)). \end{aligned}$$

La última condición es  $y(L, t) = 0$  de modo que

$$F(L + vt) + F(L - vt) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= -F(-x) \\ F(L + x) &= -F(L - x) \end{aligned}$$

o sea basta extender el rango de definición de  $F$  de modo que sea impar y periódica con periodo  $2L$ . Así la solución queda expresada en términos de la forma inicial de la cuerda  $F(x)$ , extendida periódicamente a una función impar de periodo  $2L$ .

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (F(x + vt) + F(x - vt)).$$

De este modo, en un punto fijo  $x$  la oscilación es periódica con periodo  $T$  dado por

$$vT = 2L,$$

o sea

$$T = \frac{2L}{v}.$$

### Caso general, solución de D'Alembert

Ahora las condiciones iniciales y de contorno son las siguientes

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x) = F_1(x) + F_2(x), \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V(x) = vF_1'(x) - vF_2'(x), \\ y(0, t) &= F_1(vt) + F_2(-vt) = 0, \\ y(L, t) &= F_1(L + vt) + F_2(L - vt) = 0. \end{aligned}$$

La tercera impone que

$$F_2(x) = -F_1(-x),$$

y la cuarta

$$F_1(L+x) = -F_2(L-x),$$

Además tenemos que satisfacer

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x) - F_1(-x), \\ V(x) &= vF_1'(x) - vF_1'(-x), \end{aligned}$$

si la segunda se integra respecto  $x$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^x V(x)dx &= vF_1(x) + vF_1(-x) - 2vF_1(0) \\ vF(x) &= vF_1(x) - vF_1(-x), \end{aligned}$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_1(0) + \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x V(x)dx, \\ F_1(-x) &= F_1(0) - \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x V(x)dx. \end{aligned}$$

ambas son compatibles si

$$F(x) = -F(-x),$$

y

$$V(x) = -V(-x),$$

lo cual requiere extender el rango de definición de  $F$  y  $V$  de modo que ellas sean impares. Luego la solución puede escribirse

$$\begin{aligned} y(x,t) &= F_1(x+vt) - F_1(-(x-vt)) \\ &= \frac{1}{2}F(x+vt) + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} V(x)dx - \\ &\quad \left( -\frac{1}{2}F(x-vt) + \frac{1}{2v} \int_0^{x-vt} V(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{2}(F(x+vt) + F(x-vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x)dx. \end{aligned}$$

Donde las condiciones de contorno  $y(L, t) = 0$ ,  $y(0, t) = 0$  se satisfacen si

$$\begin{aligned} F(x) &= -F(-x), \\ V(x) &= -V(-x), \end{aligned}$$

y son de periodo  $2L$ .

EJEMPLO 6.7.1 Si la forma inicial fuera una semi senoide

$$F(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

esta función es de antemano impar y de periodo  $2L$ . Entonces

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{A}{2} \left( \sin \frac{\pi(x+vt)}{L} + \sin \frac{\pi(x-vt)}{L} \right) \\ &= A \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi}{L} vt. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.7.2 En general, una extensión impar y de periodo  $2L$  de  $F(x)$  es

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \sin \frac{n\pi(x+vt)}{L} + \sin \frac{n\pi(x-vt)}{L} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi \frac{x}{L} \cos n\pi \frac{vt}{L}. \end{aligned}$$

## 6.8. Caso general

Para el caso general donde la forma inicial de la cuerda y su velocidad son dadas, la solución la escribimos

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

siendo

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$B_n = \frac{2}{vn\pi} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

**EJERCICIO 6.8.1** Demuestre que si  $F(x)$  y  $V(x)$  representan extensiones impares y de periodo  $2L$  de la forma y de la velocidad inicial de la cuerda, entonces la expresión

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(F(x+vt) + F(x-vt))$$

$$+ \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x) dx$$

satisface la ecuación de onda y además

$$y(x, 0) = F(x),$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = V(x),$$

$$y(0, t) = 0,$$

$$y(L, t) = 0.$$

Esta solución se denomina de D'Alembert. Vea [1].

**EJEMPLO 6.8.1** Si la cuerda parte recta con un perfil de velocidades iniciales

$$V(x) = V_0 \sin \frac{\pi x}{L},$$

de nuevo  $V(x)$  es de antemano impar y de periodo  $2L$ , por lo tanto

$$y(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x) dx$$

$$= \frac{V_0 L}{\pi v} \sin \frac{\pi}{L} vt \sin \pi \frac{x}{L}$$

$$= \frac{V_0 L}{2\pi v} \left( \cos \pi \frac{x-vt}{L} - \cos \pi \frac{x+vt}{L} \right).$$

## 6.9. Ejemplos

EJEMPLO 6.9.1 Una cuerda de longitud  $L$  con extremos fijos comienza a oscilar partiendo del reposo de manera que su forma inicial es:

$$F(x) = \begin{cases} Ax/L & \text{si } x < L/2 \\ A(1 - x/L) & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

Determine  $y(x, t)$ .

**Solución.** La solución será

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

siendo

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

donde evaluamos

$$\frac{2}{L} \int_0^{L/2} (Ax/L) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L A(1 - \frac{x}{L}) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

resultando

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 4A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2}n\pi}{n^2\pi^2} \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= 4A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \cos \frac{v(2k+1)\pi t}{L} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Esta solución sin embargo dice poco de la forma que tiene la onda. Analicemos la solución de D'Alembert

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(F(x + vt) + F(x - vt)).$$

En la figura siguiente se ilustra la extensión periódica de  $F(x)$

De modo que cuando ha transcurrido un tiempo  $t$ ,  $F(x + vt)$  en el rango de su argumento desde  $0 \rightarrow L$  está remarcado a la derecha y  $F(x - vt)$  está remarcado en el rango de su argumento de  $0 \rightarrow L$  a la izquierda. Ambas

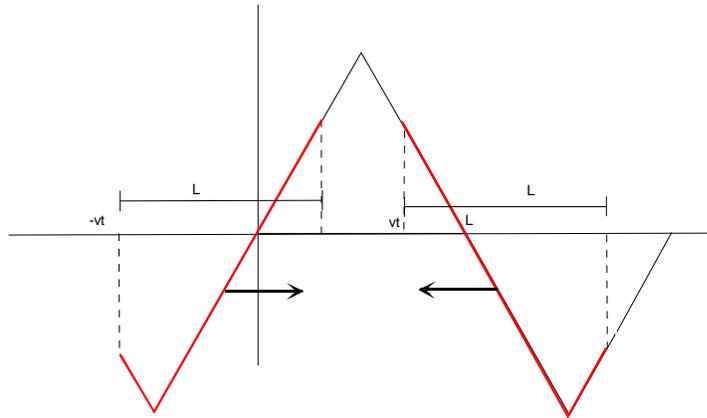


Figura 6.3: Solución de D'Alembert.

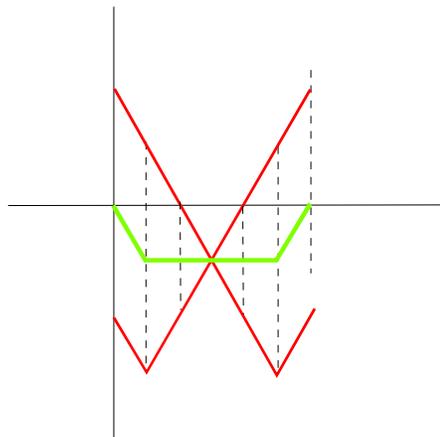


Figura 6.4: Solución de D'Alembert

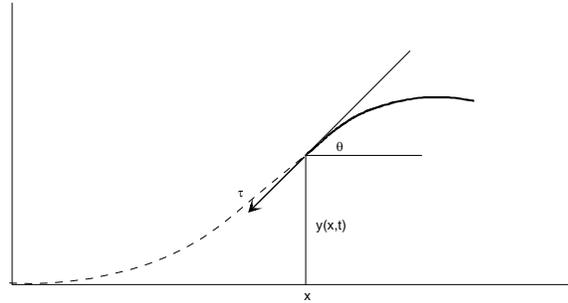


Figura 6.5: Potencia en una onda.

curvas las debemos llevar al intervalo donde está la cuerda, y superponer los resultados, obteniendo la forma ilustrada en la figura siguiente:

Es aparente que la forma de la onda será simétrica respecto al punto medio, y formada por segmentos rectos, a pesar de la aparentemente complicada serie de Fourier de la solución anterior.



## 6.10. Consideraciones energéticas

Consideremos el trozo de cuerda desde  $x$  en adelante, como se indica en la figura (6.5). Sobre ese trozo actúa la fuerza ejercida por la parte izquierda de la cuerda es decir

$$F = -\tau \sin \theta \approx -\tau \tan \theta = -\tau \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}.$$

Por otro lado la velocidad de ese extremo de la cuerda es

$$v_y = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t},$$

de modo que la potencia entregada al lado derecho de la cuerda (por el izquierdo) es

$$P = Fv_y = -\tau \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} y(x, t). \quad (6.8)$$

### 6.10.1. Potencia en ondas armónicas

Para una onda armónica senoidal del tipo

$$y = A \sin(kx - \omega t),$$

resulta

$$P = \tau A^2 k \omega \cos^2(kx - \omega t).$$

Aquí se tienen las relaciones

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$v = \frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}},$$

de modo que la potencia puede escribirse

$$P = \sigma \omega^2 A^2 v \cos^2(kx - \omega t).$$

o sea en una onda que viaja hacia la derecha hay una potencia positiva entregada desde el lado izquierdo al derecho. La potencia promedio puede calcularse y resulta

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sigma \omega^2 A^2 v.$$

### 6.10.2. Algunas soluciones de la ecuación de onda en tres dimensiones

De acuerdo a las propiedades del operador  $\nabla$  puede probarse que son soluciones de la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \phi = 0.$$

### 6.10.3. A) Ondas planas

Esta son soluciones de la forma

$$\phi(x, y, z, t) = F(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t),$$

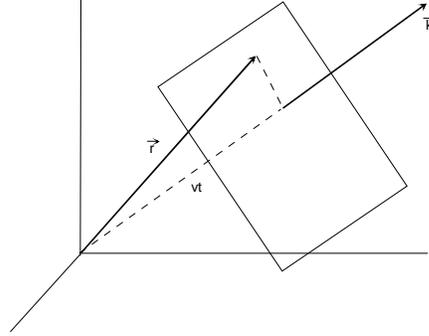


Figura 6.6: Onda plana.

donde  $F$  es una función arbitraria (diferenciable),  $v$  es la velocidad y  $\vec{k}$  es un vector constante cuya magnitud se denomina número de onda. Para demostrarlo basta considerar que

$$\begin{aligned}\nabla F(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt) &= \vec{k} F'(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt), \\ \nabla^2 F(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt) &= \vec{k} \cdot \nabla F(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt) \\ \nabla^2 \phi &= k^2 F''(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \omega^2 F''(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt),\end{aligned}$$

que prueba lo establecido siempre y cuando

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Hay que observar, que los puntos donde  $F$  tiene un valor constante, digamos  $F(0)$  están sobre el plano

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{r} &= \omega t \\ \hat{k} \cdot \vec{r} &= vt,\end{aligned}$$

es decir un plano que viaja precisamente con la velocidad de propagación de la onda  $v = \omega/k$ , de allí se justifica la denominación de ondas planas.

### 6.10.4. B) Ondas esféricas

En coordenadas esféricas el Laplaciano puede escribirse (ver apéndice)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

de modo que si buscamos soluciones de la ecuación de onda que dependan de la distancia al origen solamente, la ecuación de onda será

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = 0,$$

pero usted puede establecer que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi),$$

de modo que la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) = 0,$$

y entonces

$$r\phi(r, t) = F(kr - \omega t),$$

por lo cual una onda esférica es de la forma

$$\phi(r, t) = \frac{F(kr - \omega t)}{r},$$

donde la velocidad de propagación es ahora

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

### Interferencia de ondas

Consideremos ondas senoidales unidimensionales  $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$  donde  $\phi$  se conoce como la fase de la onda. Debido a que la ecuación de onda es lineal, la superposición de este tipo de ondas de la misma velocidad  $v = \omega/k$  es también solución de la ecuación de onda. La superposición de ondas de este tipo causa el fenómeno llamado de interferencia, en particular de interferencia constructiva e interferencia destructiva. Considere por ejemplo

que la frecuencia sea la misma, entonces la longitud de onda también es la misma y el fenómeno que ocurre en la superposición depende de la diferencia de fase. En efecto, la superposición será

$$\psi = A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2).$$

Aquí conviene utilizar elementos de los números complejos. Considere

$$A_1 e^{i(kx - \omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(kx - \omega t + \phi_2)} = A e^{i(kx - \omega t)},$$

esto es cierto si

$$\begin{aligned} A &= A_1 e^{i(\phi_1)} + A_2 e^{i(\phi_2)} \\ &= e^{i(\phi_1)} (A_1 + A_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1)}). \end{aligned}$$

Este número complejo puede colocarse en su forma polar de acuerdo a

$$A = |A| e^{i\phi}$$

donde

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{(A_1 + A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1))^2 + (A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1))^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}, \\ \tan \phi &= \frac{A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}. \end{aligned}$$

En resumen

$$A_1 e^{i(kx - \omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(kx - \omega t + \phi_2)} = |A| e^{i\phi} e^{i(kx - \omega t)},$$

donde la superposición de ondas senoidales es la parte imaginaria de la última expresión, es decir

$$\begin{aligned} \psi &= A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)} \sin(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

Es decir la superposición es una onda del mismo tipo, con otra fase  $\phi$  y con otra amplitud. La interferencia se llama constructiva si la amplitud de la onda resultante es máxima y destructiva si es mínima. Estos casos ocurren evidentemente si

a) Constructiva:  $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots,$

$$\psi = |A_1 + A_2| \sin(kx - \omega t).$$

b) Destructiva:  $\phi_2 - \phi_1 = (2n + 1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots,$

$$\psi = |A_1 - A_2| \sin(kx - \omega t).$$

### Pulsaciones

Otro fenómeno ocurre si las ondas que se superponen tienen la misma velocidad  $v$  pero diferentes longitudes de onda y en consecuencia diferentes frecuencias. Suponiendo las mismas fases y amplitudes la superposición es

$$\psi = A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t),$$

pero

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta), \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta), \end{aligned}$$

de modo que

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta),$$

o

$$\sin(A) + \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

luego

$$\psi = 2A \sin \frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2},$$

pero

$$v = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2},$$

entonces podemos escribir

$$\psi = 2A \sin \frac{\left(\frac{\omega_1}{v} + \frac{\omega_2}{v}\right)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{\left(\frac{\omega_1}{v} - \frac{\omega_2}{v}\right)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2},$$

esto es el producto de dos ondas que se propagan con la misma velocidad  $v$  y que tienen frecuencias, una alta frecuencia

$$\omega_1 + \omega_2$$

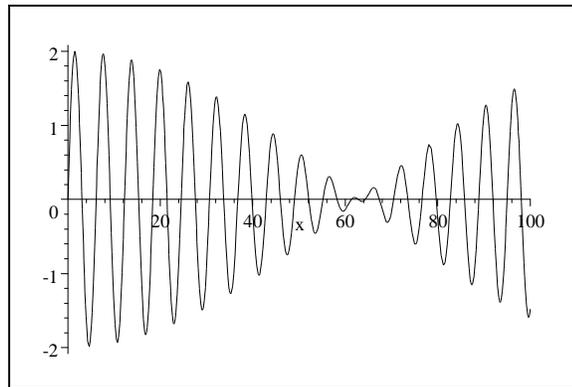
y otra que puede ser muy pequeña

$$\omega_1 - \omega_2$$

Para visualizar esto grafiquemos la forma de la onda en  $t = 0$

$$\psi = 2A \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)x}{2v} \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)x}{2v}$$

con  $A = 1$ ,  $v = 100$ ,  $\omega_1 = 100$ ,  $\omega_2 = 105$



Este fenómeno se puede escuchar como un batido de baja frecuencia cuando se pulsan dos cuerdas de guitarra casi afinadas en la misma nota.

### 6.10.5. Velocidad de grupo

La superposición de muchas ondas de casi la misma frecuencia y con longitudes de onda parecidas también, causa el fenómeno de la formación de un grupo que se dispersa. Para precisar las cosas supongamos que se superponen ondas con frecuencias en un cierto rango continuo, donde esas frecuencias dependen de la longitud de onda de alguna forma funcional tal como

$$\omega = \omega(k).$$

Esta relación se denomina relación de dispersión. En otras palabras estamos suponiendo que la velocidad de propagación  $v = \omega(k)/k$  es alguna función de  $k$  es decir de la longitud de onda. Este caso tiene una representación concreta en el caso de las ondas luminosas que se propagan en materiales transparentes, donde la velocidad de propagación en ese medio es dependiente de la longitud de onda. Bueno, para ver lo que ocurre considere entonces una superposición continua para algún rango continuo de valores de  $k$

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t) dk.$$

Supongamos que la superposición es hecha en un entorno a un valor  $k_0$ . Si expandimos hasta primer orden

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega'_0(k - k_0),$$

entonces

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(kx - \omega(k)t) dk, \\ &= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(kx - (\omega_0 + \omega'_0(k - k_0))t) dk, \\ &= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(\omega'_0 k_0 t - \omega_0 t + k(x - \omega'_0 t)) dk, \\ &\approx \frac{2A_0}{x - \omega'_0 t} \sin(\Delta(x - \omega'_0 t)) \sin(k_0 x - \omega_0 t) \end{aligned}$$

donde hemos supuesto  $A_k \approx A_{k_0} = A_0$ . O sea, la resultante

$$\psi = 2A_0 \frac{\sin(\Delta(x - \omega'_0 t))}{x - \omega'_0 t} \sin(k_0 x - \omega_0 t)$$

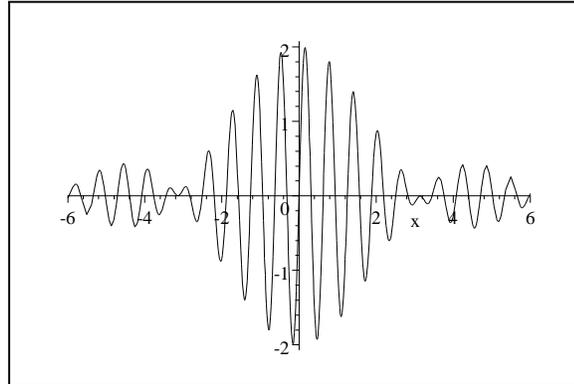
es una onda que viaja con la llamada velocidad de fase  $\omega_0/k_0$  modulada por otra onda que viaja con la llamada velocidad de grupo

$$v_g = \omega'_0 = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0}.$$

Note que en esta aproximación la amplitud máxima de la modulación ocurre en

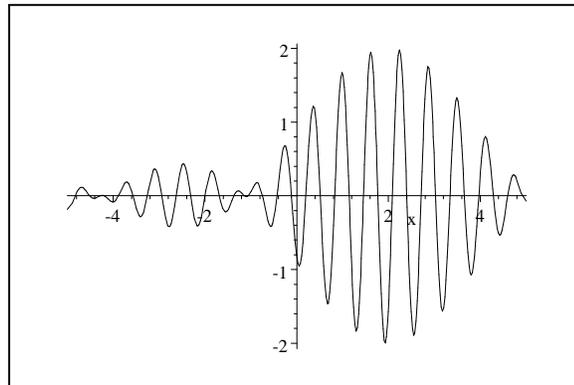
$$x = \omega'_0 t$$

Representaremos el grupo viajero para  $k_0 = 10$ ,  $\Delta = 1$ ,  $A_0 = 1$ ,  $\omega'_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ , en dos tiempos,  $t = 0$  y  $t = 2$ .



Grupo en  $t=0$ .

y para  $t = 2$



Grupo en  $t=2$ .

### 6.10.6. Efecto Doppler clásico.

Suponga una onda viajera hacia la derecha del tipo armónico de velocidad de propagación  $v$

$$\phi(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

Si otro observador se aleja hacia la derecha sobre el eje  $x$  con velocidad  $u < v$ , ¿que onda es observada por el observador móvil? Para el observador

móvil llamaremos la coordenada  $x'$ . Supondremos válida la transformación de Galileo, es decir obtendremos el denominado efecto Doppler clásico. Esta transformación puede escribirse

$$\begin{aligned}x' &= x - ut, \\t' &= t.\end{aligned}$$

Así resulta

$$\begin{aligned}\phi'(x', t') &= \phi(x, t) = \phi(x' + ut, t'), \\&= A \sin(k(x' + ut) - \omega t), \\&= A \sin(kx' - (\omega - ku)t)\end{aligned}$$

es decir una onda armónica pero con frecuencia

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega - ku, \\&= \omega\left(1 - \frac{ku}{\omega}\right), \\&= \omega\left(1 - \frac{u}{v}\right),\end{aligned}$$

es decir una frecuencia menor. Si al contrario, el observador y la onda tienen direcciones de movimiento de distinto sentido resultará

$$\omega' = \omega\left(1 + \frac{u}{v}\right),$$

una frecuencia mayor.

### 6.10.7. Efecto Doppler relativista

Para velocidades del observador muy altas, cercanas a la velocidad de la luz, debe aplicarse la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - ut), \\t' &= \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right),\end{aligned}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Así resulta

$$\begin{aligned}\phi'(x', t') &= \phi(x, t) = \phi\left(\gamma(x' + ut'), \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)\right), \\&= A \sin\left(k\gamma(x' + ut') - \omega\gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)\right), \\&= A \sin\left(\gamma\left(k - \omega\frac{u}{c^2}\right)x' - \gamma(\omega - ku)t'\right)\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}k' &= \gamma(k - \omega \frac{u}{c^2}), \\ \omega' &= \gamma(\omega - ku) = \gamma\omega(1 - \frac{u}{v}), \\ v' &= \frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega - ku}{k - \omega \frac{u}{c^2}} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}.\end{aligned}$$

### 6.10.8. Efecto Doppler para ondas luminosas

Si las ondas tienen la velocidad de la luz, entonces  $v' = v = c$  y los resultados anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma(\omega - ku) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\omega(1 - \frac{u}{c}), \\ \omega' &= \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}}\omega.\end{aligned}$$

### 6.10.9. Efecto Doppler cosmológico

Cuando la luz proveniente de las galaxias lejanas se analiza mediante espectrómetros, se ha encontrado que las líneas espectrales de los elementos iguales a los de la Tierra, hidrógeno por ejemplo, están corridas hacia longitudes de onda mayores, esto es están corridas hacia el rojo, tal como si esa galaxias se alejaran de nosotros. Si ese es el caso, entonces la longitud de onda recibida debe ser

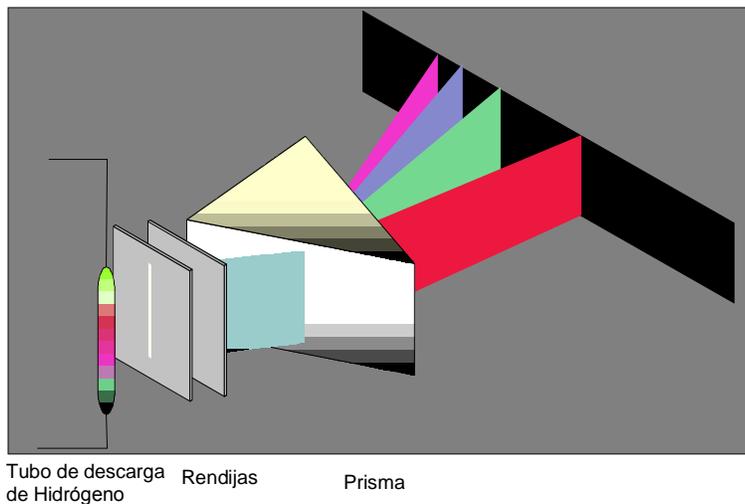
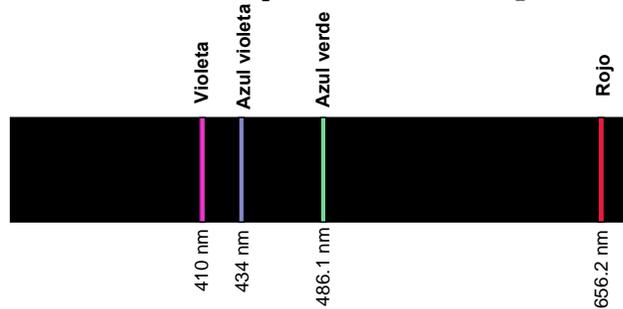
$$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Que es mayor que la emitida. El corrimiento al rojo se define mediante

$$z = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1,$$

Los astrónomos han observado corrimientos al rojo hasta un valor  $z = 6$  y este valor corresponde a una velocidad de la galaxia que se aleja del orden

de  $v = 0.96c$ . En realidad la teoría moderna de la Cosmología establece que realmente las galaxias no se alejan sino que es el espacio que hay entre todas las galaxias el que está creciendo, por ello se habla de velocidades de recesión y a este efecto se le conoce como efecto Doppler cosmológico. Hay dos excelentes libros de Stephen Hawking, *La Historia del Tiempo* y *el Universo en una cascara de Nuez* que explican esto y mucho más. En las figuras que siguen se muestran líneas del espectro visible del Hidrógeno y un esquema que permite observar las líneas espectrales del hidrógeno.



La real explicación de Efecto Doppler cosmológico consiste en que la luz de las galaxias que recibimos hoy aumenta su longitud de onda en la misma proporción en que el espacio ha aumentado durante el tiempo de viaje de la luz.

## 6.11. Elementos de mecánica de Fluidos

Para estudiar la dinámica de los fluidos, se han seguido dos caminos. Uno debido a Lagrange intenta seguir las coordenadas de cada partícula de fluido a medida que transcurre el tiempo de acuerdo a las fuerzas que ella experimenta. Otra forma debida a Euler consiste en abandonar el intento de precisar las coordenadas de cada partícula de fluido, y en vez, preocuparse de la densidad y la velocidad del fluido en puntos fijos del espacio en cada instante de tiempo. Este es el método que describiremos resumidamente aquí. Así se definen  $\rho(x, y, z, t)$  la densidad del fluido en un punto del espacio en tiempo  $t$  y  $\vec{v}(x, y, z, t)$  el vector velocidad de un elemento de fluido ubicado en ese mismo punto y en ese mismo tiempo. A pesar de que nos concentraremos en puntos fijos del espacio, las ecuaciones usuales de la mecánica aplican a partículas y por lo tanto será inevitable seguir el movimiento de las partículas al menos por intervalos de tiempos cortos. Así estaremos interesados en dos tipos de derivadas. Por ejemplo si  $p(x, y, z, t)$  representa la presión en un punto en un tiempo determinado

$$\frac{\partial p}{\partial t}$$

representará la tasa a la cual está cambiando la presión en un punto fijo y

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p, \end{aligned}$$

representará la tasa a la cual está cambiando la presión en un punto que sigue el movimiento del fluido. Esto aplicará a cualquier función de las coordenadas y del tiempo, lo cual anotaremos simbólicamente como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla.$$

### 6.11.1. Cambio del volumen

Consideremos un elemento de volumen  $\delta V$  que se mueve con el fluido de modo que contiene siempre el mismo número de partículas de fluido. Si el fluido se mueve, ese elemento se mueve y en general cambiará de volumen. Supongamos que se trata de un elemento de volumen rectangular de lados

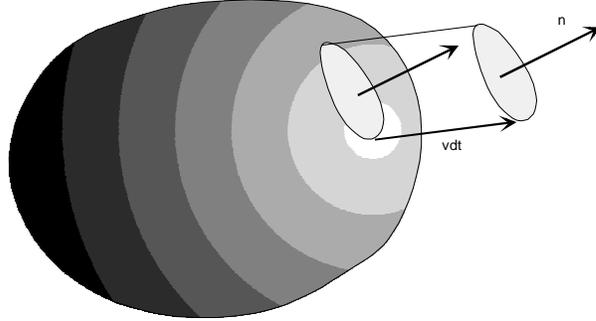


Figura 6.7: Cambio de volumen debido a la velocidad.

$\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ . Entonces sus caras tienen velocidades  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ . Así el cambio de volumen debido al desplazamiento de las caras  $\delta y \delta z$  (una en  $x$  la otra en  $x + \delta x$ ) será

$$\begin{aligned} d\delta V &= \delta y \delta z (v_x(x + \delta x, t) dt - v_x(x, t) dt) \\ &= \delta y \delta z \delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} dt, \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} \frac{d\delta V}{dt} &= \delta y \delta z \delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ &= \delta V \frac{\partial v_x}{\partial x}. \end{aligned}$$

Más en general, si varían las posiciones de las seis caras, se tiene

$$\frac{d\delta V}{dt} = \delta V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),$$

o sea

$$\frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot \vec{v} \delta V.$$

Algunas propiedades del operador  $\nabla$  se explican en el apéndice. Más en general, como se explica en la figura que sigue, el cambio de volumen que se produce por el cambio del área se puede expresar como (base  $\times$  altura)

$$\begin{aligned} dV &= \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dt dS \\ \frac{dV}{dt} &= \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS. \end{aligned}$$

Si se utiliza el teorema de la divergencia la última expresión puede escribirse como

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV.$$

### Fluidos incompresibles

Si el fluido es incompresible, es decir si el volumen de un número determinado de partículas no cambia con el tiempo, entonces del resultado anterior sigue que

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

### Ecuación de continuidad

La masa de un elemento de volumen que sigue el movimiento del fluido no varía. Eso se puede escribir utilizando el concepto de densidad volumétrica de masa  $\rho$  como

$$\delta m = \rho \delta V = \text{constante},$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \frac{d}{dt} \delta V &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \nabla \cdot \vec{v} \delta V &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

pero

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho,$$

luego

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (6.9)$$

Esta última relación se denomina la ecuación de continuidad de un fluido.

## 6.12. Ecuación de movimiento de un fluido ideal

En un fluido ideal, por definición, no actúan otras fuerzas de un elemento sobre otro de fluido, más que las fuerzas de presión, que actúan normalmente a las superficies de los elementos considerados. En los fluidos reales, actúan además fuerzas tangenciales o de viscosidad que por ahora despreciaremos. Aceptaremos además que pueden actuar fuerzas externas sobre cada elemento de volumen, tal como el peso de aquel. La presión es isotrópica de modo que la fuerza que actúa sobre cada elemento de área se obtiene simplemente multiplicando la presión sobre el área por el área en cuestión. Así, si se trata de un elemento de volumen como un paralelepípedo rectangular de aristas  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , la fuerza resultante en la dirección  $x$  debida a la presión será

$$\begin{aligned}\delta F_x &= p(x, y, z)\delta y\delta z - p(x + \delta x, y, z)\delta y\delta z \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z,\end{aligned}$$

y en su forma vectorial

$$\delta \vec{F} = -\nabla p \delta V.$$

Sea además  $\vec{f}$  la fuerza externa que actúa por unidad de volumen. Así la fuerza resultante sobre el elemento de volumen será

$$\delta \vec{F} = -\nabla p \delta V + \vec{f} \delta V.$$

La segunda ley de Newton establece que esta fuerza es la masa por la aceleración del elemento de volumen, o sea

$$\rho \delta V \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \delta V + \vec{f} \delta V,$$

o bien

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p,$$

ahora, si realizamos la derivada total obtenemos

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \vec{f} - \nabla p,$$

y así obtenemos la ecuación de Euler para el movimiento de un fluido ideal:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\vec{f}}{\rho} - \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (6.10)$$

En este capítulo sólo estamos interesados en el tema de Ondas en medios continuos tales como los fluidos, por lo tanto no es necesario profundizar más en otros temas de la Mecánica de fluidos.

### 6.12.1. Onda sonoras en un fluido

Supongamos un fluido en equilibrio a una presión  $p_0$  una densidad  $\rho_0$  y sometido a una fuerza externa volumétrica  $\vec{f}_0$ . Para esta situación, la ecuación (6.10) se convierte en

$$\vec{f}_0 = \nabla p_0. \quad (6.11)$$

Supongamos ahora que el fluido se somete a una perturbación pequeña de modo que la presión y la densidad se alteran a

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \end{aligned}$$

siendo  $p' \ll p$  y  $\rho' \ll \rho$  y supondremos además que la velocidad y sus derivadas son también pequeñas. Si sustituimos en (6.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \frac{\vec{f}_0}{\rho_0 + \rho'} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0 + \rho'} \\ &\approx \frac{\vec{f}_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) - \frac{\nabla p_0 + \nabla p'}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \end{aligned}$$

si despreciamos términos cuadráticos en  $\vec{v}$  y en las cantidades pequeñas  $p'$  y  $\rho'$  se obtiene

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx \frac{\vec{f}_0}{\rho_0} - \frac{\vec{f}_0 \rho'}{\rho_0^2} - \frac{\nabla p_0 + \nabla p'}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right),$$

o sea

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}. \quad (6.12)$$

Además si se sustituye en la ecuación de continuidad (6.9) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho')\vec{v}) \\ &\approx \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}), \end{aligned}$$

o sea

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla \rho_0. \quad (6.13)$$

Finalmente supondremos que la densidad en equilibrio es prácticamente constante de modo que la última ecuación puede escribirse

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (6.14)$$

### La compresibilidad $\kappa$ y su recíproco $B$

En termodinámica se definen la compresibilidad isotérmica

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{B_T},$$

y la compresibilidad adiabática

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{B_S},$$

donde  $T$  y  $S$  denotan la temperatura absoluta y la entropía del sistema. Cuando una onda acústica pasa a través de una sustancia los cambios de volumen son en realidad adiabáticos en vez de isotérmicos, de modo que la segunda de las anteriores es la que aplica. Ella puede ser escrita como

$$\frac{1}{B_S} = \kappa_S = -\frac{1}{m/\rho} \left( \frac{\partial m/\rho}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S.$$

De este modo el incremento en la presión y la densidad están relacionadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_S} &= \kappa_S = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho'}{p'} \\ \rho' &= \frac{\rho_0 p'}{B_S}. \end{aligned}$$

Así podemos eliminar  $\rho'$  de la ecuación (6.14) obteniendo

$$\frac{\rho_0}{B_S} \frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v} \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -B_S \nabla \cdot \vec{v}. \quad (6.16)$$

Si derivamos respecto al tiempo y utilizamos (6.12) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= -B_S \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= \frac{B_S}{\rho_0} \nabla \cdot \nabla p',\end{aligned}$$

es decir tenemos que las variaciones de la presión  $p'$  satisfacen la ecuación de ondas en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 p' = 0, \quad (6.17)$$

donde la velocidad de propagación está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_S}{\rho_0}}.$$

### 6.13. Ejercicios propuestos

**EJERCICIO 6.13.1** *Una cuerda elástica de largo  $L$  con extremos fijos parte del reposo con una deformación inicial*

$$y(0, x) = \begin{cases} cx & \text{si } x < L/2 \\ 0 & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

*Resuelva para  $y(x, t)$  en su desarrollo de Fourier. Esquematice cuidadosamente la forma de la onda para  $t = T/4$ ,  $T = T/2$ , mediante la solución de D'Alembert.*

**EJERCICIO 6.13.2** *Repita el problema anterior si la cuerda parte tensa con un perfil de velocidades inicial*

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 x/L & \text{si } x < L/2 \\ v_0(1 - x/L) & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

**EJERCICIO 6.13.3** *Obtenga la superposición de las dos ondas*

$$\psi = 2A \sin(kx - \omega t + \pi/4) + A \sin(kx - \omega t).$$

EJERCICIO 6.13.4 *Obtenga una expresión general para la superposición*

$$\psi = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2).$$

EJERCICIO 6.13.5 *Determine la potencia promedio transmitida por la onda del problema anterior.*

EJERCICIO 6.13.6 *Demuestre que si un punto se mueve sobre un plano de manera que sus dos coordenadas varían como*

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t - \alpha), \\ y &= B \cos(\omega t - \beta), \end{aligned}$$

*entonces el punto describe una elipse. Determine además la orientación de esa elipse respecto al eje  $x$ .*

EJERCICIO 6.13.7 *Demuestre que una superposición de ondas de la forma*

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t) dk.$$

*no satisface la ecuación de ondas a menos que*

$$v = \frac{\omega(k)}{k}$$

*sea constante. Esto naturalmente cuestiona el hecho de superponer ondas que no satisfacen una ecuación lineal. Las situaciones físicas donde se forman grupos son complejas y están fuera del alcance de estos apuntes. Vea([1, pag.370] )*

EJERCICIO 6.13.8 *Demuestre que si  $v$  denota la velocidad de fase de una onda armónica y  $v_g$  la velocidad de grupo, entonces*

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}.$$

EJERCICIO 6.13.9 *Si  $n(\lambda)$  denota el índice de refracción de un material transparente en función de la longitud de onda, demuestre que la velocidad de grupo está dada por*

$$v_g = \frac{c}{n} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} n'(\lambda) \right).$$

*Determine la velocidad con que se aleja una estrella si una determinada línea espectral está corrida un 10% en frecuencia respecto a su valor en reposo.*

EJERCICIO 6.13.10 *Una de las líneas más fuertes de emisión observadas de las galaxias distantes viene del Hidrógeno y tiene una longitud de onda de 122 nm en el ultravioleta. ¿Cuán rápido debería estar alejándose una galaxia de nosotros para que la línea cayera en el visible con una longitud de onda de 366 nm.*

EJERCICIO 6.13.11 *Una galaxia distante se está alejando de nosotros con una velocidad de  $2 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$ . Calcular el desplazamiento relativo al rojo  $(\lambda_0 - \lambda)/\lambda_0$  de la luz procedente de esa galaxia, siendo  $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ .*

EJERCICIO 6.13.12 *Una fuente luminosa se acerca a la Tierra con rapidez  $v$  y emite luz de Sodio con longitud de onda 589 nm. En la Tierra se observa un valor 620 nm. Determine la rapidez  $v$ .*

EJERCICIO 6.13.13 *Una galaxia distante se aleja de la Tierra de modo que cada longitud de onda está aumentada en un factor 2, es decir  $\lambda = 2\lambda_0$ . Determine la rapidez de alejamiento de esa galaxia respecto a nosotros.*

## Problemas complementarios

EJERCICIO 7.0.14 *Demuestre que el movimiento de una partícula en un campo central  $V(r) = -k/r + h/r^2$  con  $k$  y  $h$  constantes, es el mismo que bajo el potencial de Kepler, cuando se expresa con respecto a un sistema de referencia que rota en torno del centro de fuerza. Determine además para energía negativa y cuando el término adicional es muy pequeño, la velocidad de precesión de la órbita cuasielíptica .*

EJERCICIO 7.0.15 *Una partícula es disparada desde la superficie de la tierra, supuesta esférica de masa  $M$  y radio  $R$ , con rapidez inicial  $V_0$ , formando un ángulo  $\phi$  con la vertical del lugar. Despreciando la resistencia del aire, la rotación terrestre y el movimiento de la tierra, demuestre que la excentricidad de la trayectoria está dada por*

$$e^2 = 1 + \frac{R^2 V_0^2 \sin^2(\phi)}{G^2 M^2} \left( V_0^2 - \frac{2GM}{R} \right).$$

*la trayectoria es*

$$r = \frac{R^2 V_0^2 \sin^2(\phi)}{GM(1 + e \cos(\theta))}.$$

*¿cuál es la ubicación del eje polar de la cónica?*

EJERCICIO 7.0.16 *Dos partículas se mueven bajo la acción de su atracción gravitacional, una en torno de la otra en órbitas circulares, con periodo  $\tau$ .*

Si su movimiento es repentinamente detenido, cayendo entonces una hacia la otra, demuestre que ellas chocan en un tiempo dado por

$$t = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

EJERCICIO 7.0.17 Si  $g(p)$  denota la transformada de Legendre de  $f(x)$ , demuestre entonces que si

- a)  $f(x) = x^2$  entonces  $g(p) = p^2/4$ .
- b)  $f(x) = mx^2/2$  entonces  $g(p) = p^2/2m$ .
- c)  $f(x) = x^\alpha/\alpha$  entonces  $g(p) = p^\beta/\beta$  con  $1/\alpha + 1/\beta = 1$ , si  $\alpha > 1$  y  $\beta > 1$ .

EJERCICIO 7.0.18 Demuestre, con la notación del problema anterior que

$$px \leq f(x) + g(p)$$

la desigualdad de Young, válida para  $x > 0$ ,  $p > 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$ , y  $1/\alpha + 1/\beta = 1$ .

EJERCICIO 7.0.19 Encuentre los hamiltonianos correspondientes a los lagrangianos

$$\begin{aligned} L(\dot{q}) &= \sqrt{1 - \dot{q}^2}, \\ L(q, \dot{q}, t) &= e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)/2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 7.0.20 Encuentre los lagrangianos correspondientes a los hamiltonianos

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p^2/2 + p \sin(q), \\ H(q, p) &= p^2/2 + q^2/2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 7.0.21 Considere un péndulo constituido por una barra uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  que oscila en un plano vertical bajo la acción de su peso. Considere además que el punto de suspensión se hace oscilar verticalmente con amplitud  $A$  y frecuencia angular  $\Omega$ , figura (7.1). Escriba la ecuación de Lagrange para el ángulo que forma el péndulo con la vertical.

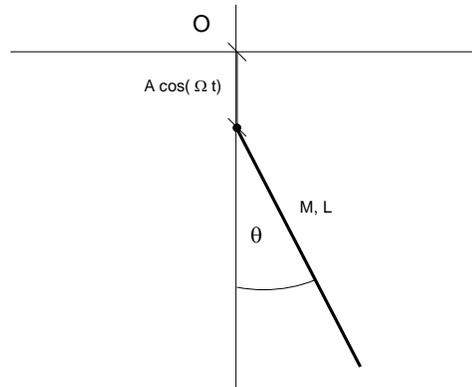


Figura 7.1: Un péndulo con extremo oscilando

EJERCICIO 7.0.22 *Con respecto a la situación del problema anterior, analice la posibilidad de que el movimiento sea estable cuando el péndulo está oscilando respecto a la posición más alta. (Vea [3])*

EJERCICIO 7.0.23 *Para el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, discuta la condición que debe cumplir su spin para que su movimiento dormido (trompo vertical, fig. (7.2)) sea estable. Considere dados sus momentos de inercia respecto a la púa,  $A$  y  $C$ , su masa  $M$  y la distancia  $h$  desde la púa al centro de masas, además de la aceleración de gravedad.*

EJERCICIO 7.0.24 *Considere el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, en precesión uniforme, es decir con la inclinación de su eje respecto de la vertical constante, fig. (7.3). Deduzca la condición que deben cumplir su spin  $s$  y su velocidad angular de precesión  $\dot{\phi} = \Omega$  para que ello ocurra. Considere dados los momentos de inercia respecto a la púa,  $A$  y  $C$ , su masa  $M$  y la distancia  $h$  desde la púa al centro de masas, además de la aceleración de gravedad.*

EJERCICIO 7.0.25 *Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  se suspende de su centro de masa respecto al cual el disco puede girar libremente en cualquier dirección. Si al disco se le da una velocidad angular inicial  $\Omega$  que forma un ángulo de  $45^\circ$  con su plano, determine las componentes de la velocidad angular del disco en función del tiempo, con respecto a los ejes principales de inercia fijos al disco con origen en el centro de masas.*

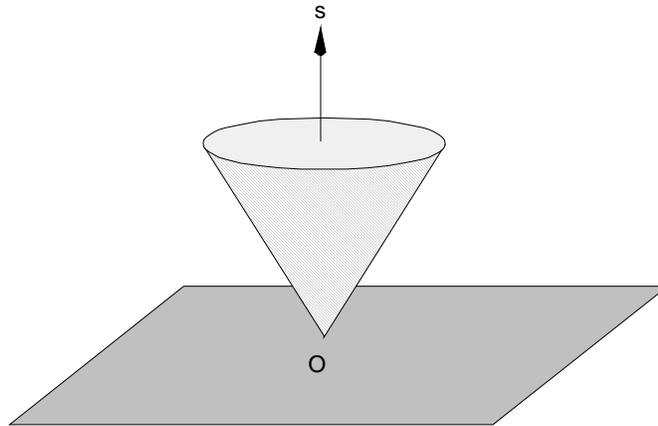


Figura 7.2: Trompo dormido

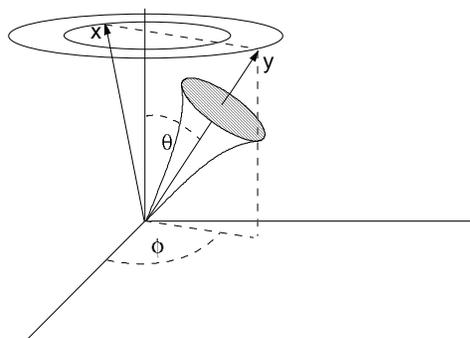


Figura 7.3: Precesión uniforme

EJERCICIO 7.0.26 Una rueda (un disco) de masa  $M$  y radio  $R$  tiene un eje que pasa por su centro pero formando un ángulo  $\alpha$  respecto a la normal al plano del disco. En ausencia de gravedad, el eje se hace girar con una velocidad angular constante  $\Omega$  sostenido por descansos lisos ubicados simétricamente a ambos lados del disco a distancias  $L$  del centro. Determine las reacciones que se producen en los descansos. Pruebe además que ellas son cero si  $\alpha$  es cero o  $\pi/2$ .

EJERCICIO 7.0.27 Considere una lámina rectangular homogénea de lados  $a$  y  $b$ . Determine los ejes principales de inercia en un vértice de la lámina.

EJERCICIO 7.0.28 Si la lámina del problema anterior se hace girar con velocidad angular constante  $\Omega$  respecto a un eje que coincide con una diagonal y sostenida por descansos lisos ubicados en los dos vértices de esa diagonal, en ausencia de gravedad determine las reacciones en esos descansos. Pruebe que ellas se anulan si  $a = b$ .

EJERCICIO 7.0.29 Una cuerda elástica de largo  $L$  con extremos fijos y de densidad de masa lineal  $\sigma$ , se coloca en movimiento en reposo de modo que su forma inicial es

$$y(x, 0) = A\left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right).$$

Determine la forma de la cuerda en función del tiempo. Evalúe además el perfil de velocidades transversales en  $t = T/4$ .

EJERCICIO 7.0.30 Tres partículas de masas  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_2$  pueden moverse sobre una recta horizontal lisa. Ellas están unidas por resortes de longitud natural  $a$  y constante elástica  $K$ . Determine los modos normales de vibración de ese sistema.

EJERCICIO 7.0.31 Respecto al problema anterior, si las partículas están inicialmente separadas una distancia  $a$  y a la partícula de la derecha se la da una velocidad  $V$ , determine las coordenadas de las tres partículas en función del tiempo.

EJERCICIO 7.0.32 Considere tres partículas de la misma masa  $M$  que están unidas formando un triángulo equilátero por resortes livianos de largo natural  $a$  y constante elástica  $K$ . Todo el sistema puede moverse libremente sobre un plano horizontal liso. Determine las frecuencias y modos normales de oscilación del sistema.

EJERCICIO 7.0.33 *Una molécula está constituida por tres átomos iguales de masa  $M$  localizados en los vértices de un triángulo rectángulo con ángulos de  $45^\circ$  con la hipotenusa. Los átomos están unidos por tres resortes de la misma constante elástica  $K$ . Determine las frecuencias propias de oscilación del sistema y muestre que hay tres modos degenerados con  $\omega^2 = 0$ . ¿Cuál es su interpretación física? Determine además los modos normales de oscilación para las otras tres frecuencias no nulas.*

## Ejemplos resueltos

EJEMPLO 8.0.1 *Considere una partícula de masa  $m$  que se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio  $R$  y masa  $M$  que puede deslizar sobre un plano horizontal liso, fig. (8.1). Estando el sistema en reposo se perturba levemente. Discuta sobre la posibilidad de que la partícula abandone el contacto con el hemisferio.*

**Solución.** Con relación a la figura las ecuaciones de movimiento son

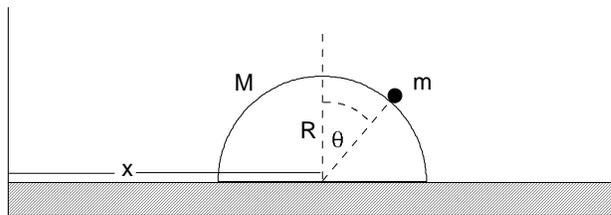


Figura 8.1: De un problema

$$\begin{aligned} m \frac{d^2(x + R \sin \theta)}{dt^2} &= N \sin \theta, \\ m \frac{d^2(R \cos \theta)}{dt^2} &= N \cos \theta - mg, \\ M \frac{d^2x}{dt^2} &= -N \sin \theta. \end{aligned}$$

Si se elimina  $x$  y  $N$  se obtiene una ecuación diferencial para el ángulo  $\theta$  que integrada una vez conduce a

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \frac{1 - \cos \theta}{1 - \frac{m}{m+M} \cos^2 \theta}.$$

Considerando que la condición para que exista despegue de la superficie es  $N = 0$ , o sea  $\ddot{x} = 0$ , se obtiene

$$\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) = 0,$$

que desarrollada conduce a una ecuación de tercer grado para el  $\cos \theta$ . En efecto se tiene

$$p \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2 = 0, \quad \text{con } p = \frac{m}{m+M}.$$

La existencia de una solución real en el intervalo  $(0, \pi/2)$  se deduce del hecho que si evaluamos  $f(\theta) = p \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2$  en 0 y 1 resulta

$$\begin{aligned} f(0) &= p - 1 < 0 \\ f(\pi/2) &= 2 > 0. \end{aligned}$$

Una forma *trigonométrica* de solucionar esta ecuación se logra suponiendo que

$$\cos \theta = A \cos \phi.$$

Si se compara la ecuación a resolver con la identidad

$$4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi - \cos 3\phi = 0,$$

puede demostrarse que

$$A = \frac{2}{p}, \quad \cos 3\phi = -\sqrt{p}.$$

De las tres soluciones para  $\phi$  que se determinan numéricamente, si son reales, debe escogerse aquella que conduzca a  $\cos \phi \leq 1$ . Por ejemplo si  $p = 1/2$  resultan  $\phi = 40^\circ, 160^\circ, 280^\circ$ . Sirve la última para la cual se obtiene  $\cos \theta = \sqrt{3} - 1$ , de donde el ángulo de despegue será  $\theta = 42.94^\circ$

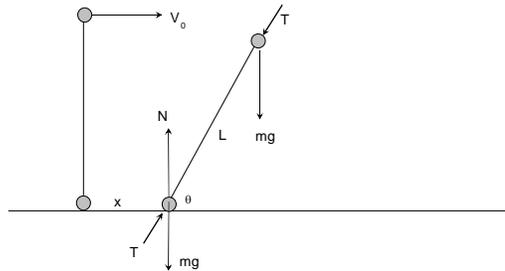


NOTA 8.1 Es de utilidad para un número de problemas, incluido el anterior, el uso de la identidad

$$\frac{d^2}{dt^2}f(s) = \frac{1}{2f'(s)} \frac{d}{ds} [f'(s)\dot{s}]^2.$$

EJEMPLO 8.0.2 *Dos partículas iguales de masa  $m$  se colocan una sobre el suelo liso, otra unida por una cuerda liviana de longitud  $L$  a la primera de modo que la cuerda está vertical y recta pero sin tensión inicial ( $T(0) = 0$ ). A la partícula superior se le imprime una velocidad horizontal de magnitud  $V_0$ . Demuestre que si  $V_0^2/gL < 1$  la cuerda dejará de estar tensa y que si  $V_0^2/gL > 2$  la partícula inferior despegará del suelo.*

**Solución.**



Las ecuaciones de movimiento suponiendo que la cuerda se tensa (al menos al inicio) y que la partícula inferior no se despega son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T \cos \theta, \\ N + T \sin \theta - mg &= 0, \\ -T \cos \theta &= m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \cos \theta), \\ -mg - T \sin \theta &= m \frac{d^2}{dt^2}(L \sin \theta), \end{aligned}$$

eliminando  $\ddot{x}$  se obtiene

$$-2T \cos \theta = mL \frac{d^2}{dt^2} \cos \theta,$$

la última es

$$-2T \sin \theta = 2mL \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta + 2mg$$

eliminando la tensión se obtiene

$$2 \cos \theta \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{g}{L} \cos \theta - \sin \theta \frac{d^2}{dt^2} \cos \theta = 0,$$

después de algunas reducciones se obtiene

$$\frac{d}{d\theta} (\cos \theta \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \dot{\theta})^2 = -2 \frac{g}{L} \cos \theta,$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \pi/2, \\ \dot{\theta}(0) &= -\frac{V_0}{L}, \end{aligned}$$

de modo que se puede integrar obteniendo

$$(\dot{\theta})^2 = \frac{\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L^2} + 2 \frac{g}{L} (1 - \sin \theta)}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta},$$

entonces

$$\begin{aligned} T &= -\frac{mL}{2 \cos \theta} \frac{d^2}{dt^2} \cos \theta \\ &= \frac{mL}{4 \cos \theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \dot{\theta})^2 \\ N &= mg - T \sin \theta \end{aligned}$$

entonces

$$T = \frac{mL}{2 \cos \theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{(\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L^2} + 2 \frac{g}{L}) \sin^2 \theta - 2 \frac{g}{L} \sin^3 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \right).$$

Si hacemos  $\sin \theta = z$ ,  $p = V_0^2/gL$ , algo de manipulación algebraica conduce a

$$\begin{aligned} t(p, z) &= \frac{T}{mg} (1 + \cos^2 \theta)^2 = 4 + p - 6z + z^3, \\ n(p, z) &= \frac{N}{mg} (1 + \cos^2 \theta)^2 = 4 + 2z^2 - 4z - pz. \end{aligned}$$

La posibilidad de que  $N = 0$  corresponde a

$$4 + 2z^2 - 4z - pz = 0,$$

tiene como posible solución menor que uno a

$$0 < z = 1 + \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}\sqrt{(-16 + 8p + p^2)} < 1,$$

esto requiere que

$$-4 < p - \sqrt{(-16 + 8p + p^2)} < 0$$

o sea

$$\begin{aligned} p &< \sqrt{(-16 + 8p + p^2)} < p + 4 \\ p^2 &< p^2 + 8p - 16 < p^2 + 8p + 16 \end{aligned}$$

o sea debe ser  $p > 2$ . Por otro lado que se anule la tensión  $T = 0$  requiere que

$$t(p, 1) = 4 + p - 6 + 1 = p - 1 < 0$$

o sea  $p < 1$ . La solución puede misma también obtenerse en este caso en forma trigonométrica. Sea

$$\begin{aligned} 4 + p - 6z + z^3 &= 0 \\ 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi - \cos 3\phi &= 0 \end{aligned}$$

si  $z = A \cos \phi$  entonces

$$A^3 \cos^3 \phi - 6A \cos \phi + 4 + p = 0$$

entonces

$$\frac{A^3}{4} = 2A = -\frac{4+p}{\cos 3\phi}$$

o sea

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{8}, \\ \cos 3\phi &= -\frac{4+p}{2\sqrt{8}}, \end{aligned}$$

Por ejemplo si  $p = 1/2$

$$\cos 3\phi = -\frac{9}{4\sqrt{8}}$$

$3\phi = (142,7020; 502,7020; 862,7020)$  luego  $\phi = (47,5673; 167,5673; 287,5673)$  entonces la tercera da  $z = 0,8537$  y entonces  $\theta = 58,615^\circ$  es el ángulo donde la cuerda deja de estar tensa.

**EJEMPLO 8.0.3** *Se desea disparar un proyectil, desde el Ecuador hasta el Polo, sin considerar resistencia de aire o rotación terrestre. Analice las diversas posibilidades.*

**Solución.** Suponiendo la tierra de masa  $M$  y radio  $R$ , y el proyectil es disparado con rapidez inicial  $V_0$ , formando un ángulo  $\phi$  con la vertical del lugar, se tiene

$$l_O = mRV_0 \sin \phi, \quad E = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R},$$

de donde resulta

$$e^2 = 1 + \frac{2El_O^2}{mK^2} = 1 + \frac{R^2V_0^2 \text{sen}^2(\phi)}{G^2M^2} \left( V_0^2 - \frac{2GM}{R} \right),$$

y la ecuación de la órbita será

$$r = \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)} = \frac{R^2V_0^2 \text{sen}^2(\phi)}{GM(1 - e \cos(\theta - \alpha))}.$$

Si se coloca como condición que  $r = R$ , en  $\theta = 0$ , y en  $\theta = \pi/2$ , se obtiene  $\alpha = \pi/4$  y

$$1 - e \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{RV_0^2 \text{sen}^2(\phi)}{GM},$$

denotando  $V_e^2 = 2GM/R$  y  $x = (V_e/V_0)^2$ , puede obtenerse

$$\sqrt{1 - 4x(1-x) \sin^2 \phi} = \sqrt{2}(1 - 2x \sin^2 \phi),$$

que puede resolverse para  $x$  (las soluciones positivas sirven)

$$x = (V_e/V_0)^2 = \frac{1}{2 \cos 2\phi} \left( -1 \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{1 - \cos 2\phi}} \right),$$

pero

$$\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \phi$$

luego puede escribirse

$$\begin{aligned}
 (V_e/V_0)^2 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{(-\sin \phi \pm \cos \phi)}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}, \\
 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{(\cos \phi + \sin \phi)}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{1}{\sin \phi - \cos \phi} \\
 &= \frac{1}{2 \sin^2 \phi - 2 \sin \phi \cos \phi} \\
 &= \frac{1}{1 - \cos 2\phi - \sin 2\phi} \quad (\phi > \pi/4) \\
 &\quad \text{ó} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{(\cos \phi - \sin \phi)}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{1}{\cos \phi + \sin \phi} \\
 &= \frac{1}{1 - \cos 2\phi + \sin 2\phi}
 \end{aligned}$$

en particular para  $\phi = \pi/2$  (órbita circular) resulta como era de esperar  $x = 1/2$ , o sea  $V_0^2 = GM/R$ . Si  $\phi = \pi/4$ , la solución es  $x = 1/4$ .

---

**EJEMPLO 8.0.4** *Una partícula se mueve en un campo central inverso al cuadrado a la distancia en movimiento elíptico. Determine los promedios temporales en un periodo del movimiento de la energía cinética y de la energía potencial en términos de la constante de la ley de fuerza y del semieje mayor de la elipse.*

**Solución.** Si  $T$  denota el periodo, los valores promedios a calcular son:

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) dt, \\
 \langle V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{K}{r} dt.
 \end{aligned}$$

Ambas integrales pueden cambiarse a integrales respecto al ángulo si se utiliza  $l_O = mr^2\dot{\theta}$ , de la siguiente forma

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \right)^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \frac{d\theta}{\dot{\theta}},$$

$$\langle V \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}.$$

Si además se utiliza la expresión para la trayectoria

$$r = \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1 - e \cos \theta},$$

se puede obtener

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{l_O^2}{mK} \frac{e \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^2} \right)^2 + r^2 \right) \frac{l_O}{mr^2} d\theta, \\ \langle V \rangle &= -\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} \frac{mr^2}{l_O} d\theta = -\frac{Km}{Tl_O} \int_0^{2\pi} \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1 - e \cos \theta} d\theta, \end{aligned}$$

que pueden ser simplificadas a

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{l_O}{2T} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^2 \sin^2 \theta}{(1 - e \cos \theta)^2} + 1 \right) d\theta, \\ \langle V \rangle &= -\frac{l_O}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e \cos \theta} d\theta, \end{aligned}$$

utilizando la integral conocida

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}},$$

e integrando por partes la expresión para  $\langle K \rangle$ , se obtiene

$$\langle K \rangle = \frac{l_0}{2T} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \langle V \rangle = -\frac{l_0}{T} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Estos resultados pueden expresarse en términos de  $K$ , y  $a$ . Para ello recuerde que

$$T = \frac{\pi abm}{l_O}, \quad a = \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1-e^2}, \quad b = \frac{l_O^2}{mK} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2},$$

de donde resultará

$$\langle K \rangle = \frac{K}{a}, \quad \langle V \rangle = -\frac{2K}{a}.$$

**EJEMPLO 8.0.5** *Dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  se mueven bajo la acción de su atracción gravitacional, una en torno de la otra en órbitas circulares, con periodo  $\tau$ . Si su movimiento es repentinamente detenido, cayendo entonces una hacia la otra, demuestre que ellas chocan en un tiempo dado por*

$$t = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

**Solución.** Para la situación inicial, ambas partículas describiendo círculos en torno de  $G$ , se puede establecer que

$$\tau = \frac{2\pi R\sqrt{R}}{\sqrt{GM}},$$

siendo  $R = R_1 + R_2$ ,  $M = m_1 + m_2$ . Para la situación dinámica, una cayendo hacia la otra, la segunda ley de Newton implica

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2},$$

siendo  $r = r_1 + r_2$ . Una primera integral conduce a

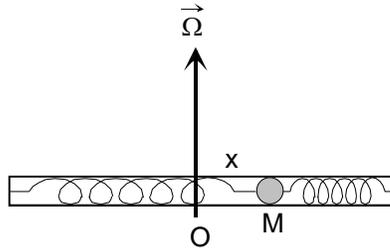
$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}.$$

Separando variables e integrando nuevamente, se obtiene el tiempo para que choquen, es decir para que  $r = R \rightarrow r = 0$ . Ese tiempo resulta

$$t = \frac{R\sqrt{R}\pi}{2\sqrt{2GM}},$$

de donde es fácil establecer lo solicitado.

**EJEMPLO 8.0.6** *Un tubo liso de longitud  $2L$  contiene dos resortes de longitud natural  $L$  y constante elástica  $K$ . Los resortes están unidos por un extremo de ellos a un extremo del tubo y por el otro extremo a una partícula de masa  $M$  que estaría en equilibrio en el centro  $O$  del tubo, es decir con desplazamiento  $x = 0$ . El tubo se hace rotar en un plano horizontal con una velocidad angular de magnitud  $\Omega$  y a la partícula que está inicialmente en el centro, se le comunica una velocidad de magnitud  $V_0$  a lo largo del tubo. Si  $K = M\Omega^2$  y no hay gravedad determine*



- La amplitud de las oscilaciones de la partícula.
- La frecuencia de las oscilaciones de la partícula.
- Los instantes en que la reacción normal ejercida por el tubo es cero.
- Los instantes en que la partícula vuelve a pasar por el origen.

**Solución.** Solución

$$\begin{aligned} -2Kx &= M(\ddot{x} - x\Omega^2) \\ N &= 2M\dot{x}\Omega \end{aligned}$$

pero  $K = M\Omega^2$  entonces

$$\begin{aligned} -2M\Omega^2 x &= M\ddot{x} - M\Omega^2 x \\ \ddot{x} + \Omega^2 x &= 0. \end{aligned}$$

de donde

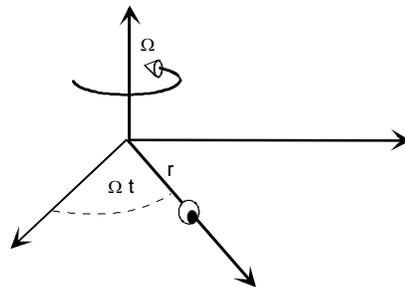
$$\begin{aligned} x &= \frac{V_0}{\Omega} \sin \Omega t \\ \dot{x} &= V_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

- 
- ▲
- a)  $V_0/\Omega$   
 b)  $\Omega$   
 c)  $2\pi/\Omega$   
 d)  $t_n = (2n + 1)\pi/2\Omega$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$   
 e)  $t_n = n\pi/\Omega$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

**EJEMPLO 8.0.7** *Un alambre liso gira en un plano horizontal con velocidad angular de magnitud  $\Omega$  constante manteniendo su punto  $O$  fijo. Una pequeña argolla de masa  $M$  puede deslizarse sobre el alambre siendo atraída hacia el punto  $O$  con una fuerza de magnitud  $Kr$  siendo  $r$  la distancia de la argolla al punto fijo. No hay gravedad. Si  $K = 2M\Omega^2$  y la argolla parte del origen con rapidez inicial  $V_0$  determine*

- a) La amplitud de las oscilaciones de la argolla.  
 b) La frecuencia de las oscilaciones de la argolla,  
 c) El periodo de las oscilaciones de la argolla.  
 d) Los instantes en que la reacción normal es cero.  
 e) El tiempo en que vuelve a pasar por el origen.

**Solución.**



$$\begin{aligned} -Kr &= M(\ddot{r} - r\Omega^2) \\ N &= 2M\dot{r}\Omega \end{aligned}$$

la primera da

$$\begin{aligned} M(\ddot{r} - r\Omega^2) + Kr &= 0 \\ \ddot{r} + \Omega^2 r &= 0 \end{aligned}$$

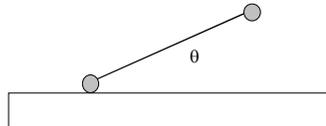
de donde

$$\begin{aligned} r &= \frac{V_0}{\Omega} \sin \Omega t \\ \dot{r} &= V_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$



- a)  $V_0/\Omega$
- b)  $\Omega$
- c)  $2\pi/\Omega$
- d)  $t_n = (2n + 1)\pi/2\Omega$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$
- e)  $t_n = n\pi/\Omega$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

**EJEMPLO 8.0.8** *Dos partículas iguales de masa  $M$  están unidas por una cuerda inextensible de longitud  $2a$  e inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal lisa con la cuerda estirada. Si a una de las partículas se le imprime una velocidad hacia arriba de magnitud  $V_0 = \sqrt{4ga}$  y  $\theta$  indica el ángulo que la cuerda forma con la horizontal determine*



- a) Las ecuaciones de movimiento del sistema.
- b)  $\dot{\theta}$  en función de  $\theta$ .
- b) La reacción normal en función de  $\theta$ .

**Solución.**

$$y_{CM} = a \sin \theta$$

$$2M \frac{d^2}{dt^2} y_{CM} = N - 2Mg$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_{CM} = 0$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} 2M \dot{y}_{CM}^2 + \frac{1}{2} (Ma^2 \dot{\theta}^2 + Ma^2 \dot{\theta}^2) + Mg2a \sin \theta \\ &= Ma^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + Ma^2 \dot{\theta}^2 + 2Mga \sin \theta = \frac{1}{2} MV_0^2 \\ &= 2Mga \end{aligned}$$

de donde

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}$$

$$N = 2Mg + 2M \frac{d^2}{dt^2} a \sin \theta$$

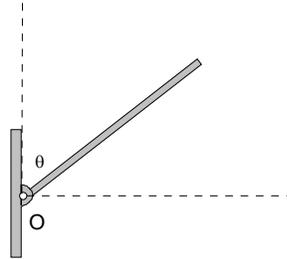
$$N = 2Mg \frac{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 2}{(1 + \cos^2 \theta)^2}.$$

---

**EJEMPLO 8.0.9** Una barra de masa  $M$  y largo  $2a$  está articulada suavemente por un extremo a un punto fijo  $O$ . La barra se coloca inicialmente vertical hacia arriba del punto fijo, en reposo, se perturba levemente y comienza a caer como se indica en la figura.

- a) Escriba expresiones para el torque externo respecto al punto  $O$ , el momentum angular de la barra respecto al punto  $O$  y para la energía de la barra.
- b) Escriba las ecuaciones de movimiento de la barra.
- c) Determine  $\dot{\theta}$  en función de  $\theta$ .
- d) Determine el ángulo en que la reacción horizontal en  $O$  se anula.

e) Determine el ángulo en que la reacción vertical en O se anula.



**Solución.** Solución

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= I_O \vec{\omega} = -\frac{4}{3} M a^2 \dot{\theta} \hat{k} \\ \vec{\Gamma}_O &= -M g a \sin \theta \hat{k} \\ E &= \frac{2}{3} M a^2 \dot{\theta}^2 + M g a \cos \theta,\end{aligned}$$

las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}N_y - M g &= M \frac{d^2}{dt^2} a \cos \theta \\ N_x &= M \frac{d^2}{dt^2} a \sin \theta \\ \frac{4}{3} M a^2 \ddot{\theta} &= M g a \sin \theta,\end{aligned}$$

de la última integrando se tiene que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(1 - \cos \theta)$$

de modo que

$$\begin{aligned}N_y &= M g + M \frac{d^2}{dt^2} a \cos \theta \\ &= M g - \frac{M a}{2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta \frac{3g}{2a} (1 - \cos \theta) \\ &= M g \left( 1 - \frac{3}{4 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) \right) \\ &= \frac{M g}{4} (3 \cos \theta - 1)^2\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
 N_x &= M \frac{d^2}{dt^2} a \sin \theta \\
 &= \frac{Ma}{2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \cos^2 \theta \frac{3g}{2a} (1 - \cos \theta) \\
 &= \frac{3Mg}{4 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} (\cos^2 \theta - \cos^3 \theta) \\
 &= \frac{3Mg}{4} (-2 \sin \theta + 3 \cos \theta \sin \theta) \\
 &= \frac{3Mg}{4} (-2 + 3 \cos \theta) \sin \theta
 \end{aligned}$$

de modo que las reacciones se anulan la vertical en  $\cos \theta = 1/3$  y la horizontal en  $\cos \theta = 2/3$ .

---

**EJEMPLO 8.0.10** *Dos partículas de igual masa  $m$  están inicialmente en reposo, unidas por una cuerda de longitud  $L$ , inicialmente están en línea recta con la cuerda estirada y horizontal. A una de las partículas se le da una velocidad de magnitud  $V_0$  dirigida verticalmente hacia arriba. Determine las coordenadas de las partículas en función del tiempo.*

**Solución.** Sean  $x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$  las coordenadas de las partículas entonces

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_1 &= T \cos \theta \\
 m\ddot{y}_1 &= T \sin \theta - mg \\
 m\ddot{x}_2 &= -T \cos \theta \\
 m\ddot{y}_2 &= -T \sin \theta - mg
 \end{aligned}$$

siendo  $\cos \theta = (x_2 - x_1)/L$ ,  $\sin \theta = (y_2 - y_1)/L$ . Pero si colocamos el origen en la posición inicial del centro de masas

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\frac{L}{2} \cos \theta, \quad x_2 = \frac{L}{2} \cos \theta, \\
 y_2 &= y_1 + L \sin \theta.
 \end{aligned}$$

De aquí puede obtenerse

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \text{constante} = \frac{V_0}{L}, \\ T &= \frac{mV_0^2}{2L}, \\ y_1 &= \frac{V_0}{2}t - \frac{L}{2} \sin \frac{V_0 t}{L} - \frac{1}{2}gt^2, \\ y_2 &= \frac{V_0}{2}t + \frac{L}{2} \sin \frac{V_0 t}{L} - \frac{1}{2}gt^2, \\ x_1 &= -\frac{L}{2} \cos \frac{V_0 t}{L}, \\ x_2 &= \frac{L}{2} \cos \frac{V_0 t}{L}.\end{aligned}$$

---

**EJEMPLO 8.0.11** *Se realizan tres rotaciones activas sucesivas en  $\pi/2$  en torno a los ejes cartesianos  $x, y, z$  en ese orden. Encuentre el eje y el ángulo de la rotación equivalente.*

**Solución.** La matriz de la rotación resultante será

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde  $1 + 2 \cos \phi = \text{Tr}(R) = 1$ , por lo tanto  $\phi = \pi/2$ . El eje se deduce de

$$R - R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \sin \phi \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que es una rotación en noventa grados respecto al eje  $y$ .

---

EJEMPLO 8.0.12 *Pruebe la siguiente relación entre rotaciones, que generaliza el resultado del problema anterior*

$$R_z(\phi)R_y(\pi/2)R_x(\phi) = R_y(\pi/2).$$

**Solución.** La matriz de rotación finita ha sido escrita en términos de una matriz que hemos llamado  $(\hat{n}\times)$ . Por una obvia propiedad de los vectores, tenemos que

$$R\vec{a} \times \vec{b} = R(\vec{a} \times R^{-1}\vec{b}),$$

lo que significa que la matriz *cruz* correspondiente a un vector *rotado* es

$$(R\vec{a}\times) = R(\vec{a}\times)R^{-1}.$$

En consecuencia

$$RR_{\hat{n}}(\phi)R^{-1} = R_{R\hat{n}}(\phi).$$

En particular se tiene

$$\begin{aligned} R_y(\pi/2)R_x(\phi) &= R_y(\pi/2)R_x(\phi)R_y^{-1}(\pi/2)R_y(\pi/2) \\ &= R_{-z}(\phi)R_y(\pi/2), \end{aligned}$$

de donde es claro el resultado.

---

EJEMPLO 8.0.13 *Demuestre la siguiente relación de rotaciones que involucran los ángulos de Euler, ecuación 4,7 con la notación allí indicada:*

$$R = R_{z'}(\Psi)R_n(\Theta)R_z(\Phi) = R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(\Psi).$$

**Solución.** La demostración está basada en las mismas propiedades del problema anterior. Considere que

$$\hat{n} = R_z(\Phi)\hat{i}, \quad \hat{k}' = R_{\hat{n}}(\Theta)\hat{k} = R_{R_z(\Phi)\hat{i}}(\Theta)\hat{k},$$

por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} R &= R_{\hat{n}}(\Theta)R_z(\Psi)R_{\hat{n}}(-\Theta)R_n(\Theta)R_z(\Phi) \\ &= R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(-\Phi)R_z(\Psi)R_z(\Phi) \\ &= R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(\Psi). \end{aligned}$$

pues rotaciones en torno a un mismo eje conmutan.

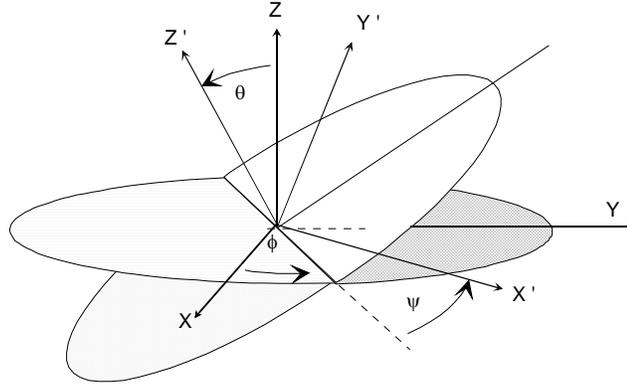


Figura 8.2: Ángulos de Euler

EJEMPLO 8.0.14 Demuestre que las componentes de la velocidad angular, en términos de los ángulos de Euler son

a) En el sistema móvil

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

b) En el sistema de ejes fijos:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.\end{aligned}$$

**Solución.** De acuerdo al teorema de adición de velocidades angulares se tiene que

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{i}'' + \dot{\psi} \hat{k}', \quad (8.1)$$

siendo  $\hat{i}'' = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} = \cos \psi \hat{i}' - \sin \psi \hat{j}'$ , entonces, para escribirla en términos de las direcciones fijas basta considerar que

$$\hat{k}' = \cos \theta \hat{k} + \sin \theta (\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}),$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) + \\ &\quad \dot{\psi}(\cos\theta\hat{k} + \sin\theta(\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j})), \\ &= (\dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi)\hat{i} + \\ &\quad (-\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi)\hat{j} + \\ &\quad (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\hat{k}.\end{aligned}$$

Para escribirla en ejes móviles considere de nuevo (8.1)

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{i}'' + \dot{\psi}\hat{k}',$$

y ahora

$$\hat{k} = \cos\theta\hat{k}' + \sin\theta(\cos\psi\hat{j}' + \sin\psi\hat{i}'),$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\phi}(\cos\theta\hat{k}' + \sin\theta(\cos\psi\hat{j}' + \sin\psi\hat{i}')) + \\ &\quad \dot{\theta}(\cos\psi\hat{i}' - \sin\psi\hat{j}') + \dot{\psi}\hat{k}' \\ &= (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\hat{i}' + \\ &\quad (\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\hat{j}' + \\ &\quad (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{k}'\end{aligned}$$

---

**EJEMPLO 8.0.15** Considere un trompo simétrico con  $I_{11} = I_{22} = A$  y  $I_{33} = C$ . Escriba el lagrangiano del trompo utilizando los ángulos de Euler. Escriba además las ecuaciones de Lagrange.

**Solución.** De acuerdo al problema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}A(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}A(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - Mgh\cos\theta,\end{aligned}$$

que se reduce a

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta.$$

tenemos

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta,$$

Si llamamos

$$\dot{\Psi} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi},$$

las tres ecuaciones de lagrange pueden escribirse

$$\dot{\Psi} = s = \text{constante},$$

$$A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = \text{constante} = \alpha,$$

$$A\ddot{\theta} + Cs\dot{\phi} \sin \theta - A\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - Mgh \sin \theta = 0.$$

La última, es preferible reemplazarla por la ecuación de conservación de la energía que es

$$E = \frac{1}{2} \frac{(\alpha - Cs \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} + \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Cs^2 + Mgh \cos \theta,$$

o

$$A\dot{\theta}^2 = 2E - Cs^2 - 2Mgh \cos \theta - \frac{(\alpha - Cs \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta}.$$

---

**EJEMPLO 8.0.16** Considere una función escalar  $V(\vec{r})$ . Determine la nueva función escalar  $U(\vec{r})$  obtenida rotando la anterior en torno a un eje por el origen, mediante una rotación en torno a un eje  $\hat{n}$  en un ángulo  $\phi$ .

**Solución.** Evidentemente, los valores de la función rotada  $U$  en un punto  $\vec{r}$  son los valores de la función original en el punto  $R^{-1} \vec{r}$ , es decir

$$U(\vec{r}) = V(R^{-1}\vec{r}).$$

---

EJEMPLO 8.0.17 *Se tiene un elipsoide centrado y orientado de acuerdo a los ejes cartesianos con ecuación:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*Determine la ecuación del elipsoide que se obtiene al rotar el anterior en torno a un eje que pasa por su centro en un ángulo  $\phi$  y en un eje  $\hat{n}$ .*

**Solución.** Es conveniente escribir la ecuación del elipsoide en una forma matricial

$$\vec{r}^T M \vec{r} = 1,$$

siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo al problema anterior, la ecuación del elipsoide rotado será

$$(R^{-1}\vec{r})^T M (R^{-1}) \vec{r} = 1,$$

o bien

$$\vec{r}^T R_{\hat{n}}(\phi) M R_{\hat{n}}(-\phi) \vec{r} = 1.$$

Falta realizar la multiplicación matricial indicada, que es un tanto complicada. Por ejemplo si, se trata de una rotación respecto al eje x, resultará

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \left( \frac{\cos^2 \phi}{b^2} + \frac{\sin^2 \phi}{c^2} \right) y^2 + \left( \frac{\sin^2 \phi}{b^2} + \frac{\cos^2 \phi}{c^2} \right) z^2 + \\ + 2 \cos \phi \sin \phi \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) z y = 1 \end{aligned}$$


---

EJEMPLO 8.0.18 *En la colisión de dos cuerpos rígidos si se conserva la energía en el choque, pruebe entonces que el coeficiente de restitución es unitario. Aquí, el coeficiente de restitución debe ser definido respecto a la dirección en que se desarrolla la fuerza de interacción impulsiva ( $J$ ), ver figura (8.3).*

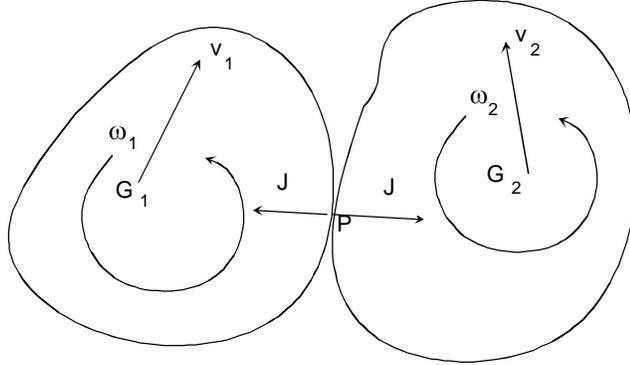


Figura 8.3: Colisión de dos cuerpos rígidos

**Solución.** Si llamamos  $\vec{J}$  a la interacción impulsiva y  $P_1$  (y  $P_2$ ) al punto de contacto, 1 y 2 a los centros de masas e indicamos con  $+$  y  $-$  a valores de las diversas cantidades justo después y justo antes de la colisión, tenemos que

$$M_1(\vec{v}_1^+ - \vec{v}_1^-) = \vec{J}, \quad (8.2)$$

$$M_2(\vec{v}_2^+ - \vec{v}_2^-) = -\vec{J}, \quad (8.3)$$

$$H_1(\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^-) = G_1\vec{P} \times \vec{J}, \quad (8.4)$$

$$H_2(\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^-) = -G_2\vec{P} \times \vec{J}, \quad (8.5)$$

y conservación de energía

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_1v_1^{+2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{+2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ = \\ \frac{1}{2}M_1v_1^{-2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{-2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^-. \end{aligned} \quad (8.6)$$

De las ecuaciones (8.4) y (8.5) se obtiene

$$\vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- = (\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \cdot G_1\vec{P} \times \vec{J},$$

$$\vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^- = -(\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \cdot G_2\vec{P} \times \vec{J}.$$

De aquí, con algo de álgebra, puede obtenerse de la ecuación de conservación de la energía

$$(\vec{v}_1^+ + \vec{v}_1^-) \cdot \vec{J} - (\vec{v}_2^+ + \vec{v}_2^-) \cdot \vec{J} = -(\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \times G_1\vec{P} \cdot \vec{J} +$$

$$+(\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \times G_2 \vec{P} \cdot \vec{J} ,$$

pero

$$\vec{v}_{P_1}^+ = \vec{v}_1^+ + \vec{\omega}_1^+ \times G_1 \vec{P} ,$$

y similarmente las otras, entonces

$$(\vec{v}_{P_1}^+ + \vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^+ - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J} ,$$

es decir

$$(\vec{v}_{P_1}^+ - \vec{v}_{P_2}^+) \cdot \vec{J} = -(\vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J} .$$

que significa coeficiente de restitución unidad, en la dirección del impulso de interacción.

---

**EJEMPLO 8.0.19** *Para el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, discuta la condición que debe cumplir su spin para que su movimiento vertical sea estable. Considere dados sus momentos de inercia respecto a la púa,  $A$  y  $C$ , su masa  $M$  y la distancia  $h$  desde la púa al centro de masas.*

**Solución.** Las constantes para el movimiento de este trompo serán

$$\alpha = A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs, \quad E = \frac{1}{2}Cs^2 + mgh.$$

Entonces, la ecuación para  $\dot{u}^2$  ( $u = \cos \theta$ ) resulta

$$\dot{u}^2 = f(u) = (2mgh - 2mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left( \frac{Cs - Csu}{A} \right)^2 ,$$

que admite como índice  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1$ , y para la otra

$$2mgh \frac{1 + u}{A} - \left( \frac{Cs}{A} \right)^2 = 0.$$

La condición de estabilidad es que esta tercera raíz, sea mayor que 1, es decir

$$\left( \frac{Cs}{A} \right)^2 \geq \frac{4mgh}{A} .$$


---

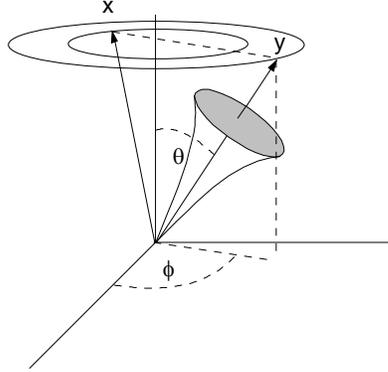


Figura 8.4: Precesión uniforme

**EJEMPLO 8.0.20** Considere el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, en precesión uniforme, es decir con la inclinación de su eje respecto de la vertical constante. Deduzca la condición que deben cumplir su spin  $S$  y su velocidad angular de precesión  $\dot{\phi} = \Omega$  para que ello ocurra. Considere dados sus momentos de inercia respecto a la púa,  $A$  y  $C$ , su masa  $M$  y la distancia  $h$  desde la púa al centro de masas, además de la aceleración de gravedad.

**Solución.** Aquí es preferible partir de cero. Para este caso en el momentum angular varían sólo los vectores unitarios  $\hat{i}$ ,  $\hat{k}$ . En efecto, ver fig. (8.4)

$$\vec{L}_0 = A\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + Cs \cos \theta \hat{k},$$

de donde

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = A\dot{\phi} \sin \theta \frac{d\hat{i}}{dt} + Cs \cos \theta \frac{d\hat{k}}{dt} = -mgh \sin \theta \hat{j}.$$

Las derivadas son

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \dot{\phi} \cos \theta \hat{j}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{j},$$

por lo que resulta la condición

$$A\dot{\phi}^2 \cos \theta - Cs\dot{\phi} + mgh = 0.$$

Puede notarse que para un spin dado, existe uno, dos, o ni un valor de la precesión  $\dot{\phi}$  según sea el signo del discriminante

$$C^2 s^2 - 4Amgh \cos \theta.$$

**EJEMPLO 8.0.21** *Respecto al problema anterior, deduzca la condición que debe cumplir el spin  $s$  del trompo, para que el trompo pueda tener movimiento de precesión uniforme en cualquier ángulo  $\theta$ .*

**Solución.** De la solución del problema anterior, basta requerir que  $C^2 s^2 - 4Amgh \cos \theta \geq 0$  para todo  $\theta$ . Por lo tanto debe ser

$$C^2 s^2 \geq 4Amgh.$$

**EJEMPLO 8.0.22** *Considere una barra de largo  $2a$  y masa  $m$  que se coloca horizontalmente en equilibrio sobre el punto más alto de una esfera de radio  $R$  que permanece en reposo. Considerando sólo movimiento en el plano vertical que contiene la barra, escriba la ecuación de movimiento para el ángulo que gira la barra, considerando que ella no desliza sobre la esfera. Ver figura (8.5).*

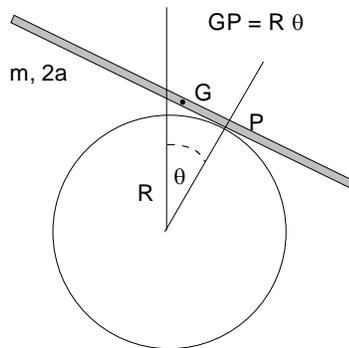


Figura 8.5: Barra sobre un cilindro

**Solución.** Con relación a la figura, se tiene

$$x_G = R \sin \theta - R\theta \cos \theta, \quad y_G = R \cos \theta + R\theta \sin \theta.$$

De allí se obtiene

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg(R \cos \theta + R\theta \sin \theta), \quad I = \frac{1}{3}ma^2,$$

y

$$(I + mR^2\theta^2)\ddot{\theta} + mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta = 0.$$

---

**EJEMPLO 8.0.23** *Considere una partícula de masa  $m$  que se mueve en un plano. Las coordenadas elípticas  $\zeta$  y  $\eta$  se definen por:*

$$\zeta = r_1 + r_2,$$

$$\eta = r_1 - r_2,$$

siendo  $r_1$  y  $r_2$  las distancias de la partícula a dos puntos fijos en el plano del movimiento. Demuestre que en términos de coordenadas elípticas, el hamiltoniano de la partícula libre está dado por:

$$H = 2p_\zeta^2 \frac{\zeta^2 - 4c^2}{\zeta^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2 \frac{4c^2 - \eta^2}{\zeta^2 - \eta^2},$$

siendo  $2c$  la distancia entre los dos puntos fijos (focos), ver figura (8.6).

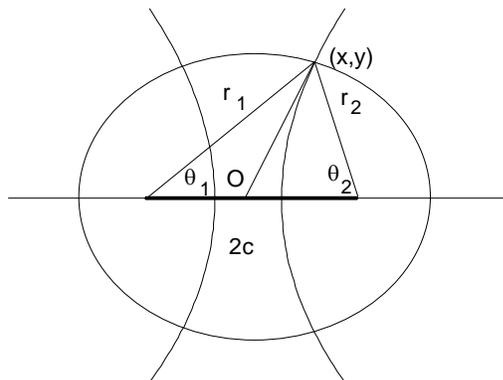


Figura 8.6: Coordenadas elípticas

**Solución.** Una solución elegante se encuentra en el libro de Arnold, página 262 ([2]). Una solución más de fuerza bruta sería la siguiente. Con la notación indicada en la figura, podemos escribir

$$\begin{aligned} r^2 &= r_1^2 + c^2 - 2r_1c \cos(\theta_1), \\ r^2 &= r_2^2 + c^2 + 2r_2c \cos(\theta_2), \\ 4c^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1), \\ x &= r_1 \cos \theta_1 - c = r_2 \cos \theta_2 + c, \\ y &= r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2, \end{aligned}$$

de las cuales se puede obtener

$$\begin{aligned} x &= \frac{r_1^2 - r_2^2}{4c}, & y^2 &= r_1^2 - (x + c)^2, \\ x &= \frac{\zeta\eta}{4c}, & y^2 &= \frac{\zeta^2 + \eta^2}{2} - \left(\frac{\zeta\eta}{4c}\right)^2 - c^2, \end{aligned}$$

de donde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 d\zeta^2 + b^2 d\eta^2,$$

con

$$a^2 = \frac{\zeta^2 - \eta^2}{4(\zeta^2 - 4c^2)}, \quad b^2 = \frac{\zeta^2 - \eta^2}{4(4c^2 - \eta^2)}.$$

Como  $L = mv^2/2$ , se obtiene

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\zeta}^2 + b^2\dot{\eta}^2),$$

y finalmente

$$H = \frac{p_\zeta^2}{2ma^2} + \frac{p_\eta^2}{2mb^2}.$$

---

**EJEMPLO 8.0.24** Utilice el resultado anterior para escribir el hamiltoniano de una partícula que es atraída inversamente al cuadrado de su distancias a dos centros fijos.

**Solución.** El potencial atractivo hacia los dos centros fijos será de la forma

$$V = -\frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2} = -k\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = -k\frac{4\zeta}{\zeta^2 - \eta^2},$$

por lo tanto

$$H = \frac{p_\zeta^2}{2m} \frac{4(\zeta^2 - 4c^2)}{\zeta^2 - \eta^2} + \frac{p_\eta^2}{2m} \frac{4(4c^2 - \eta^2)}{\zeta^2 - \eta^2} - k \frac{4\zeta}{\zeta^2 - \eta^2}.$$

**EJEMPLO 8.0.25** *Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento para un conjunto de partículas de igual masa que están unidas en línea recta por resortes de constante elástica  $K$ , y largo natural  $a$ , para las desviaciones longitudinales en torno a las posiciones de equilibrio. Considere primero un conjunto de  $N$  partículas estando fijas las de los extremos y luego, un conjunto infinito con condiciones de borde periódicas, ver figura (8.7).*

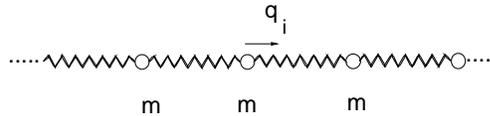


Figura 8.7: Osciladores acoplados

**Solución.** El lagrangiano del sistema es

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} K (q_i - q_{i-1})^2,$$

de donde se deducen las ecuaciones de movimiento para cada masa

$$\ddot{q}_j = \frac{K}{m} (q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Para un caso (a) tomaremos  $q_0, q_{N+1} = 0$ , y para el otro caso (b) tomaremos  $q_0 = q_N, q_{N+1} = q_1$ . Para ambos casos, sean las dependencias temporales

$$q_j(t) = Q_j e^{i\omega t}$$

resultando

$$-\omega^2 Q_j = \Omega^2 (Q_{j+1} + Q_{j-1} - 2Q_j), \quad \text{con } \Omega^2 = \frac{K}{m}, \quad (8.7)$$

un sistema de ecuaciones homogéneo que admite solución distinta de la trivial solo sí el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. Aquí, deben distinguirse los dos casos. Es decir las frecuencias admisibles  $\omega$  satisfacen

a)

$$\det \begin{bmatrix} \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & & 0 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \Omega^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

b)

$$\det \begin{bmatrix} \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & 0 & \cdots & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & & 0 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \Omega^2 \\ \Omega^2 & 0 & \cdots & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Una alternativa sin embargo es encontrar soluciones no triviales de (8.7). Para ello suponga

$$Q_j = C e^{i(j\phi)}.$$

Si se reemplaza en el sistema de ecuaciones se comprueba que ellas son efectivamente soluciones si se cumple

$$\omega = 2\Omega \sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Para el caso periódico debe además tenerse

$$e^{i(N\phi)} = 1,$$

por lo cual, las soluciones admisibles para las frecuencias son

$$\omega_n = 2\Omega \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

El caso de extremos fijos, es más complicado y está resuelto en el capítulo de sistemas continuos



EJEMPLO 8.0.26 *Para el movimiento de una partícula respecto a un sistema fijo a la superficie de la tierra, que gira con velocidad angular constante sometida a su peso y a otras fuerzas que no realizan trabajo virtual, demuestre que despreciando términos en  $\omega^2$  las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse como:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}.$$

**Solución.** De acuerdo al teorema de Coriolis, la aceleración absoluta  $\vec{a}_{abs}$  puede relacionarse con la aceleración y velocidades relativas ( $\vec{a}$  y  $\vec{v}$ ) de acuerdo con

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_A + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a},$$

siendo  $A$  un punto origen en la superficie terrestre. Si se considera además que

$$mg\hat{k} = m\vec{a}_A + \frac{GMm}{R^2}\hat{R},$$

entonces, la ecuación de movimiento, segunda ley de Newton, con una fuerza  $\vec{F}$  adicional a la gravitacional será

$$m(\vec{a}_A + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}) = -\frac{GMm}{R^2}\hat{R} + \vec{F},$$

entonces

$$m\vec{a} = -mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{F}.$$

Ahora es necesario recordar que la siguiente es una identidad

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{v^2}{2} = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

luego si se multiplica por la masa y se reemplaza  $m\vec{a}$ , recordando que  $\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 0$  si la fuerza no realiza trabajo virtual, entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} K - \frac{\partial}{\partial q_i} K = (-mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

además

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i},$$

de donde se establece el resultado

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = (-2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i},$$

siendo el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - mgz.$$

---

EJEMPLO 8.0.27 *Aplique lo anterior para escribir las ecuaciones de movimiento de una partícula que oscila en un plano horizontal liso atraída hacia el origen por una fuerza elástica, con influencia de la rotación terrestre. Elija los ejes  $x$  hacia el Sur, y hacia el Este,  $z$  vertical, en el punto de latitud  $\lambda$ .*

**Solución.** El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}K(x^2 + y^2),$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}, \quad \vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \hat{i} + \omega \sin \lambda \hat{k},$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 2\omega\dot{y} \sin \lambda, \quad \ddot{y} + \frac{K}{m}y = -2\omega\dot{x} \sin \lambda.$$

Alternativamente, si se hubieran usado coordenadas polares

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}Kr^2,$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{m}r = 2r\dot{\theta} \omega \sin \lambda, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta} + 2r^2 \omega \sin \lambda) = 0.$$


---

EJEMPLO 8.0.28 *Si el origen del sistema (no inercial) que rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$  no está acelerado, muestre que la ecuación de Lagrange puede escribirse:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

si se toma como lagrangiano, el siguiente:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}) + m\vec{v} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{1}{2}m|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2.$$

**Solución.** La aceleración absoluta está dada por (Teorema de Coriolis)

$$\vec{a}_{abs} = 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{a},$$

luego se trata de demostrar que se obtiene correctamente la ecuación

$$\left( m2\vec{\omega} \times \vec{v} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + m\vec{a} + \nabla V \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 0. \quad (8.8)$$

Si denotamos por  $L_i$  al operador

$$L_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i},$$

se tiene que

$$L_i \frac{1}{2} m v^2 = m \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

similarmente

$$L_i(-V) = \frac{\partial V}{\partial q_i} = \nabla V \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

y

$$L_i(m\vec{v} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}) = \left( m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

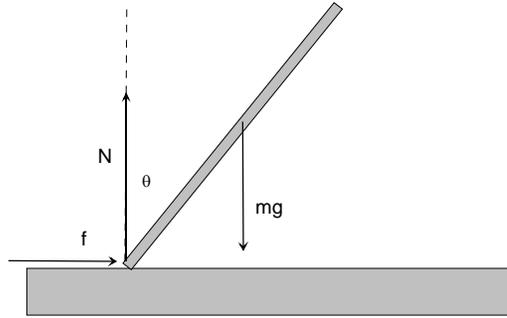
y finalmente

$$L_i \left( \frac{1}{2} m |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 \right) = (m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

que junto con la ecuación correcta (8.8), prueban que  $L_i L = 0$ .

---

**EJERCICIO 8.0.34** Una barra de masa  $M$  y largo  $2a$  se coloca vertical con su extremo inferior apoyado sobre un plano horizontal rugoso, se perturba levemente y comienza a caer como se indica en la figura. Se observa que la barra desliza sobre el suelo cuando el ángulo que ella ha girado es  $\pi/4$ . Determine entonces el coeficiente de roce estático de la barra con el suelo.



**Solución.** Solución: las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} N - Mg &= M \frac{d^2}{dt^2} a \cos \theta \\ f &= M \frac{d^2}{dt^2} a \sin \theta \\ \frac{4}{3} M a^2 \ddot{\theta} &= M g a \sin \theta \end{aligned}$$

de la última integrando se tiene que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a} (1 - \cos \theta)$$

de modo que

$$\begin{aligned} N &= Mg + M \frac{d^2}{dt^2} a \cos \theta \\ &= Mg - \frac{Ma}{2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta \frac{3g}{2a} (1 - \cos \theta) \\ &= Mg \left( 1 - \frac{3}{4 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) \right) \\ &= \frac{Mg}{4} (3 \cos \theta - 1)^2 \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
 f &= M \frac{d^2}{dt^2} a \sin \theta \\
 &= \frac{Ma}{2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \cos^2 \theta \frac{3g}{2a} (1 - \cos \theta) \\
 &= \frac{3Mg}{4 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} (\cos^2 \theta - \cos^3 \theta) \\
 &= \frac{3Mg}{4} (-2 \sin \theta + 3 \cos \theta \sin \theta) \\
 &= \frac{3Mg}{4} (-2 + 3 \cos \theta) \sin \theta
 \end{aligned}$$

La condición es que en  $\theta = \pi/4$

$$f = \mu N$$

de allí sale

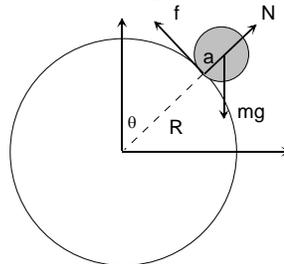
$$\frac{3Mg}{4} (-2 + 3 \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \mu \frac{Mg}{4} \left( 3 \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2$$

algo de álgebra da

$$\mu = 3 \left( -4 + 3\sqrt{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{(3\sqrt{2} - 2)^2} = .20468$$

---

EJEMPLO 8.0.29 *Un disco de masa  $m$  y radio  $2a$  se coloca en reposo sobre el punto más alto de un hemisferio rugoso de radio  $R$  que está fijo. El disco se perturba levemente y comienza a bajar rodando sin deslizar. Determine:*



- a) La velocidad angular del disco en función de  $\dot{\theta}$ .

- b)  $\dot{\theta}$  en función de  $\theta$ .  
 c) La reacción normal y la fuerza de roce en función de  $\theta$   
 d) El ángulo  $\theta$  donde el disco pierde el contacto con el disco.

**Solución.** Podemos calcular la rapidez del CM de dos maneras,

$$v_{CM} = (R + a)\dot{\theta} = a\omega,$$

de donde

$$\omega = \frac{R + a}{a}\dot{\theta},$$

las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned} N - mg \cos \theta &= m(-(R + a)\dot{\theta}^2) \\ mg \sin \theta - f &= m(R + a)\ddot{\theta} \\ fa &= I_{CM}\dot{\omega} \text{ o} \\ f &= \frac{1}{2}m(R + a)\ddot{\theta}, \end{aligned}$$

combinando la segunda con la última

$$mg \sin \theta - \frac{1}{2}m(R + a)\ddot{\theta} = m(R + a)\ddot{\theta},$$

$$mg \sin \theta = \frac{3}{2}m(R + a)\ddot{\theta}$$

,

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \sin \theta}{3(R + a)},$$

que integrada da

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g(1 - \cos \theta)}{3(R + a)},$$

además

$$\begin{aligned} f &= mg \sin \theta - \frac{2}{3}g \sin \theta = \frac{1}{3}g \sin \theta \\ N &= mg \cos \theta - m(R + a)\dot{\theta}^2 \\ &= mg \cos \theta - m \frac{4g(1 - \cos \theta)}{3} \\ &= mg \frac{(7 \cos \theta - 4)}{3} \end{aligned}$$

despega en

$$\cos \theta = \frac{4}{7}, \theta = 55.1501^\circ$$

Notemos que la fuerza de roce no se anula al mismo tiempo en que se anula la normal.

---

**EJEMPLO 8.0.30** *Tres partículas iguales de masa  $M$  que pueden moverse en línea recta, están unidas entre sí por resortes iguales de constante elástica  $K$  a la vez que las extremas están unidas por otros dos resortes iguales a los anteriores a puntos fijos. En la situación de equilibrio, los cuatro resortes tienen su longitud natural. Determine las frecuencias y modos normales de oscilación del sistema.*

**Solución.** En términos de los desplazamientos  $x_1, x_2, x_3$  respecto a las posiciones de equilibrio tenemos que

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2),$$

$$V = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}K(x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2}Kx_3^2.$$

Las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1 - K(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = K(x_2 - x_1) - K(x_3 - x_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = K(x_3 - x_2) + Kx_3$$

$$M\ddot{x}_1 = -K(2x_1 - x_2),$$

$$M\ddot{x}_2 = -K(2x_2 - x_1 - x_3),$$

$$M\ddot{x}_3 = -K(2x_3 - x_2),$$

si denotamos por  $\omega_0^2 = K/M$  y suponemos  $x_j = a_j e^{i\omega t}$  resulta el sistema lineal

$$\omega^2 a_1 = \omega_0^2(2a_1 - a_2),$$

$$\omega^2 a_2 = \omega_0^2(2a_2 - a_1 - a_3),$$

$$\omega^2 a_3 = \omega_0^2(2a_3 - a_2),$$

que se simplifica aún más si llamamos  $\omega^2/\omega_0^2 = \lambda$

$$\begin{aligned}(\lambda - 2)a_1 + a_2 &= 0, \\ a_1 + (\lambda - 2)a_2 + a_3 &= 0, \\ a_2 + (\lambda - 2)a_3 &= 0,\end{aligned}\tag{8.9}$$

o sea el determinante

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0,$$

de aquí

$$(\lambda - 2)((\lambda - 2)^2 - 1) - (\lambda - 2) = 0$$

con soluciones  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ ,  $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$  de modo que las frecuencias propias son

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{2}, \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \omega_0\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Para encontrar los modos normales de (8.9) se obtiene para las tres frecuencias

$$\begin{aligned}a_{21} &= 0, \quad a_{11} + a_{31} = 0, \\ \sqrt{2}a_{12} + a_{22} &= 0, \quad a_{22} + \sqrt{2}a_{32} = 0, \\ -\sqrt{2}a_{13} + a_{23} &= 0, \quad a_{23} - \sqrt{2}a_{33} = 0,\end{aligned}$$

La matriz  $\mathbf{A}$  puede escribirse

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & -\sqrt{2}a_{12} & \sqrt{2}a_{13} \\ -a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix},$$

aunque no es necesario imponemos la condición  $(\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ij} = \delta_{ij}$ , entonces como  $\mathbf{K} = M\mathbf{I}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & -a_{11} \\ a_{12} & -\sqrt{2}a_{12} & a_{12} \\ a_{13} & \sqrt{2}a_{13} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & -\sqrt{2}a_{12} & \sqrt{2}a_{13} \\ -a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

$$2a_{11}^2 = \frac{1}{M}, \quad 4a_{12}^2 = \frac{1}{M}, \quad 4a_{13}^2 = \frac{1}{M}$$

de modo que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

y (salvo por factores irrelevantes)

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t} + C_3 e^{i\omega_3 t} \\ x_2 &= -\sqrt{2} C_2 e^{i\omega_2 t} + \sqrt{2} C_3 e^{i\omega_3 t} \\ x_3 &= -C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t} + C_3 e^{i\omega_3 t} \end{aligned}$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned} x_1 &= \varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3, \\ x_2 &= -\sqrt{2}\varsigma_2 + \sqrt{2}\varsigma_3, \\ x_3 &= -\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3, \end{aligned}$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned} \varsigma_2 + \varsigma_3 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_3), \\ -\varsigma_2 + \varsigma_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2, \end{aligned}$$

y salvo constantes las coordenadas normales son

$$\begin{aligned} \varsigma_2 &= x_1 + x_3 - \sqrt{2}x_2, \\ \varsigma_3 &= x_1 + x_3 + \sqrt{2}x_2, \\ \varsigma_1 &= x_1 - x_3, \end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] J. D. W. Alexander L. Fetter. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. Mac.Graw Hill, 1980.
- [2] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, 1978.
- [3] J.A.Blackburn. Stability and hopf bifurcations in an inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 60:903, 1992.
- [4] L. Rodriguez. Torque and the rate of change of angular momentum at an arbitrary point. *American Journal of Physics*, pages 1201–1203, November 2003.
- [5] F. Scheck. *Mechanics*. Springer Verlag, 1990.
- [6] J. L. Synge. *Principles of Mechanics*. Mac Graw Hill, New York, 1959.
- [7] W.McMillan. *Dynamics of Rigid Bodies*. Dover, New York, 1936.

# Índice alfabético

- Ángulos de Euler, 84, 87, 90
- Bernoulli
  - Solución de la ecuación de onda., 242
- Binet
  - ecuación de, 10
- Bola
  - problema ejemplo, 180
- Bola de billar
  - un ejemplo, 109
- Cónica
  - definición, 11
  - tipos de, 12
- Cono del cuerpo, 115, 140
- Cono del espacio, 115, 140
- Coordenadas elípticas, 302
- Coordenadas generalizadas, 162
- Coordenadas normales, 218
- Coriolis
  - teorema de, 306
- Cosenos directores, 78
- Cuerpo rígido, 95
- D'Alembert
  - Solucion de la ecuación de onda., 247
- Diagonalización
  - de matriz de inercia, 98
  - en oscilaciones pequeñas, 216
- Ecuación
  - de Binet, 10
  - integral de la trayectoria, 13
- Ecuación cúbica, 278
- Ecuación de onda
  - Solución de Bernoulli., 242
- Ecuaciones
  - de Euler, 111
  - de Lagrange, 161
  - de movimiento, 3
- Ejes principales de inercia, 98
- Elipsoide de inercia, 98
- Energía
  - mecánica, 7
  - potencial de interacción, 7
- Energía cinética
  - en oscilaciones pequeñas, 211
- Energía cinética de un cuerpo rígido, 97
- Energía potencial
  - en oscilaciones pequeñas, 213
  - potencial, 7
- Equilibrio
  - en oscilaciones pequeñas, 212
- Estabilidad
  - de posición de equilibrio, 212
- Euler
  - ángulos de, 84
  - ecuaciones de, 111
  - teoremas sobre rotaciones, 77

- Excentricidad, 11
- Fuerza  
     central, 9  
     dependiente de la velocidad, 172
- Fuerzas de vínculos, 162
- Función  
     homogénea de grado  $p$ , 171
- Galileo  
     transformación de, 1
- Grados de libertad, 162
- Hamilton  
     principio variacional, 161
- Hamiltoniano, 168  
     teorema de conservación, 170
- Identidad  
     relacionada con ecuaciones de Lagrange, 186, 193
- Identidad útil, 279
- Kepler  
     ley de, 12
- Koenig  
     teoremas de, 5
- Límite continuo, 236
- Lagrange  
     ecuaciones de, 161, 165–167  
     multiplicadores de, 165
- Lagrangiano, 166
- Lagrangiano aproximado  
     en oscilaciones pequeñas, 213
- Legendre  
     transformación de, 168  
     transformada de, 272
- Lie  
     álgebra de, 83
- Masa reducida, 8
- Masa variable, 13
- Matriz  
     de inercia de un cuerpo rígido, 96
- Matriz de inercia  
     rotación de ella, 100  
     traslación de ella, 100
- Momento canónico  
     teorema de conservación, 170
- Momento de inercia, 97
- Momentos canónicos, 167
- Momentum angular de un cuerpo rígido, 96, 97
- Movimiento cuspidal.  
     Trompo., 123
- Newton  
     ley de acción y reacción, 4  
     segunda ley, 3
- No holonómico  
     Vínculo, 165
- Noether  
     ejemplos, 175  
     teorema de, 174
- Orbita  
     cuasi elíptica, 271
- Oscilaciones transversales, 234
- Oscilaciones longitudinales, 227
- Oscilaciones pequeñas, 211
- Poinsot  
     Elipsoide de, 113
- Potencial efectivo, 9
- Precesión uniforme.  
     Trompo., 121
- Producto de inercia, 97
- Promedios temporales

- en órbita elíptica, 283
- Rotación
  - activa de un vector, 80
  - de un sistema, 77
  - en torno a ejes cartesianos, 80
  - finita de un vector, 81
  - infinitesimal, 83
  - pasiva de un vector, 79
- Serie de Fourier
  - Solución de la ecuación de onda, 241
- Sistema
  - de dos partículas, 7
  - de masa variable, 13
  - de referencia, 1
  - de referencia celestial, 2
  - inercial de referencia, 2
  - rígido de partículas, 95
- Sistema contínuos, 227
- Steiner
  - teorema de, 100
- Teorema
  - conservación momentum angular, 9
  - de adición de velocidades angulares, 86
  - de conservación del hamiltoniano, 172
  - de Noether, 174
  - de Steiner, 100
  - energía trabajo, 6
- Teoremas
  - de conservación, 170
  - sobre ejes principales de inercia, 98
- Trompo dormido, 178, 273, 299
  - Trompo dormido.
    - Estabilidad., 121
  - Trompo en precesión uniforme, 273
  - Trompo simétrico, 176
    - ecuaciones de movimiento, 119, 176
- Vínculos, 162
- Velocidad angular, 85
- Virtuales
  - cambios virtuales, 162
  - desplazamientos virtuales, 163