Ecuaciones a derivadas parciales:

- **Ecuación de Laplace:**

$$\nabla^2\Psi = 0$$

- **Ecuación de Poisson:**

$$\nabla^2\Psi = -4\pi\rho(\vec{x})$$

- **Ecuaciones de ondas y de Helmholtz:**

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0$$

- **Ecuación de difusión:**

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = D\nabla^2\Psi$$

- **Ecuaciones para potenciales electromagnéticos:**

$$\Box\phi = -4\pi\rho \qquad \Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Ecuaciones a derivadas parciales:

- **EDP's, propiedades:**

$$H\Psi = f$$

  Consideramos ecuaciones lineales, orden no superior al segundo.

- **Solución general:**

$$\Psi = \sum_n a_n \Psi_n^h + \Psi_p$$

- **Métodos de solución de EDP's:**
  - Fórmulas integrales, funciones de Green.
  - Separación de variables

Coordenadas separables:

- **Superficies en los bordes:**

$$Superficies \rightarrow \begin{cases} Abiertas \\ Cerradas \end{cases}$$

- **Tipos de condiciones de borde:**
  - Dirichlet
  - Neumann
  - Cauchy

- **Soluciones separables:**

$$\Psi = F_1(\xi_1)\Phi(\xi_2, \xi_3)$$

$$\Psi = F_1(\xi_1)F_2(\xi_2)F_3(\xi_3)$$

"Las soluciones de EDP's son c.l. de soluciones separables"

Coordenadas separables, Ecuación de Helmholtz:

- **Coordenadas cartesianas:**

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + k^2\Psi = 0$$

$$\Psi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dq f(q) e^{iqx} e^{y\sqrt{q^2-k^2}}$$

- **2D, variables complejas: (**$z = x + iy$**,** $\bar{z} = x - iy$**,** $w = w(z) = \xi_1 + i\xi_2$**)**

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 4\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial\bar{z}} + k^2\Psi = 0$$

$$\nabla^2\Psi = 4|\frac{dw}{dz}|^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial w\partial\bar{w}}$$

Coordenadas separables, Ecuación de Helmholtz 2D:

- **Transformaciones conformes $\Rightarrow$ coordenadas ortogonales:**

$$w(z) = \xi_1 + i\xi_2 \qquad \nabla\xi_1 \cdot \nabla\xi_2 = 0$$

- **Soluciones separables de la ecuación de Laplace:**

$$\Psi = Ae^{\pm i\alpha\xi_1} e^{\pm\alpha\xi_2} \quad o \quad \Psi = ae^{\beta w} + be^{\gamma\bar{w}}$$

- **Factor de escala:**

$$h_m^2 = (\frac{\partial x}{\partial\xi_m})^2 + (\frac{\partial y}{\partial\xi_m})^2$$

$$h_1 = h_2 = |\frac{dz}{dw}|$$

- **Condición de separabilidad:**

$$k^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = f(\xi_1) + g(\xi_2)$$

o

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left(\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \right) = 0$$

- **Ecuaciones para separabilidad:**

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \lambda \left(\frac{dz}{dw} \right) \quad ; \quad \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right) = \lambda \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right)$$

Coordenadas rectangulares y parabólicas:

- **Caso $\lambda = 0$:**

$$\frac{dz}{dw} = \beta + \gamma w$$

  - **Sub-caso $\gamma = 0$:**

$$z = \alpha + \beta w$$

  - **Sub-caso $\gamma = 1$, coordenadas parabólicas:**

$$z = w^2/2 \qquad x = (\xi_1^2 - \xi_2^2) \qquad y = \xi_1 \xi_2$$

$$\frac{1}{2}(\frac{y}{\xi_2^0})^2 = x - (-\frac{(\xi_2^0)^2}{2}) \qquad -\frac{1}{2}(\frac{y}{\xi_1^0})^2 = x - (-\frac{(\xi_1^0)^2}{2})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial_2^2} + k^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\Psi = 0$$

Coordenadas polares y elípticas: $(\lambda = 1)$

$$z = ae^{w} + be^{-w}$$

- **Caso $b = 0$, $a = 1$, coordenadas polares:**

$$\begin{array}{ccc} z = e^{w} & x = e^{\xi_1}\cos\xi_2 & y = e^{\xi_1}\sin\xi_2 \\ e^{\xi_1} = r = \sqrt{x^2+y^2} & \xi_2 = \phi = \tan^{-1}(y/x) & \left|\frac{dz}{dw}\right| = e^{\xi_1} = r \end{array}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial_2^2} + k^2 e^{2\xi_1}\Psi = 0$$

Coordenadas polares y elípticas: $(\lambda = 1)$

- **Caso $b = 0$, $a = 1$, coordenadas elípticas:**

$$
\begin{array}{ccc}
z = ae^{w} + be^{-w} & a = de^{-\beta}/2 & b = de \\
z = d\cosh(w - \beta) & x = d\cosh(\xi_1 - \beta)\cos(\xi_2) & y = d\sinh(\xi_1
\end{array}
$$

- **Elipses e hipérbolas: ($\xi_1 = \xi_1^0$, $\xi_2 = \xi_2^0$)**

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial_2^2} + d^2 k^2 (\cosh^2(\xi_1 - \beta) - \cos^2 \xi_2)\Psi = 0$$