Pauta control 3
Métodos matemáticos de la Física

Profesor: Rodrigo Arias
Auxiliar: Alejandro Jara

15 de octubre de 2008

Problema 1

a) (0.3) La transformada de Fourier de una función esta dada por:

$$\hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ikx} dx$$

En este caso tenemos:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\hat{F}(k) &= \int_{-\infty}^{-a} F(x) e^{-ikx} dx + \int_{-a}^{a} F(x) e^{-ikx} dx + \int_{a}^{\infty} F(x) e^{-ikx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{-a} 0 e^{-ikx} dx + \int_{-a}^{a} 1 e^{-ikx} dx + \int_{a}^{\infty} 0 e^{-ikx} dx \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx = \frac{-1}{ik}(e^{-ika} - e^{ika}) = \frac{2}{k} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2i}
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos que:

$$\hat{F}(k) = \frac{2 Sin(ka)}{k}$$

b) (0.5) La formula de Parseval es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

Usemos esto para la parte a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-a} |f(x)|^2 dx + \int_{-a}^{a} |f(x)|^2 dx + \int_{a}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2 Sin(ka)}{k} \right|^2 dk \\
\int_{-\infty}^{-a} |0|^2 dx + \int_{-a}^{a} |1|^2 dx + \int_{a}^{\infty} |0|^2 dx &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin(ka)^2}{k^2} dk \\
2a &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin(ka)^2}{k^2} dk
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin(ka)^2}{k^2} dk = a\pi$$

Finalmente si hacemos $a = 1$ obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin(k)^2}{k^2} dk = \pi$$

Problema 2(1.0) En este problema es esencial usar las siguientes propiedades:
Si tenemos

$$h(x) = \int_0^x g(x')f(x - x')dx'$$

Entonces

$$\hat{h}(s) = \hat{g}(s)\hat{f}(s)$$

si $\hat{f}(s)$ es la transformada de Laplace de $f(x)$ entonces la transformada de $f'(x)$ es

$$[\hat{f'}](s) = s\hat{f}(s) - f(0)$$

y finalmente la ayuda que nos dan en el enunciado

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1} e^{-st} dt = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$$

En este problema particularmente tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x - t)^{-\mu} u(t)dt \\ u(x) &= \int_0^x K(x - t)f'(t)dt \end{aligned}$$

Usemos la primera propiedad, para las dos integrales anteriores.

Sea $g(x) = x^{-\mu}$

$$\hat{f}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s) \tag{1}$$
$$\hat{u}(s) = \hat{K}(s)[\hat{f'}](s) \tag{2}$$

Juntemos (1) y (2), luego

$$\hat{f}(s) = \hat{g}(s)\hat{K}(s)[\hat{f'}](s) \tag{3}$$

Como $f(0) = 0$ entonces $[\hat{f'}](s) = s\hat{f}(s)$. Si remplazamos esto ultimo en (3), obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \hat{g}(s)\hat{K}(s)s\hat{f}(s) \\ 1 &= \hat{g}(s)\hat{K}(s)s \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\hat{K}(s) = \frac{1}{s\hat{g}(s)} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= \int_0^{\infty} g(x)e^{-sx}dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{(1-\mu)-1}e^{-sx}dx \\ &= \frac{\Gamma(1-\mu)}{s^{(1-\mu)}} \end{aligned}$$

Remplacemos esto ultimo en (4)

$$\begin{aligned}
\hat{K}(s) &= \frac{s^{(1-\mu)}}{s\Gamma(1-\mu)} && (5)\\
&= \frac{s^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)} && (6)\\
&= \frac{\Gamma(\mu)}{s^{\mu}}\frac{1}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu)} && (7)\\
&= \int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-st}dt\,\frac{1}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu)} && (8)\\
&= \int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu)}e^{-st}dt && (9)
\end{aligned}$$

Finalmente, si comparamos con la definición de transformada de la Laplace

$$K(x-t) = \frac{(x-t)^{\mu-1}}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu)}$$

Problema 4(1.0)Tenemos una integral de la forma:

$$I(x) = \int_0^1 dte^{ix\phi(t)}\,,\; x\to\infty$$

El método de la fase estacionaria nos dice que debemos buscar el punto donde $\phi(t)$ alcanza el mínimo, pues es ahí donde la función $e^{ix\phi(t)}$ oscila menos y por tanto aporta más a la integral. Por lo tanto hagamos un Taylor entorno a el mínimo de $\phi(t)$.
En este caso tenemos que

$$I(x) = \int_0^1 dte^{ix(1-\frac{sint}{t})}$$

Es decir

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= 1-\frac{sint}{t}\\
\phi'(t) &= \frac{-tcost+sint}{t^2}\\
\phi''(t) &= \frac{sint(t^2-2)+2tcost}{t^3}
\end{aligned}$$

Busquemos cuando $\phi'(t_0)=0\rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{-t_0cost_0+sint_0}{t_0^2} &= 0\\
-t_0cost_0+sint_0 &= 0\\
sint_0 &= t_0cost_0\\
tant_0 &= t_0
\end{aligned}$$

La solución de esta ecuación es $t_0=0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\phi(t_0) &= \lim_{t\to 0}\left(1-\frac{sint}{t}\right)=0\\
\phi'(t_0) &= 0\\
\phi''(t_0) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{sint(t^2-2)+2tcost}{t^3}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{cost(t^2-2)+2tsint+2cost-2tsint}{3t^2}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{cost}{3}\right)=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Con esto ultimo tenemos que:

$$\begin{aligned}\phi(t) &\approx \phi(t_0)+\phi'(t_0)(t-t_0)+\frac{\phi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2\\ &\approx \frac{t^2}{6}\end{aligned}$$

Luego nuestra integral queda como

$$\begin{aligned}I(x) &\approx \int_0^R dte^{ixt^2/6}\\ &\approx \int_0^R dte^{-xt^2/i6}\end{aligned}$$

Donde $R>0$ es un constante muy pequeña
C.V. $\rightarrow u=\sqrt{\frac{x}{6}}t \Rightarrow du=\sqrt{\frac{x}{6}}dt$ cuando $t=0\rightarrow u=0$ y cuando $t=R\rightarrow u=\sqrt{\frac{x}{6}}R$, entonces

$$I(x) \approx \sqrt{\frac{6}{x}}\int_0^{R\sqrt{\frac{x}{6}}} due^{iu^2}$$

Como $x\rightarrow\infty$ entonces

$$I(x) \approx \sqrt{\frac{6}{x}}\int_0^{\infty} due^{iu^2} \tag{10}$$

Para hacer esta ultima integral usamos una integración en el plano complejo

$$I_{complejo} = \int_C due^{iu^2}$$

Cuyo contorno tiene la forma de una pizza que muestra en la figura, sea C_1, C_2, C_3 y C_4 cuatro caminos tales que C_1 esta en la recta de los reales positivos y va desde ϵ a R, C_3 es una recta que forma un angulo con la horizaontal tal que en esa recta la integral quede de la forma:

$$I_3 \sim \int_0^{\infty} dre^{-r^2}$$

es decir $iu^2=-r^2\Rightarrow u=re^{i\pi/4}$, por lo tanto forma un angulo de $\pi/4$ con la horizontal y va de $e^{i\pi/4}\infty$ a $e^{i\pi/4}\epsilon$

C_2 es un pedazo de circunferencia de radio R que une las dos caminos C_1 y C_3, y va en el sentido anti-horario y por ultimo C_4 es un pedazo de circunferencia de radio ϵ cuyo camino tiene sentido horario. Escribamos estas 4 integrales

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\epsilon^R due^{iu^2}\\ I_2 &= \int_0^{\pi/4} d\theta Re^{-R^2sin2\theta}e^{i(R^2cos2\theta+\theta+\pi/2)}\\ I_3 &= \int_{e^{i\pi/4}R}^{e^{i\pi/4}\epsilon} due^{iu^2}\\ I_4 &= \int_{\pi/4}^0 d\theta\epsilon e^{-\epsilon^2sin2\theta}e^{i(\epsilon^2cos2\theta+\theta+\pi/2)}\end{aligned}$$

Si hacemos $R \to \infty$, entonces $I_2 \to 0$, pues $e^{-R^2 sin 2\theta} \to 0$ más rápido que $1/R$ y cuando $\epsilon \to 0$ entonces $I_4 \to 0$. Luego

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty du e^{iu^2} \\ I_3 &= \int_{e^{i\pi/4}\infty}^{e^{i\pi/4}0} du e^{iu^2} \end{aligned}$$

Finalmente si a I_3 se le hace el C.V. $u = re^{i\pi/4}$ obtenemos

$$\begin{aligned} I_3 &= e^{i\pi/4} \int_\infty^0 dr e^{-r^2} \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^\infty dr e^{-r^2} \\ &= \frac{-e^{i\pi/4}}{2}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} I_{complejo} &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ &= \int_0^\infty du e^{iu^2} + 0 - \frac{e^{i\pi/4}}{2}\sqrt{\pi} + 0 \end{aligned}$$

Pero notemos que dentro del contorno no existe sigularidades por lo que $I_{complejo} = 0$
$\Rightarrow$

$$\int_0^\infty du e^{iu^2} = \frac{e^{i\pi/4}}{2}\sqrt{\pi}$$

Remplazando en (10) tenemos que:

$$I(x) \approx \sqrt{\frac{3\pi}{2x}} e^{i\pi/4}$$

Problema 5(1.0) Este problema n tiene pauta... preguntarme directamente en el reclamo!!!!

Problema 6(1.0) Queremos saber el termino asintótico dominante en el limite en que $n \to \infty$ de

$$I_n = \int_{-1}^1 dx (a - x^2)^n$$

Reescribamos esta ultima integral

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 dx e^{nlog(1-x^2)} \\ &= \int_{-1}^1 dx e^{-n\phi(x)} \end{aligned}$$

Notemos que esto esta bien, pues $x < 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 1 \Rightarrow log(1 - x^2) < 0$ por lo que $e^{nlog(1-x^2)} \to 0\, si\, n \to \infty$. Tenemos que hacer un Taylor entorno al mínimo de $\phi(x) = -log(1 - x^2)$, para eso debemos calcular primero ese mínimo, es decir:

$$
\begin{aligned}
\phi'(x_0) &= 0 = \frac{2x_0}{1-x_0^2} \Rightarrow x_0 = 0 \\
\phi''(x) &= \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \phi''(x_0) = 2 \\
\phi(x_0) &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &\approx \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x-x_0) + \frac{\phi''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
&\approx x^2
\end{aligned}
$$

Remplacemos esto ultimo en I_n

$$
I_n \approx \int_{-1}^{1} dx e^{-nx^2}
$$

C.V. $\rightarrow u = \sqrt{n}x \Rightarrow du = \sqrt{n}dx$ cuando $x = -1 \rightarrow u = -\sqrt{n}$ y cuando $x = 1 \rightarrow u = \sqrt{n}$, entonces

$$
I_n \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} du e^{-u^2}
$$

Como $n \rightarrow \infty$, entones podemos aproximar esta ultima integral a

$$
I_n \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}
$$