Ejercicio 5 13/10/08

Considere un sistema compuesto por N partículas que pueden estar en 3 niveles de energía $E_1 = -\varepsilon$, $E_2 = 0$, $E_3 = \varepsilon$

a) Encontrar la fn partición
b) Det la energía $\bar{E}$

c) Analizar los casos $T \to \infty$, $T \to 0$ y argumentar el porqué de su resultado

Sol: a) $Z = \sum_r e^{-\beta E_{r(\text{sistema})}}$

$$E_{\text{sistema}} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow Z = \sum_{E_1=-\varepsilon,0,\varepsilon} \sum_{E_2=-\varepsilon,0,\varepsilon} \cdots \sum_{E_3=-\varepsilon,0,\varepsilon} \underbrace{e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} E_i}}_{\prod_{i=1}^{N} e^{-\beta E_i}}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \sum_{E=-\varepsilon,0,\varepsilon} e^{-\beta E} = \prod_{i=1}^{N} \left(e^{\beta\varepsilon} + 1 + e^{-\beta\varepsilon} \right)$$

$$\boxed{Z = \left(e^{\beta\varepsilon} + 1 + e^{-\beta\varepsilon} \right)^N}$$

b) $$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z) = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left(e^{\beta\varepsilon} + 1 + e^{-\beta\varepsilon} \right)$$

$$= -N \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1 + e^{-\beta\varepsilon}} \cdot \varepsilon \left(e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon} \right)$$

$$\boxed{\bar{E} = \frac{N\varepsilon\left(e^{-\beta\varepsilon} - e^{\beta\varepsilon} \right)}{e^{\beta\varepsilon} + 1 + e^{-\beta\varepsilon}}}$$

c) si $T \to \infty \Rightarrow \beta \to 0 \Rightarrow \bar{E} \to 0$ esto es porque se distribuirían con igual prob en los 3 niveles por lo que habrían igual cantidad de part con energía $-\varepsilon$, 0, y ε y en promedio el sistema tendría energía igual a 0 ii $T \to 0 \Rightarrow \beta \to \infty \Rightarrow \bar{E} \to -N\epsilon$

El sistema a bajas temperaturas se ordena y minimiza su energía por lo que todas las part estarán en un estado de energía y ésta será el mín

luego $\bar{E} = -N\epsilon$.