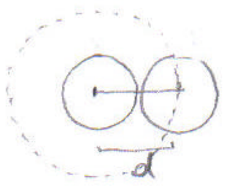
Auxiliar 13 17/11/08

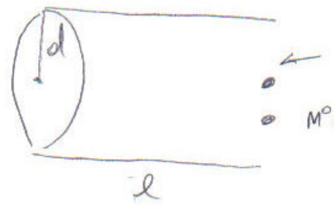
→ Hasta ahora habíamos considerado que las partículas del gas eran puntuales (salvo en la ec de Van der Waals). Si esto realmente fuera así al dejar gas en una pieza se esparciría rápidamente, pero esto no es lo que ocurre debido a que dado que las partículas tienen un vol. presentan colisiones entre sí.

→ En 1era aproximación las consideraremos como esferas rígidas de diámetro d.



→ cuando los centros de 2 moléculas se encuentran a una distancia d se produce una colisión

→ consideraremos 1 partícula como esfera de radio d y la otra puntual ubicada en su centro



l = camino libre medio (cuanto recorre una partícula antes de chocar)

n° de choques $= l\, n \underbrace{\pi d^2}_{\sigma} = 1$ σ: sección eficaz de choque

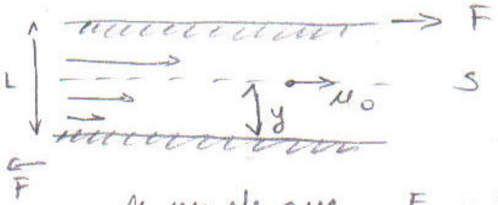
→ cuando el n° de choques es igual a 1 tenemos que la distancia recorrida es l. $\boxed{l = \frac{1}{n\sigma}}$

τ = tiempo libre medio

$l = \tau \bar{v}$; $\bar{v}$: veloc. promedio

→ $\boxed{\tau = \frac{1}{\bar{v} n \sigma}}$

→ Coef. de Viscosidad (cap 10 Sears & Salinger)



F: fza necesaria para mover la placa superior con veloc cte con respecto a la de abajo y mantener la de abajo en reposo.

→ coef. de viscosidad

se cumple que $\frac{F}{A} = \eta \frac{du}{dy}$

u → veloc hacia la derecha. se considera pequeño con respecto a los mov. aleatorios de las moléculas

→ Si consideramos el transporte de momentum al cruzar la superficie S de arriba hacia abajo y abajo hacia arriba vemos que se produce un freno de la capa superior a S y un aumento de momentum para la capa inferior a S por lo que se produce viscosidad.

→ El último choque antes de cruzar la superficie (desde arriba o abajo) tiene como altura promedio $\bar{y} = \frac{2}{3} l$

luego las partículas de la capa inferior antes de cruzar tienen veloc

$u = u_0 + \frac{2}{3} l \frac{du}{dy}$ u_0 = velocidad hacia la derecha en S

→ los que están por debajo de S

$$u = u_0 - \frac{2}{3} l \frac{du}{dy}$$

si Φ es el flujo de partículas que cruzan hacia arriba o hacia abajo por u de tiempo $\Phi = \frac{1}{4} n m \bar{v}$

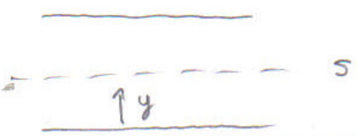
$$\Rightarrow \quad G\downarrow = m u \Phi = \frac{1}{4} n m \bar{v} \left(u_0 + \frac{2}{3} l \frac{du}{dy} \right)$$ → momentum transferido hacia arriba

$$G\uparrow = m u \Phi = \frac{1}{4} n m \bar{v} \left(u_0 - \frac{2}{3} l \frac{du}{dy} \right)$$ → momentum transferido hacia abajo

$$\Delta G = \frac{1}{3} n m \bar{v} l \frac{du}{dy} = \frac{F_{viscoso}}{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{3} n m \bar{v} l = \frac{1}{3} m \frac{\bar{v}}{\sigma}}$$ → indep de la presión (a presiones bajas) y la densidad
→ depende solo de la Temp $\bar{v}(T)$

Conductividad térmica



gas con un gradiente de Temp creciente con y

$$\boxed{H = -\lambda \frac{dT}{dy}}$$

λ: conductividad térmica

H: flujo de calor por u de área por u de tiempo a través de la superficie = flujo de energía cinética moléculas

→ la energía cinética de un gas está dada por su energía interna

$U = C_V T$ por mol

$\Rightarrow$ E. cinético de cada partícula $= \frac{C_V T}{N_A} = C_V^* T$

análogo a la viscosidad

$$C_V^* T = C_V^* \left(T_0 - \frac{2}{3} l \frac{dT}{dy} \right)$$ → será transportado hacia arriba

$$C_V^* T = C_V^* \left(T_0 + \frac{2}{3} l \frac{dT}{dy} \right)$$ → será transportado hacia abajo.

multiplicando por el flujo Φ

$$\Rightarrow \quad H\uparrow = \frac{1}{4} n \bar{v} C_V^* \left(T_0 - \frac{2}{3} l \frac{dT}{dy} \right)$$

$$H\downarrow = \frac{1}{4} n \bar{v} C_V^* \left(T_0 + \frac{2}{3} l \frac{dT}{dy} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta H = -\frac{1}{3} n \bar{v} C_V^* l \frac{dT}{dy}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3} n \bar{v} C_V^* l = \frac{1}{3} \frac{\bar{v} C_V^*}{\sigma}}$$

indep de P y n

Finalmente $\frac{\lambda}{\eta} = \frac{C_V^*}{m} = \frac{C_V}{m N_A} = \frac{C_V}{M} \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda M}{\eta C_V} = 1}$ M peso moléculas del gas.

P1) Una nave espacial, en forma de cubo de arista L, se mueve por el espacio exterior con una veloc V paralela a una de sus aristas. El gas que la rodea contiene partículas de masa m a temp T. Suponiendo que los choques son elásticos. Calcular la fuerza retardatriz sobre la nave. Suponer que V es pequeña comparada con la veloc media de las moléculas del gas e ignorar la dist. de veloc. de las mismas. Si la masa de la nave es M ¿cuánto tiempo ha de transcurrir para que la veloc de la nave se reduzca a la mitad de su valor inicial?

Sol:

la densidad de partículas es n y supondremos sus velocidades como $\bar{v}$ por isotropía (no hay direcciones privilegiadas)

la densidad de partículas con veloc. según $\hat{x}$ es $\frac{n}{6}$ igual a la densidad de part según $-\hat{x}$ $\frac{n}{6}$.

El nº de choques por u de tiempo en cada cara del cubo es

$$\frac{N}{\Delta t} = \frac{n}{6}\,\bar{v}\,L^2$$

El cambio de momentum por cada choque es:

si es un choque frontal (considerando que la nave está quieta)

$$\Delta p = -2m(\bar{v}+V)$$

si es por atrás $\quad \Delta p = 2m(\bar{v}-V)$

si es por el lado $\quad \Delta p = 2m(\bar{v})$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\text{nº de choques} \times \Delta p \text{ de cada choque}}{\Delta t} = \frac{N}{\Delta t}\times \Delta p$$

los choques laterales se anulan y sólo sumamos los de frente y atrás.

$$F = F_{adelante} + F_{atrás} = \frac{N}{\Delta t}\cdot\left(-2m(\bar{v}+V)+2m(\bar{v}-V)\right)$$

$$= \frac{N}{\Delta t}(\cdot -4mV) = \underline{-4\frac{n}{6}\,\bar{v}\,V\,m\,L^2} \rightarrow \text{fuerza retardatriz}$$

$\rightarrow$ luego $\quad \frac{dP}{dt} = -\frac{4}{6}\,n\,\bar{v}\,Vm\,L^2 \;/\cdot M$

$$M\,dP = -\frac{4}{6}\,n\,\bar{v}\,\underbrace{(MV)}_{P}\,mL^2\,dt$$

$$M \frac{dP}{P} = -\frac{4}{6} n \bar{v} m L^2 dt \quad / \int$$

$$M \int_P^{P/2} \frac{dP}{P} = -\frac{4}{6} n \bar{v} m L^2 \int_0^{t^*} dt$$

$$M \ln(1/2) = -\frac{2}{3} n \bar{v} m L^2 t^*$$

$$\boxed{\frac{3}{2} \frac{M \ln 2}{n \bar{v} m L^2} = t^*}$$ tiempo para que la veloc. se reduzca a la mitad

P2) Sea $w\,dt$ = prob de que una part sufra un choque en el intervalo de tiempo dt

Sea $P(t)$ = prob de que la partícula sobreviva un tiempo t sin sufrir choques.

Obtener una ec. diferencial para $P(t)$, resolverla y demostrar que $P(t) = e^{-wt}$.

Sol:

Veamos que $P(t+dt) = P(t)(1-w\,dt)$

$$P(t+dt) - P(t) = P(t)(1-w\,dt) - P(t)$$

$$= P(t)(\cancel{1} - w\,dt - \cancel{1})$$

$$= -w P(t)\,dt$$

$$\frac{P(t+dt) - P(t)}{dt} \cancel{dt} = -w P(t) \cancel{dt}$$

$$P'(t) = -w P(t)$$

$$\frac{dP}{P} = -w\,dt \quad / \int$$

$$\ln P = -wt + c$$

$$\Rightarrow \boxed{P = P_0 e^{-wt}}$$

Veamos que $P(0) = 1$ ya que es lógico que la molécula sobreviva un tiempo muy corto.

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = e^{-wt}}$$

Veamos que $P(t \to \infty) = 0$ lo que nos dice que la prob de que sobreviva un tiempo largo se va a cero.

P3) Usando el prob. anterior...

(a) Dem que la prob de que una part haya sobrevivido un tiempo t y sufra un choque entre t y t+dt está bien normalizado.

$$\int_0^\infty P(t)\,\omega\, dt = \int_0^\infty e^{-\omega t}\omega\, dt$$

$$= \omega\left(-\frac{1}{\omega}e^{-\omega t}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \omega\left(0+\frac{1}{\omega}\right) = 1$$

(b) Utilizar esta prob para demostrar que el tiempo medio $\bar{t}=\tau$ durante el cual sobrevive una part antes de sufrir un choque es $\tau = 1/\omega$

$$\tau = \int_0^\infty P(t)\,\omega t\, dt = \int_0^\infty e^{-\omega t}\omega t\, dt$$

$$= \omega\int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial\omega}\left(e^{-\omega t}\right)dt$$

$$= \omega\, -\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\int_0^\infty e^{-\omega t}dt\right) = \omega\, -\frac{\partial}{\partial\omega}\left(-\frac{1}{\omega}e^{-\omega t}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \omega\, -\frac{\partial}{\partial\omega}\left(0+\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= \omega\cdot\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega}$$

(c) $$\overline{t^2} = \int_0^\infty P(t)\,\omega t^2 dt = \int_0^\infty e^{-\omega t}\omega t^2 dt$$

$$= \omega\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\int_0^\infty e^{-\omega t}dt = \omega\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\frac{1}{\omega}$$

$$= \cancel{\omega}\, 2\frac{1}{\omega^{\cancel{3}}} = \frac{2}{\omega^2}$$

$$\boxed{\overline{t^2} = 2\tau^2}$$