

Pregunta

Calcular la entropía de un gas de van der Waals en función de T, V , con el número de partículas constante.

HINT: $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V - p$

Solución

$S = S(T, V)$, por lo tanto

$$dS = \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T dV$$

Además $dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + p dV}{T}$

$$= \frac{1}{T} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T dV + p dV \right)$$

$$= \frac{1}{T} C_V dT + \frac{1}{T} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) dV \quad \text{pues } \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = C_V$$

Usamos que $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V - p$

y obtenemos

$$dS = \frac{1}{T} C_V dT + \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V dV$$

La ec. de estado de un gas de van der Waals es

$$\left(p + \left(\frac{N}{V}\right)^2 a\right)(V - Nb) = NkT$$

$$\Rightarrow p = \frac{NkT}{V - Nb} - \left(\frac{N}{V}\right)^2 a$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{Nk}{(V - Nb)^2}$$

en dS queda,

$$dS = \frac{1}{T} C_V(T) dT + \frac{Nk}{V - Nb} dV$$

Ahora integramos

$$\Rightarrow S(V, T) = \int_{T_0}^T \frac{C_V(T)}{T} dT + \int_{V_0}^V \frac{Nk}{V - Nb} dV + S_0(V_0, T_0)$$

$$\Rightarrow S(V, T) = S_0(V_0, T_0) + C_V \ln \frac{T}{T_0} + Nk \ln \frac{(V - Nb)}{(V_0 - Nb)}$$

¡ Voilà !