

Aplicaciones de los circuitos RC: Diferenciadores, integradores y filtros de frecuencia

21 de mayo de 2008

1. Objetivos

- Estudio de la carga y descarga de un condensador.
- Construcción de un diferenciador y de un integrador.
- Construcción de un filtro pasa-baja.

2. Material

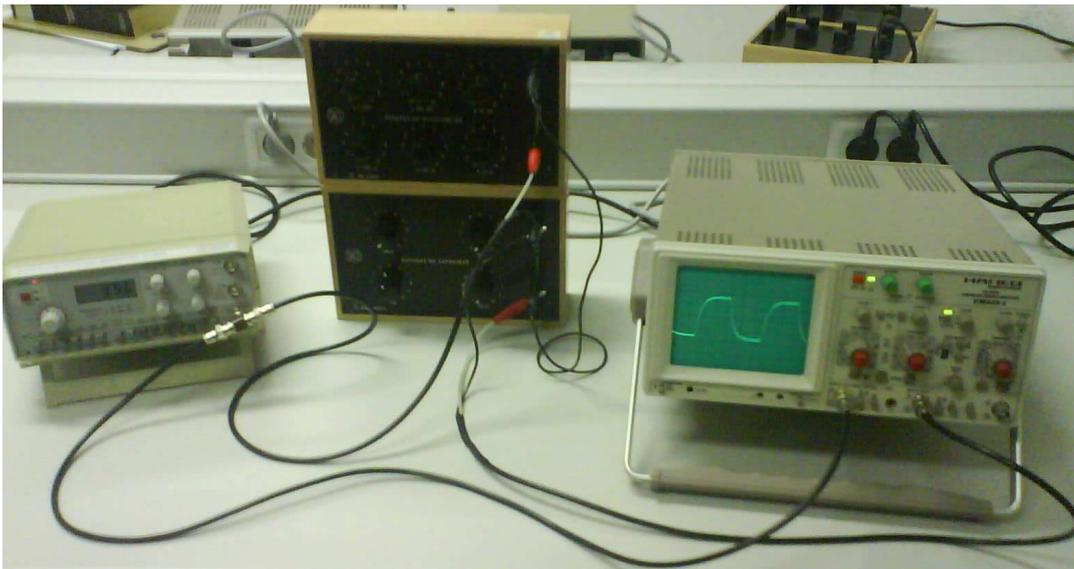


Figura 1: Aspecto general de la práctica.

- 1 osciloscopio.
- 1 generador de funciones.
- 1 caja de resistencias.
- 1 caja de condensadores.
- cables

3. Teoría

Carga y descarga de un condensador

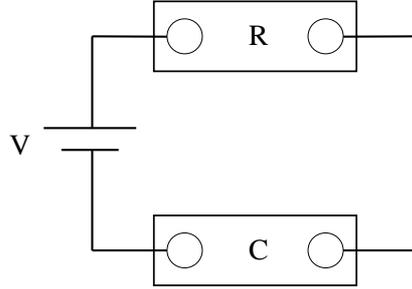


Figura 2: Circuito RC con una fuente de potencial.

Consideremos el circuito de la figura 2. En cada instante, el potencial $V(t)$ de la fuente externa caerá en parte en la resistencia, $V_R(t) = I(t)R$, y en parte en el condensador, $V_C(t)$. Por otra parte, la carga acumulada en el condensador es $Q(t) = CV_C(t)$, siendo C su capacidad. Así pues,

$$V(t) = V_C(t) + V_R(t) = V_C(t) + I(t)R = V_C(t) + \frac{dQ(t)}{dt}R = V_C(t) + RC\frac{dV_C(t)}{dt}. \quad (1)$$

Si $V(t) = V$ es un potencial constante, es fácil comprobar por sustitución que la solución de esta ecuación diferencial es

$$V_C(t) = V + (V_C(t_0) - V)e^{-(t-t_0)/RC}. \quad (2)$$

Si R se expresa en ohmios y C en faradios, el producto RC se expresa en segundos y se llama constante de tiempos del circuito. Si en el instante $t = t_0$ cambiamos repentinamente el valor de V , entonces $V_C(t)$ decae exponencialmente desde su valor inicial $V_C(t_0)$ hacia ese nuevo valor V , en un tiempo $t - t_0 \approx RC$, de modo que $V_C(t) \rightarrow V$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Diferenciadores

Consideremos de nuevo el circuito de la figura 2, pero suponiendo ahora que $V(t)$ no es constante. Puesto que $V(t) = V_R(t) + V_C(t) \implies V_C(t) = V(t) - V_R(t)$, se cumple también que

$$V_R(t) = I(t)R = \frac{dQ(t)}{dt}R = RC\frac{dV_C(t)}{dt} = RC\frac{d(V(t) - V_R(t))}{dt} = RC\frac{dV(t)}{dt} - RC\frac{dV_R(t)}{dt}. \quad (3)$$

Si $V(t)$ varía lentamente (con un periodo $T \gg RC$), el condensador tiene tiempo de sobra para cargarse y compensar el potencial de la fuente, por lo que $V_C \approx V \gg V_R$, y entonces

$$V_R(t) \approx RC\frac{dV(t)}{dt}, \quad (4)$$

es decir, la diferencia de potencial en la resistencia es proporcional a la derivada de la señal aplicada. Para una señal de entrada triangular, con potencial V_{pp} pico a pico, $V(t)$ cambia de $-V_{pp}/2$ a $+V_{pp}/2$, o viceversa, en un tiempo $T/2$, siendo $T = 1/f$ el periodo. Por tanto $dV/dt = V_{pp}/(T/2) = 2fV_{pp}$, y

$$V_{Rpp} = 2|V_{Rmax}| = 4RCfV_{pp}. \quad (5)$$

Para una señal de entrada sinusoidal, con potencial V_{pp} pico a pico, $V(t) = (V_{pp}/2) \sin(\omega t) \implies dV/dt = (\omega V_{pp}/2) \cos(\omega t)$, donde $\omega = 2\pi f$. Por tanto, la señal de salida estará desfasada 90° con respecto a la de entrada, y su amplitud pico a pico será

$$V_{Rpp} = 2\pi RC f V_{pp}. \quad (6)$$

Integradores

Consideremos de nuevo la ecuación (1). Si $V(t)$ varía rápidamente (con periodo $T \ll RC$), el condensador no tiene tiempo de cargarse y descargarse en cada ciclo, por lo que casi todo el potencial cae en la resistencia, $V_R \approx V \gg V_C$, y

$$RC \frac{dV_C(t)}{dt} \approx V(t) \implies V_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int V(t) dt, \quad (7)$$

es decir, la diferencia de potencial en el condensador es proporcional a la integral de la señal aplicada. Para una señal cuadrada

$$V(t) = \begin{cases} +V_{pp}/2 & \text{si } 0 < t < T/2 \\ -V_{pp}/2 & \text{si } T/2 < t < T \end{cases} \quad (8)$$

Integrando

$$V_C(t) = \begin{cases} (1/RC)(V_{pp}/2)t & \text{si } 0 < t < T/2 \\ (1/RC)(V_{pp}/2)(T-t) & \text{si } T/2 < t < T \end{cases} \quad (9)$$

$$V_{Cpp} = V_{Cmax} - V_{Cmin} = \frac{1}{RC} \frac{V_{pp}}{2} \frac{T}{2} = \frac{V_{pp}}{4RCf} \quad (10)$$

Para una señal sinusoidal, $\int V(t) dt = (V_{pp}/2) \cos(\omega t)/\omega$ y

$$V_{Cpp} = \frac{V_{pp}}{2\pi RCf}. \quad (11)$$

Filtros

Consideremos ahora el caso en que $V(t)$ es un potencial alterno sinusoidal:

$$V(t) = V \sin(\omega t) \quad (12)$$

En este caso, $V_C(t)$ también lo será, aunque con cierto desfase ϕ :

$$V_C(t) = V_C \sin(\omega t - \phi) \quad (13)$$

Para comprobarlo, podemos sustituir (12) y (13) en la ecuación (1), comprobando que efectivamente es una solución, siempre y cuando se cumpla que

$$\tan \phi = \omega RC = 2\pi f RC \quad (14)$$

$$V_C = \frac{V}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}. \quad (15)$$

Este es el llamado filtro pasa-baja: Para frecuencias bajas ($f \ll 1/RC$) la señal de salida (el voltaje V_C en el condensador) es aproximadamente igual a la de entrada V . Por el contrario, la salida tiende a cero para frecuencias altas ($f \gg 1/RC$).

4. Experimentos

4.1. Carga y descarga de un condensador

Montar el circuito de la figura 3. Calcular la constante de tiempo del sistema. En el generador de funciones, seleccionar una onda cuadrada, con una frecuencia y una amplitud pico a pico sencillas (por ejemplo 10 kHz y 6V). Ajustar los valores de R y C para que RC sea unas cinco o diez veces menor que el periodo $T = 1/f$. Dibujar un período completo de las señales de entrada y de salida. Dibujar también la señal de salida predicha por la ecuación 2. Observar y explicar el comportamiento de la señal de salida cuando se aumenta o se disminuye mucho la resistencia y/o la capacidad.

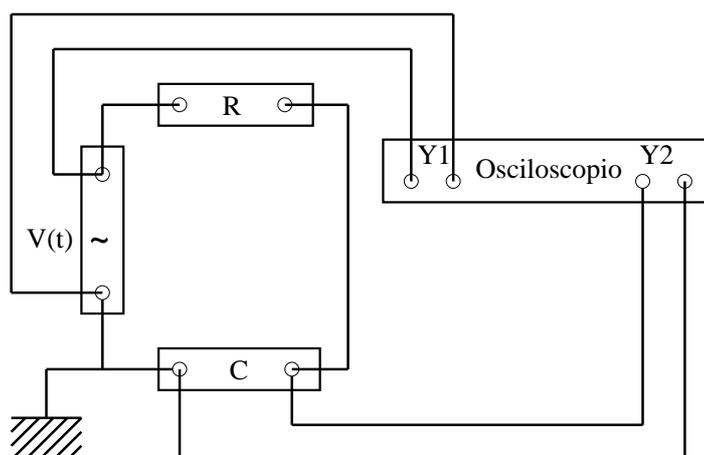


Figura 3: Circuito para las medidas de la carga y descarga de un condensador, de integradores, y de filtros.

4.2. Diferenciadores

Montar el circuito de la figura 4. En el generador de funciones, seleccionar una onda triangular con frecuencia y amplitud sencillas. Ajustar R y C para que RC sea unas cien veces menor que el periodo $T = 1/f$. Dibujar un período completo de las señales de entrada y de salida. Repetir el experimento para una señal de entrada sinusoidal. Calcular los valores “teóricos” de la amplitud de la señal de salida, dados por las ecuaciones (5) y (6), y compararlos con los valores medidos.

4.3. Integradores

Montar de nuevo el circuito de la figura 3. En el generador de funciones, seleccionar primero una onda cuadrada y después una sinusoidal, con frecuencia y amplitud sencillas. Ajustar R y C para que RC sea unas dos o tres veces mayor que el periodo $T = 1/f$. Dibujar un período completo de las señales de entrada y de salida. Calcular los valores “teóricos” de la amplitud de la señal de salida, dados por las ecuaciones (10) y (11), y compararlos con los valores medidos.

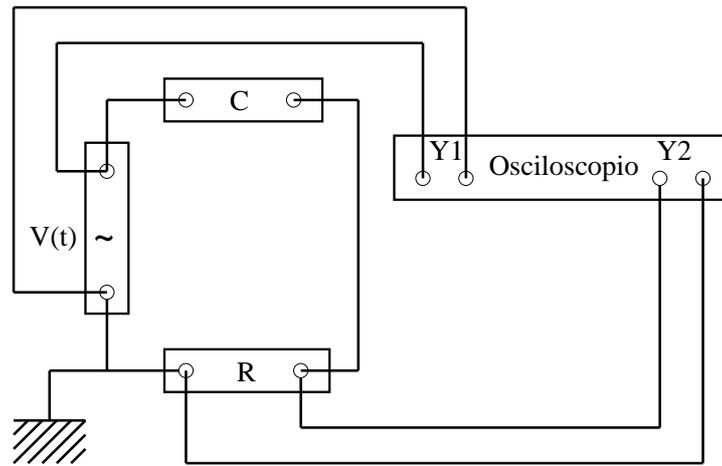


Figura 4: Circuito para la medida de diferenciadores.

4.4. Filtros

En el circuito de la figura 3, seleccionar una onda sinusoidal. Medir la amplitud de la señal de salida V_C en función de la frecuencia f de la señal de entrada, tomando algunos valores de f mucho menores y otros mucho mayores que $1/RC$. Calcular mediante la ecuación (15) los valores “teóricos” de $V_C(f)$. Representar gráficamente los valores medidos y calculados de $V_C(f)$.

5. Medidas

$R \pm \Delta R$ (Ω) =
$C \pm \Delta C$ (F) =
$V_{pp} \pm \Delta V_{pp}$ (V) =
$f \pm \Delta f$ (Hz) =
$RC \pm \Delta(RC)$ (s) =
$1/f \pm \Delta(1/f)$ (s) =

Cuadro 1: Datos medidos y calculados para la carga y descarga de un condensador.

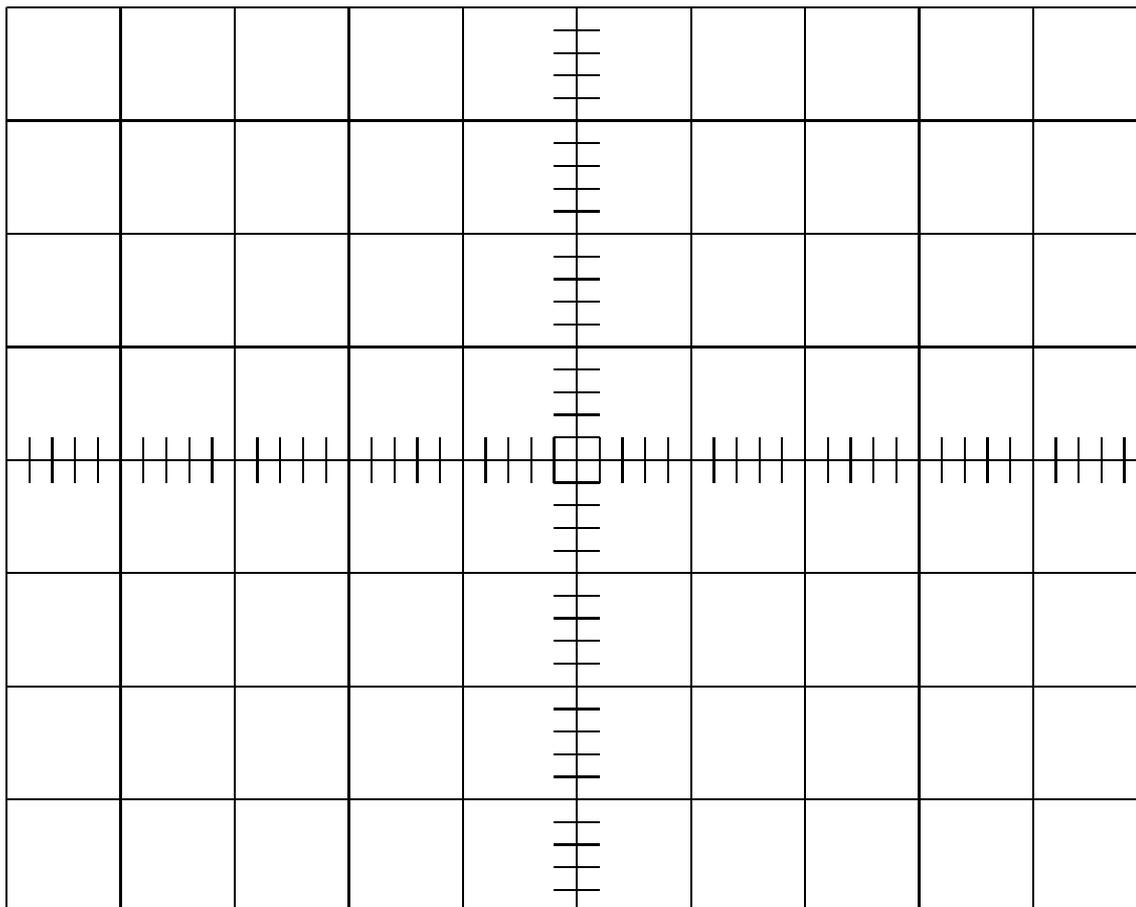
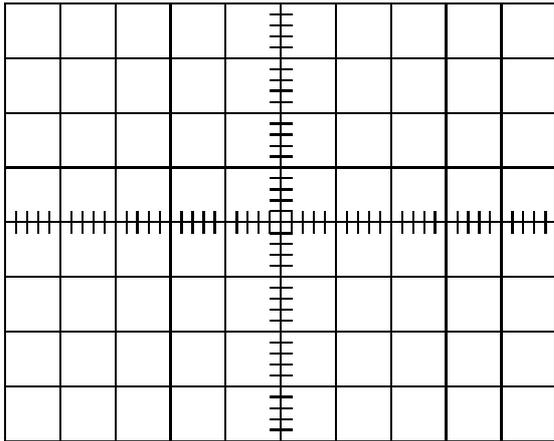
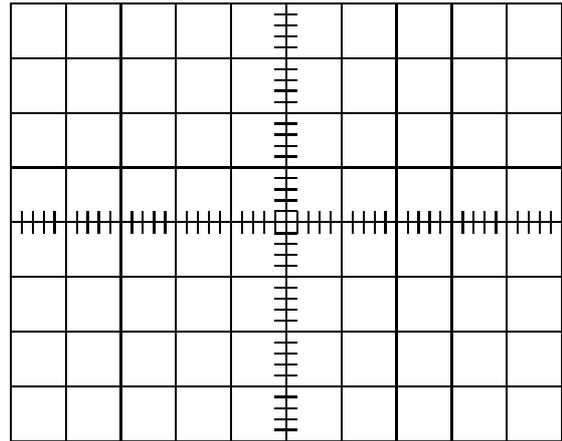


Figura 5: Señales de entrada y de salida observadas, y señal de salida predicha por la ecuación 2, durante la carga y descarga de un condensador. Dar valores a los ejes según los ajustes del osciloscopio.



Señal triangular

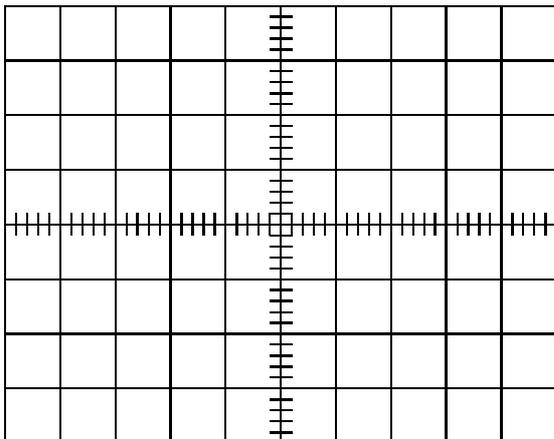


Señal sinusoidal.

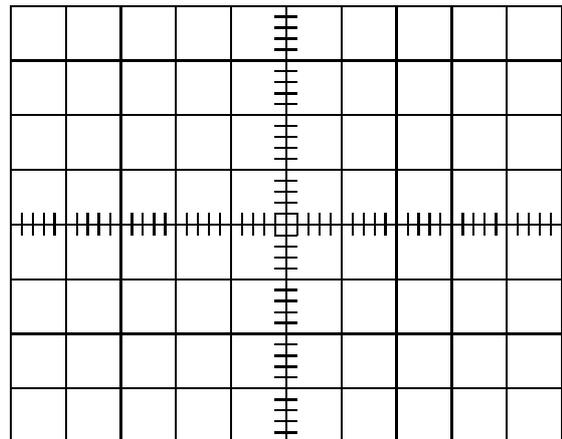
Figura 6: Señales de entrada y salida observadas para los diferenciadores.

Señal	Triangular	Sinusoidal
$R \pm \Delta R$ (Ω)		
$C \pm \Delta C$ (F)		
$f \pm \Delta f$ (Hz) =		
$V_{pp} \pm \Delta V_{pp}$ (V) =		
$V_{Rpp} \pm \Delta V_{Rpp}$ (V) (Exp.) =		
$V_{Rpp} \pm \Delta V_{Rpp}$ (V) (Teor.) =		

Cuadro 2: Datos medidos y calculados para los diferenciadores. El error ΔV_{Rpp} teórico puede posponerse al informe final.



Señal cuadrada



Señal sinusoidal.

Figura 7: Señales de entrada y salida observadas para los integradores.

Señal	Cuadrada	Sinusoidal
$R \pm \Delta R$ (Ω) $C \pm \Delta C$ (F) $f \pm \Delta f$ (Hz) = $V_{pp} \pm \Delta V_{pp}$ (V) = $V_{C_{pp}} \pm \Delta V_{C_{pp}}$ (V) (Exp.) = $V_{C_{pp}} \pm \Delta V_{C_{pp}}$ (V) (Teor.) =		

Cuadro 3: Datos medidos y calculados para los integradores. El error $\Delta V_{C_{pp}}$ teórico puede posponerse al informe final.

$R \pm \Delta R$ (Ω) = $C \pm \Delta C$ (F) = $RC \pm \Delta(RC)$ (s) = $V_{pp} \pm \Delta V_{pp}$ (V) =		
$f \pm \Delta f$ (Hz)	$V_{C_{pp}} \pm \Delta V_{C_{pp}}$ (V) (Exp.)	$V_{C_{pp}} \pm \Delta V_{C_{pp}}$ (V) (Teor.)

Cuadro 4: Datos medidos y calculados para el filtro pasa-baja. Los errores $\Delta V_{C_{pp}}$ teóricos pueden posponerse al informe final.