Electromagnetismo
Auxiliar: 27 de agosto, 2008

Método de Imágenes en Electrostática

Nuestro objetivo es calcular el campo electrostático en el espacio considerando la presencia de un conductor, que está expuesto a la presencia de una distribución de carga cuyo efecto en el conductor es una polarización de las cargas, es decir, las cargas de signo opuesto se disponen más cerca que las cargas del mismo signo que las de la distribución de carga que ponemos cerca del conductor. Sin embargo aún tenemos que el campo eléctrico en el conductor es cero:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})_{interior} = 0$$

Esto nos dice que el conductor es un volúmen equipotencial, ahora estamos interesados en el hecho que la superficie del conductor también lo es.

1 Condiciones de Borde

Las condiciones de borde que satisface el campo eléctrico al pasar de un medio 1 a un medio 2 son:

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$E_{//}^{(2)} = E_{//}^{(1)} \tag{2}$$

Donde $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$, $E_{//}$ es el campo tangencial a la interfaz de separación, σ es la densidad superficial de carga en la interfaz y $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la superficie de separacion entre los medios que apunta del medio 1 al medio 2. Noten que los campos cumplen estas ecuaciones sólo en la interfaz entre los medios.

Estas condiciones son más sencillas en el caso del potencial electrostático, dado que éste es derivable, entonces debe ser continuo al pasar de un medio a otro. En el caso de un conductor esto puede expresarse como:

$$V(\vec{r}_{interfaz})_{conductor} = V(\vec{r}_{interfaz})_{exterior} \tag{3}$$

2 Problema Electrotático

Como se ha visto el campo eléctrico, no es otra cosa que la solución a la ecuación de Gauss, equivalentemente a la ecuación de Poisson en términos del potencial. Esto es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

Cualquiera de estas ecuaciones mas las <u>condiciones de borde</u> determinan el campo eléctrico en forma <u>ÚNICA</u>. La demostración de estas cosas puede hallarse en cualquier texto de electromagnetismo, y les sugiero que las miren.

3 Argumentos del método de imágenes

Como mencionamos antes, dado que la solución a la ecuacion de Poisson es única, si obtenemos una solucion $V(\vec{r})$ por cualquier medio(incluso adivinando), éste potencial será el que buscamos. Si la densidad superficial de carga inducida en la superficie del conductor es σ y el potencial surgido de la densidad de carga que se sitúa cerca del conductor (y que indujo la densidad σ en él) es $V_1(\vec{r})$, entonces el potencial en el exterior del conductor(puesto que en el interior es constante) es:

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r}')dS'}{\| \vec{r} - \vec{r}' \|} \tag{6}$$

Entonces, el método de imágenes no es otra cosa que adivinar en forma inteligente la forma que adopta la integral en (6). Para hacerlo usamos el hecho de que el potencial $V_1(\vec{r})$ satisface la ecuación de Poisson y propondremos que la integral tendrá la misma forma que la función V_1. Esto equivale a agregar distribuciones de carga imaginarias al problema. Estas cargas imaginarias tendrán, en general, la forma de la carga real fuera del conductor, es decir, si la carga real es una carga puntual será razonable poner cargas "imágenes" puntuales, si la carga real es lineal(como un alambre cargado) será mas razonable poner cargas lineales, etc. **Es importante que las cargas imágen estén colocadas en una región del espacio diferente de aquella en la que calculamos el potencial o campo electrostático, puesto que si estuvieran allí, cambiaríamos la forma de la ecuación de Poisson.**
Así la tarea del método de imagen será con estas cargas imágen construir superficies equipotenciales

4 Problema #1

Consideremos una carga puntual q colocada cerca de un plano conductor a una distancia d y calculemos el potencial electrostático en la región donde está colocada la cara q.

Sea el plano conductor conectado a tierra, tal que coincide con el plano yz, y supongamos que la carga está en el eje x a la distancia d del origen. Consideremos un punto P con coordenadas (x, y, z) en el semiespacio con $x > 0$ que es donde nos interesa calcular el potencial. Si nos fijamos el potencial se ajusta al descrito por la ecuación (6). Entonces, para resolver usaremos el método que describimos antes. Pondremos una carga q' imágen a una distancia $-d$‘ del origen, sobre el eje x pues es la simetría más simple(notar que hemos puesto la carga imagen en la parte del espacio en la cual no estamos calculando el potencial.[1] Las distancias r_1 y r_2 desde la carga real e imaginaria al punto P respectivamente, están dadas por las fórmulas geometricas:

$$r_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2} \tag{7}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2} \tag{8}$$

Entonces el campo en la region de estudio(region donde $x > 0$) es:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \tag{9}$$

[1] Les recomiendo que se vayan haciendo el dibujito

Ahora imponemos la condicion de borde sobre el plano $x = 0$, donde se anula el potencial. esto es:

$$V(x = 0, y, z) = 0$$

De esta información debemos obtener valores para q' y d', noten que en general como hay menos ecuaciones que incognitas, pueden haber varias soluciones para estos valores. Nos interesan valores que localicen a la carga imagen fuera de la region del calculo, entonces descartamos valores de d' que situen la carga imagen en el lado positivo del eje x. Es simple ver que en este caso debemos tomar:

$$q' = q \tag{10}$$

$$d' = d \tag{11}$$

Con lo que se satisfacen las condiciones de borde en $x = 0$. con lo cual podemos escribir nuestro potencial para el espacio en estudio:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}\right] \tag{12}$$

Ahora calculemos la densidad de carga superficial inducida en el conductor. De (1) podemos ver que esta dada por:

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x \mid_{x=0} \tag{13}$$

$$\sigma(y, z) = -\epsilon_0 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=0} \tag{14}$$

$$\sigma(y, z) = \frac{-qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{15}$$

Podemos integrar en todo el plano yz para obtener la carga total, la cual resulta algo sospechado...

$$Q_{inducida} = \int \sigma(y, z) dydz = -q \tag{16}$$

5 Problema #2

Consideremos esta vez una esfera conductora de radio R, conectada a tierra y centrada en el origen de coordenadas. Sobre el eje z se coloca una carga q a distancia a medida desde el origen.

Consideremos un punto P de coordenadas (r, θ, ϕ) en el espacio exterior a la esfera, que es donde queremos calcular el campo electrico y/o potencial electrostático. Resolveremos este problema usando una carga imagen situada a una distancia b arbitraria sobre el eje z que a priori estara entre el centro de la esfera y la carga real, cosa que deberá verificar el valor de b a encontrar. Denominamos r_1 y r_2 a las distancias entre la carga imagen y el punto P y entre la carga q y el punto P respectivamente. Geométricamente, usando la ley del coseno, obtenemos las relaciones entre estas distancias y las coordenadas del punto P:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta} \tag{17}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta} \tag{18}$$

Con esto el campo queda descrito por el potencial:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r_1}\right] \tag{19}$$

Ahora imponemos la condicion de borde sobre la superficie de la esfera, de forma de construir la superficie equipotencial:

$$V(r = R, \theta, \phi) = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{a\sqrt{\frac{R}{a}^2 + 1 - 2\frac{R}{a}\cos\theta}} + \frac{q'}{R\sqrt{1 + \frac{b}{R.}^2 - 2\frac{b}{R}\cos\theta}}\right] \tag{20}$$

Donde obtenemos los valores mas simples que satisfacen la ecuacion anterior y que son validos, esto es especificamente que el valor de b es menor que el radio de la esfera, cosa que debemos exigir para que el método sea válido(ver detalles del principio). Estos valores son:

$$b = \frac{R^2}{a} \tag{21}$$

$$q' = -\frac{R}{a}q \tag{22}$$

De esta forma el campo está dado por el potencial, valido fuera de la esfera:

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\frac{R^2}{a})^2 - 2r(\frac{R^2}{a})\cos\theta}}\right] \tag{23}$$

La fuerza de interacción entre la carga y la esfera será por tanto la misma que la interaccion entre la carga y la carga imagen, por lo que esta esta dada por:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2Ra}{(a^2 - R^2)^2} \tag{24}$$

Ahora notemos que podemos relajar la condición de que la esfera este conectada a tierra, imponiendo otra carga imagen en el centro de la esfera, que por simetria generará una superficie equipotencial en $r = R$, supogamos que la condicion de borde es $V(r = R) = V_0$; entonces bastara agregar al potencial obtenido un término $\frac{V_0 R}{r}$, resultando:

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\frac{R^2}{a})^2 - 2r(\frac{R^2}{a})\cos\theta}}\right] + \frac{V_0 R}{r} \qquad (25)$$

Dejo propuesto calcular la densidad superficial de carga como en el problema anterior e integrarla para encontrar la carga inducida total.Tambien les recomiendo calcular la fuerza de interaccion integrando la densidad de carga, y verificar que el resultado es el mismo anterior. Finalmente, les insto a hacer los dibujos que no he tenido tiempo de incluir.

6 Comentarios Finales

Una buena explicacion del metodo de imagenes, que sera util tambien para medios dielectricos, esta expuesta en el libro "Fundamentos de la Teoria Electromagnetica" de autores Reitz y Milford. Noten que aqui solo se ha usado una carga imagen puntual, pero habitualmente en ejemplos mas complicados se usan varias y estas no tienen que ser necesariamente puntuales, como expliqué al comienzo.