Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 22
Campos Variables en el Tiempo I

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Repaso
- Flujo magnético
- Ley de Faraday-Lenz
- Modificacion 3ª ecuación de Maxwell
- Principio del generador

Repaso

Equilibrio electrostático de las cargas
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iiint_{\Omega}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\rho(\vec{r}\,')dv' \qquad \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

1ª Ecuación de Maxwell $\nabla\bullet\vec{D}=\rho$

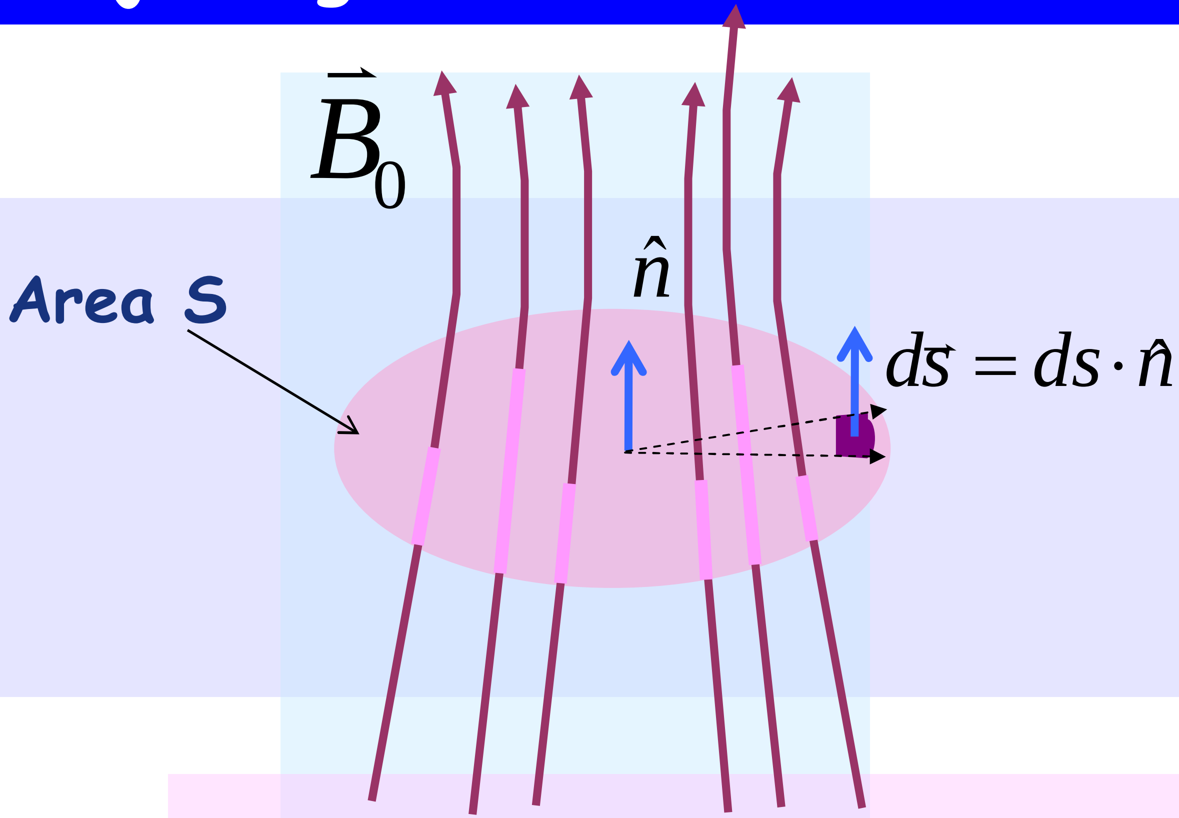
2ª Ecuación de Maxwell $\nabla\times\vec{E}=0$

Equilibrio dinámico de las corrientes
$$\vec{B}=\oint_{\Gamma'}\frac{\mu_0 I d\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \qquad \vec{B}=\mu_R\mu_0\vec{H}$$

3ª Ecuación de Maxwell $\nabla\cdot\vec{B}=0$

4ª Ecuación de Maxwell $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$

Flujo magnético

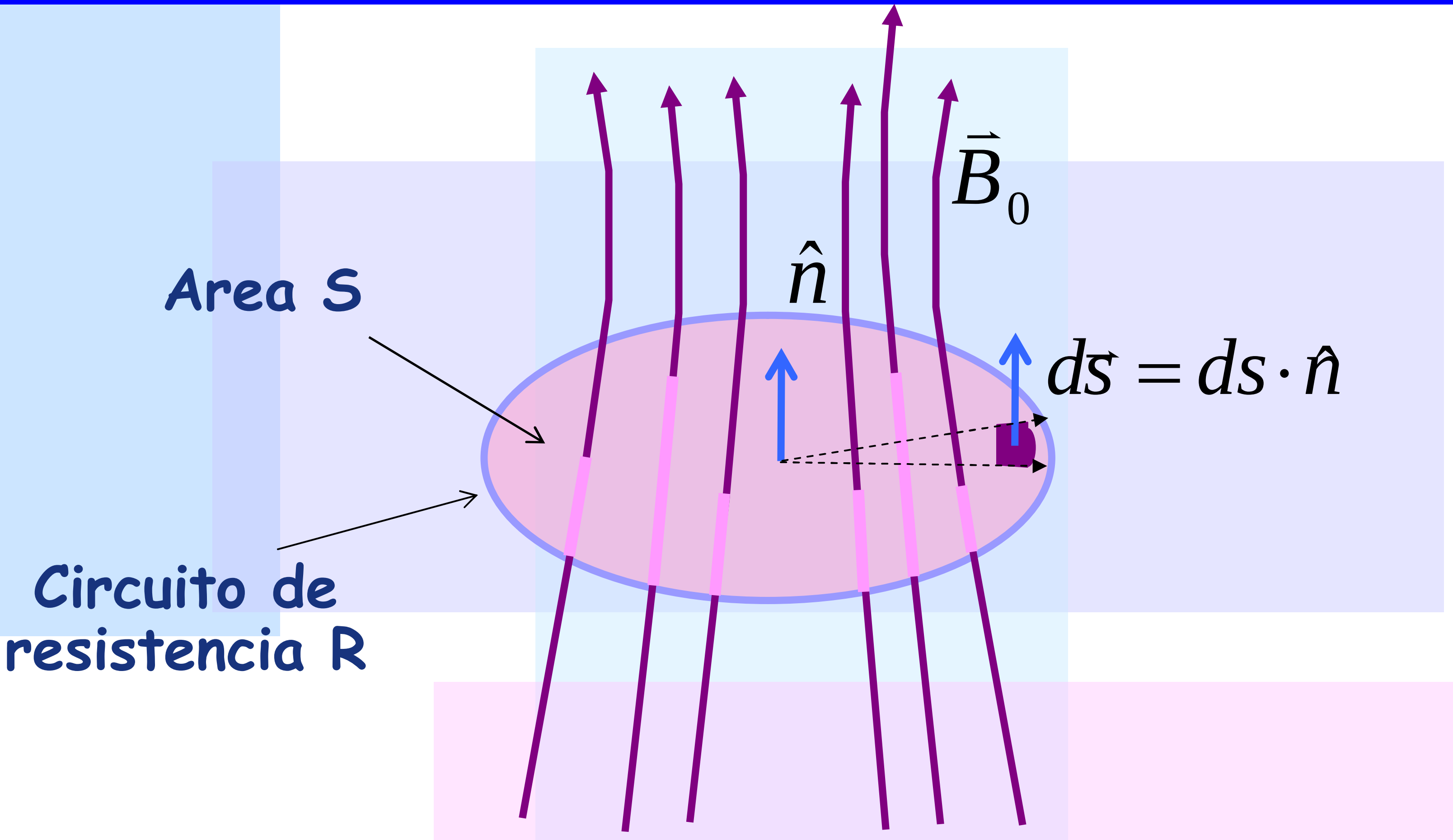


Flujo del campo magnético a través de área S

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$

$$[\phi] = \left[Tesla \times m^2\right]$$

Flujo magnético en un circuito

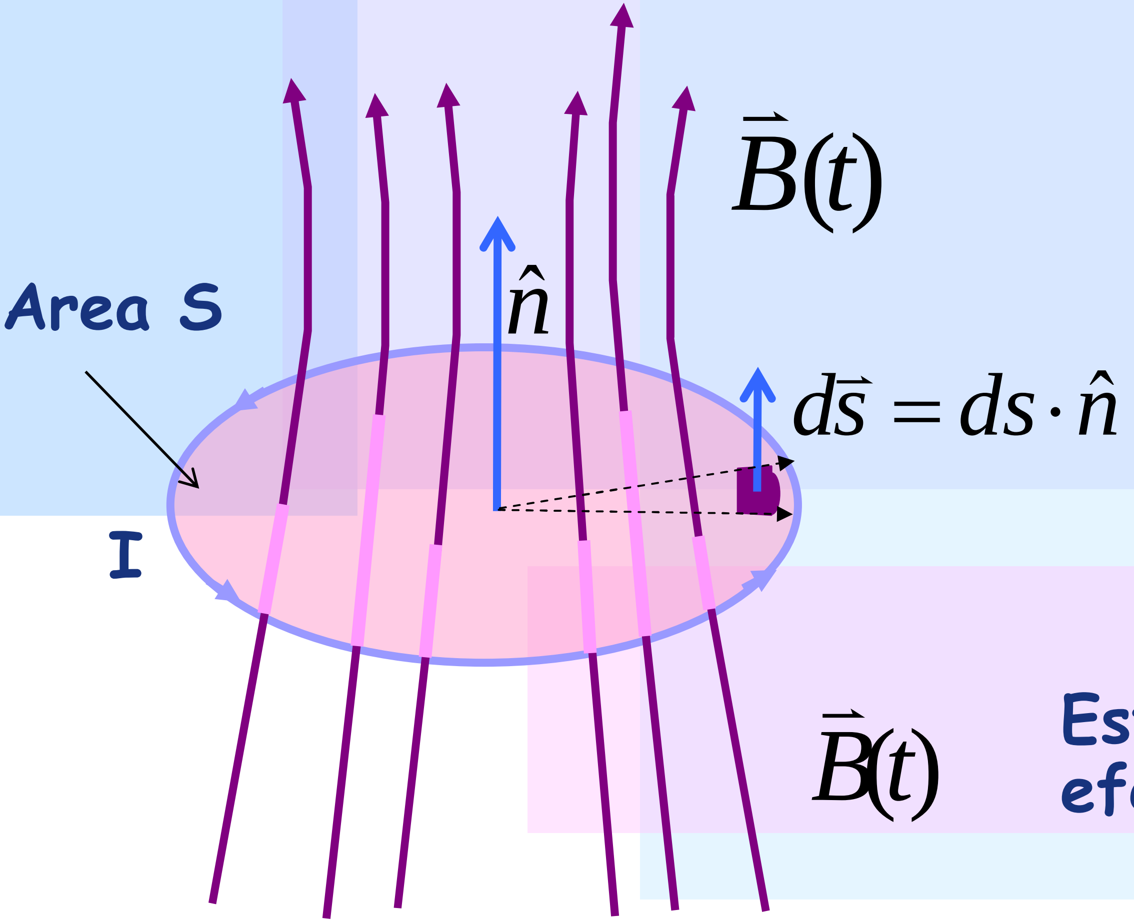


Flujo del campo magnético a través del circuito $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$

Ley de Faraday-Lenz

Se encuentra experimentalmente que si $\vec{B} = \vec{B}(t)$ entonces aparece una corriente I dada por la relación

$$I = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{1}{R}$$



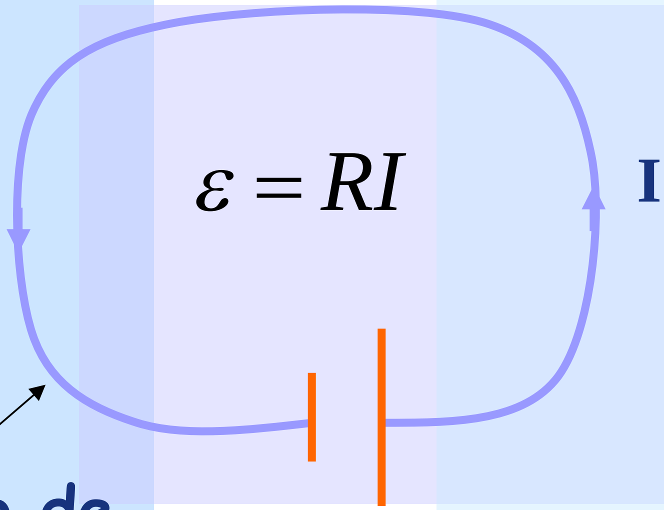
donde

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$

$\vec{B}(t)$ Este campo incluye el efecto de la corriente I

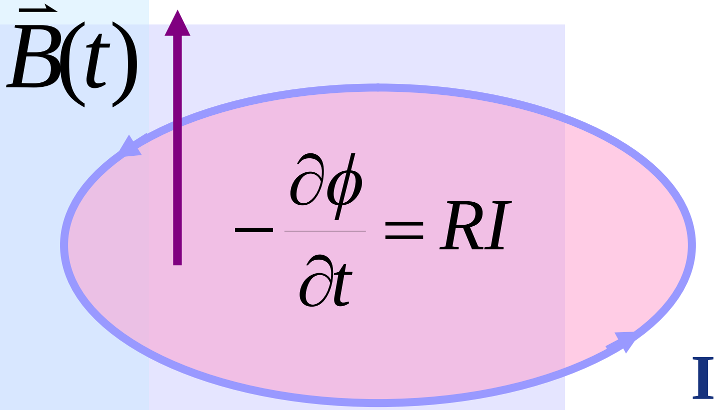
Ley de Faraday-Lenz

Recordemos que para un circuito resistivo se cumple $\varepsilon = RI$



Circuito de resistencia R

Fem del circuito



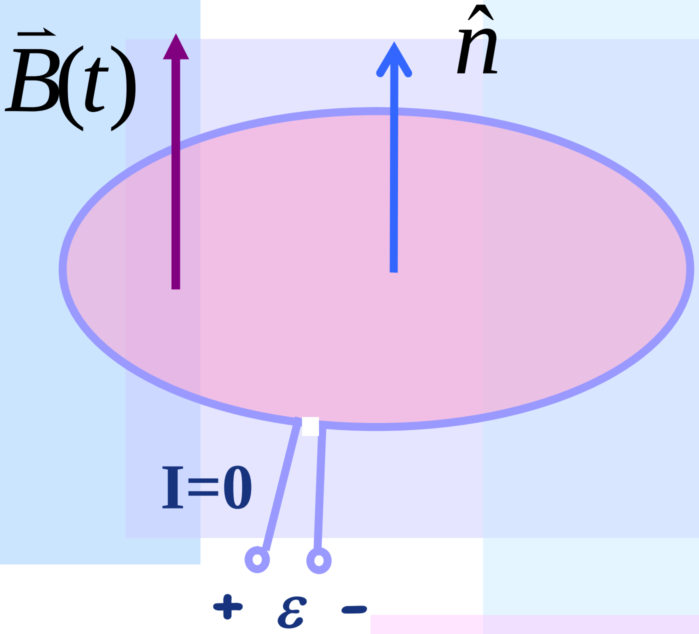
Un campo magnético variable genera o induce un FEM dada por la expresión

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

LEY DE FARADAY-LENZ

Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM



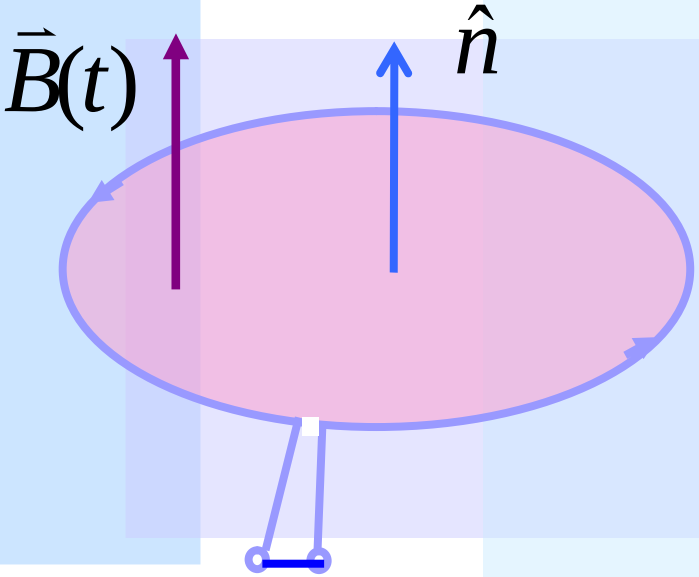
$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

Notar que si el flujo es variable en el tiempo la fem se induce independiente de la corriente I

Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM



$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

$$\varepsilon = RI \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R}$$

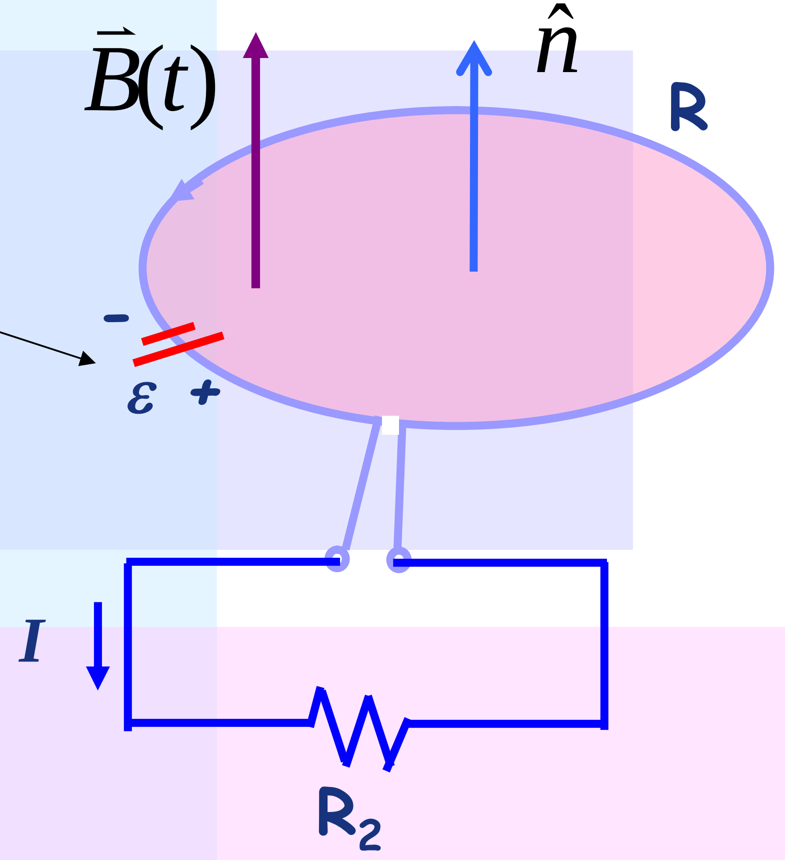
Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM

La FEM inducida “aparece” en el circuito con campo variable

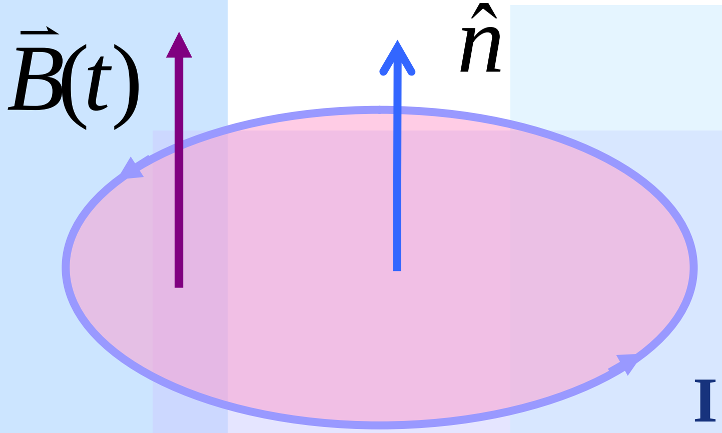
$$\phi = \iint_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{s}$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$



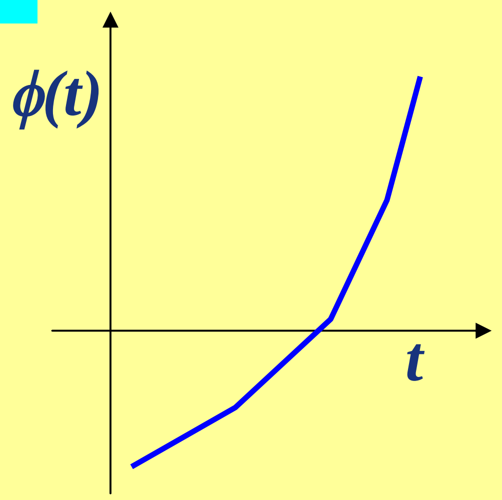
$$\varepsilon = (R_2 + R)I \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R_2 + R}$$

Ley de Faraday-Lenz

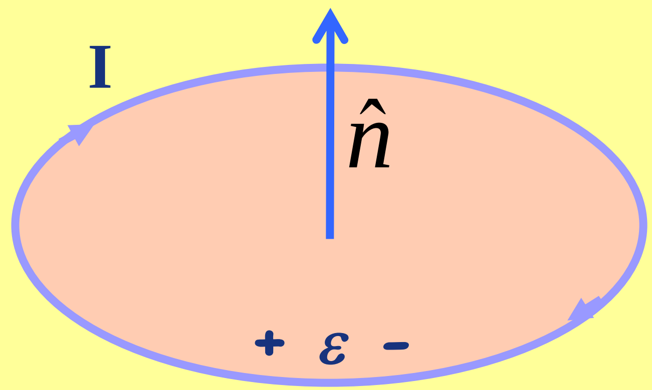


$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$ con $$\phi = \iint_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{s}$$

Si

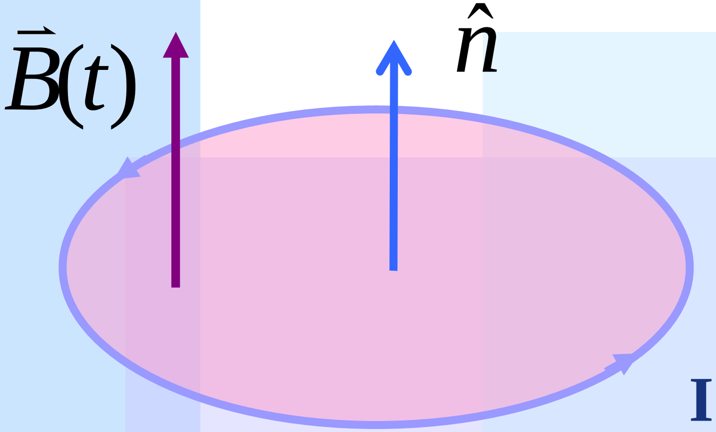


$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$$



$\vec{B}$ crece $\Rightarrow$ Corriente genera campo opuesto al crecimiento

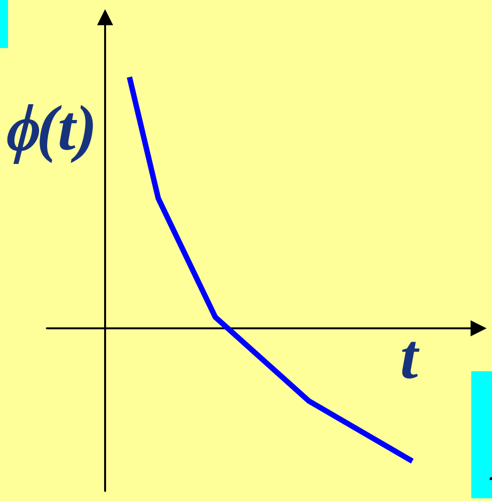
Ley de Faraday-Lenz



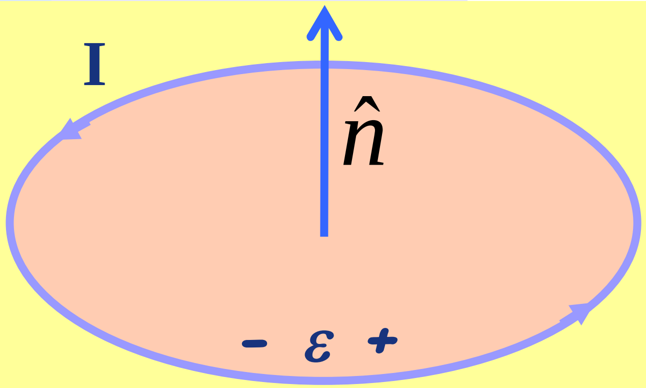
$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

Si



$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$

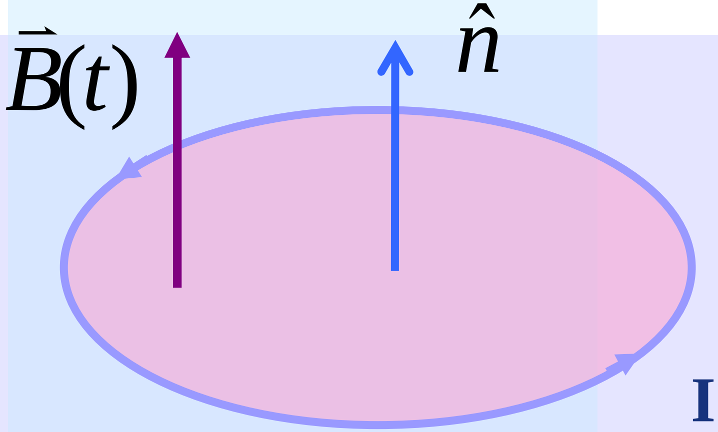


$\vec{B}$ decrece $\Rightarrow$ Corriente genera campo opuesto al decrecimiento

Ley de Faraday-Lenz

Un flujo magnético variable genera o induce un FEM

$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$



$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

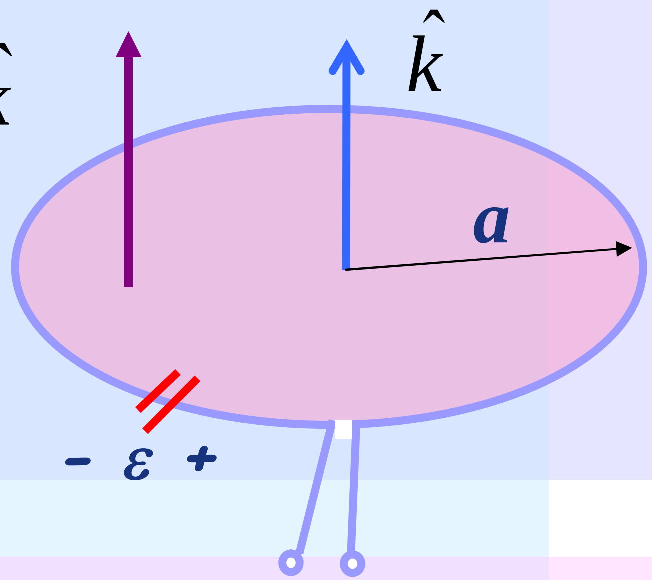
Notar que un flujo variable en el tiempo se puede lograr de dos formas:

- Con un campo variable *B(t)*
- Con una superficie variable *S(t)*

Ejemplo 1

Flujo variable producido por un campo variable *B(t)*

Si $\vec{B}(t) = B_0 e^{-t/\tau}\hat{k}$



$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi(t) = B_0 e^{-t/\tau} \pi a^2$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Ejemplo 2

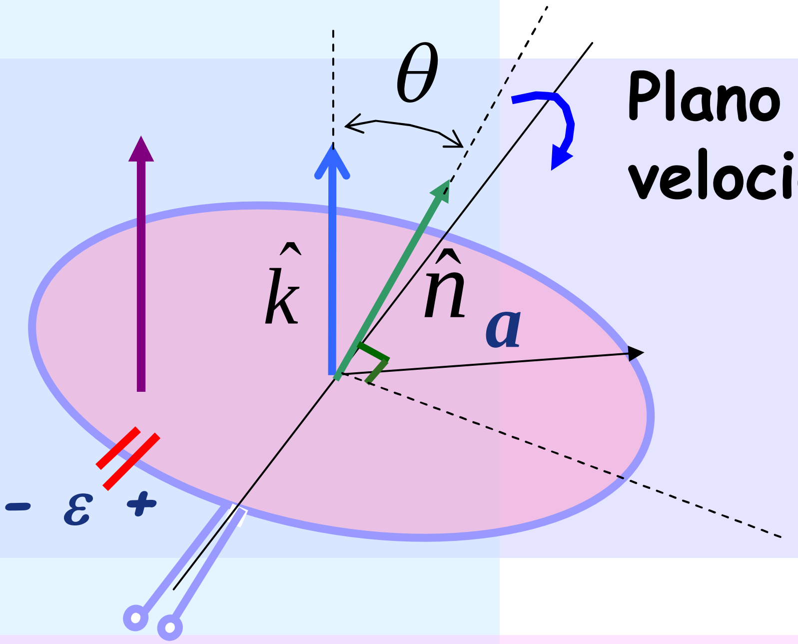
Area variable en el tiempo produce *B(t)*

Si $\vec{B}(t) = B_0 \hat{k}$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi(t) = B_0 A \cos\theta$$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

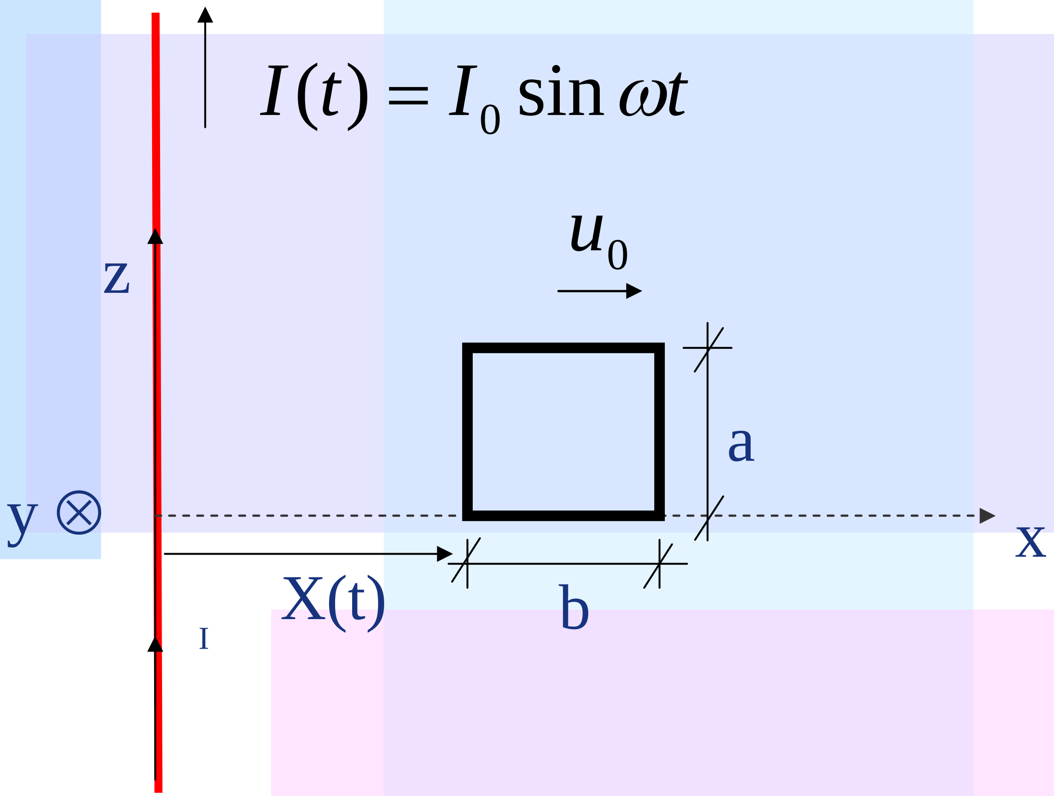


Plano gira a velocidad ω

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon(t) = A B_0 \omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

Ejemplo 3

Area variable en el tiempo y campo variable *B(t)*

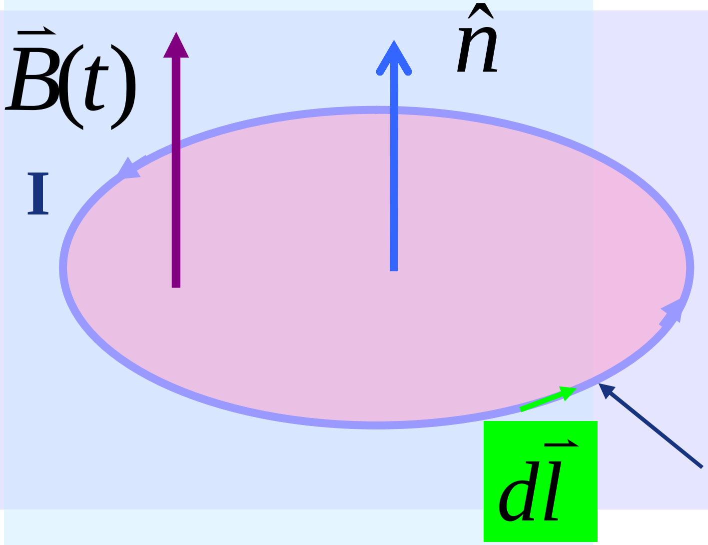


Calcular la fem inducida en el circuito cuadrado si se mueve con velocidad u_0 constante

Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

Un campo magnético variable genera o induce una FEM

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



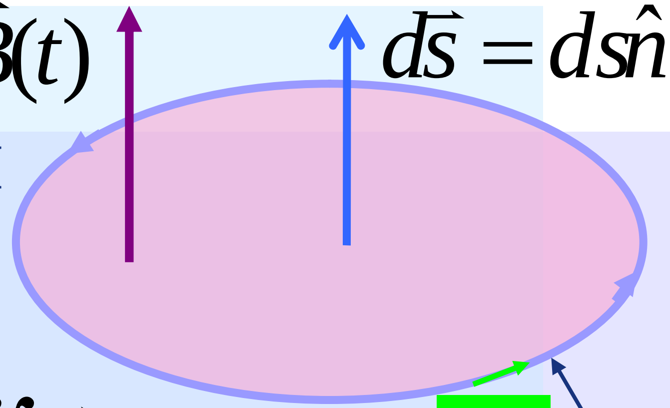
$$\varepsilon = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \oint_{(c)} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} \quad \Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s}$$

Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\varepsilon = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \bullet d\vec{s}$$

Válido $\forall$ S

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2ª Ecuación de Maxwell

Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2ª Ecuación de Maxwell

Dado que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

y usando $\nabla \times \left(\nabla V\right) = 0$

Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

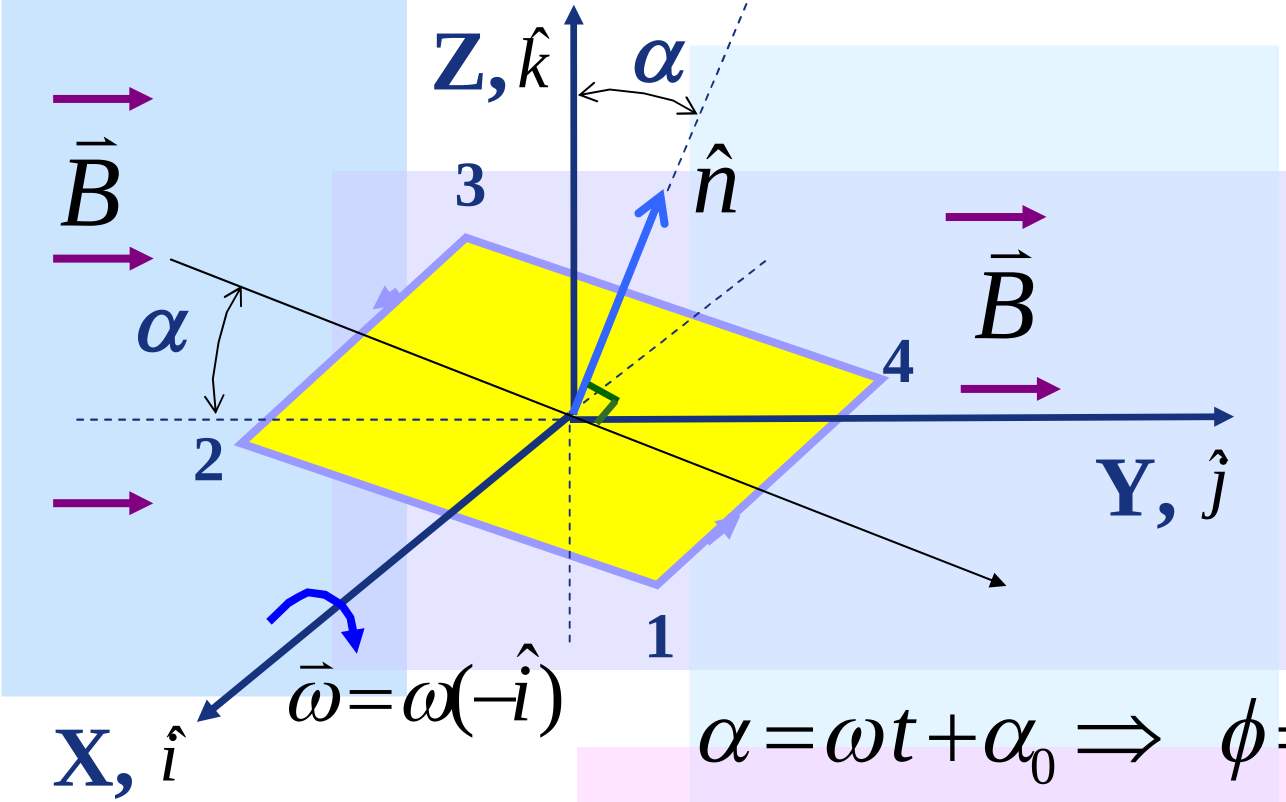
$$\Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Origen electrostático

$$\vec{E} = \overbrace{-\nabla V} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Debido a campo magnético variable en el tiempo

Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

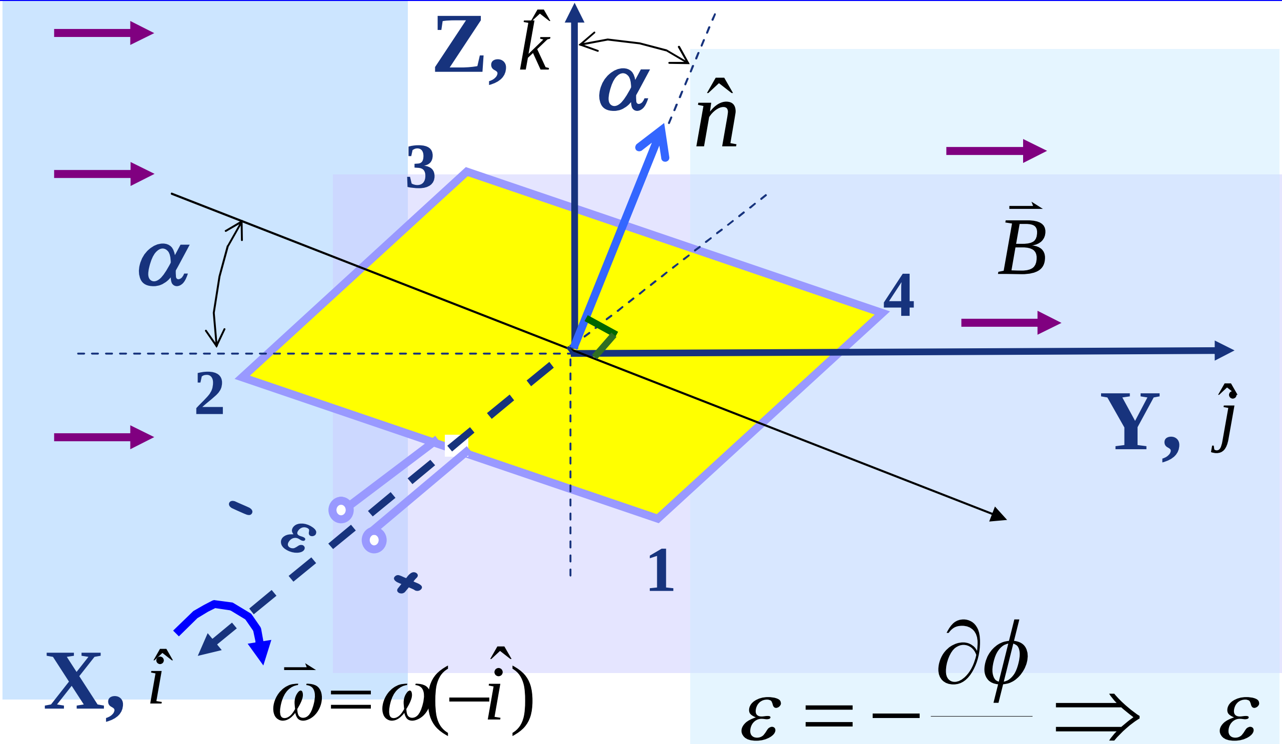
$$\phi = BA \sin\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \phi = BA \sin(\omega t + \alpha_0)$$

Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon = B\omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$

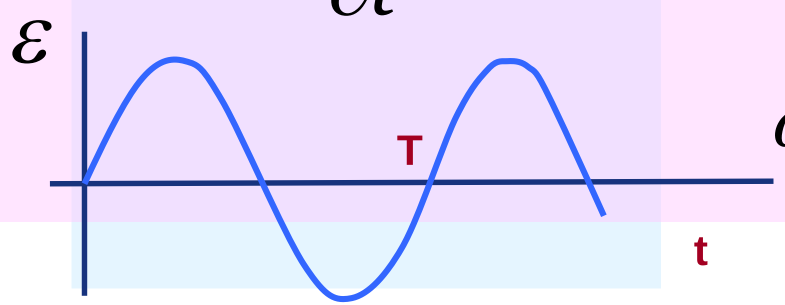
Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

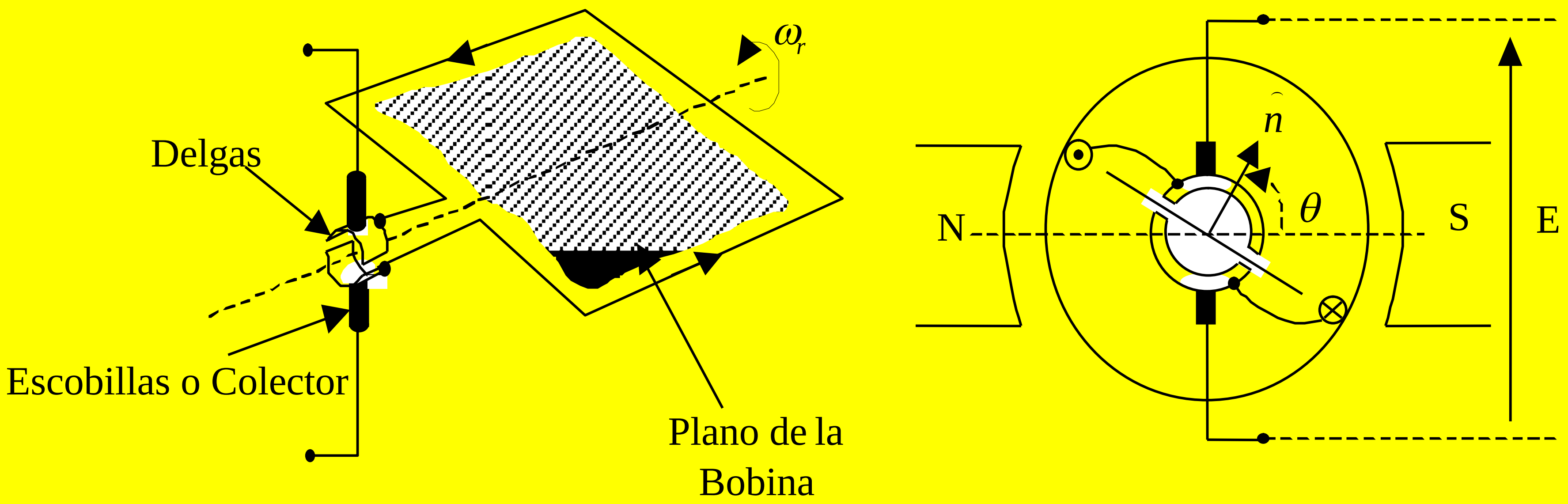
$$\phi = B \sin\alpha$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = B\omega\cos(\omega t + \alpha_0)$$

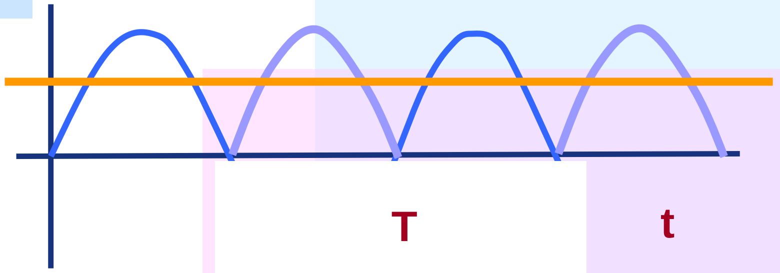


$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

Principio del generador de Corriente Continua

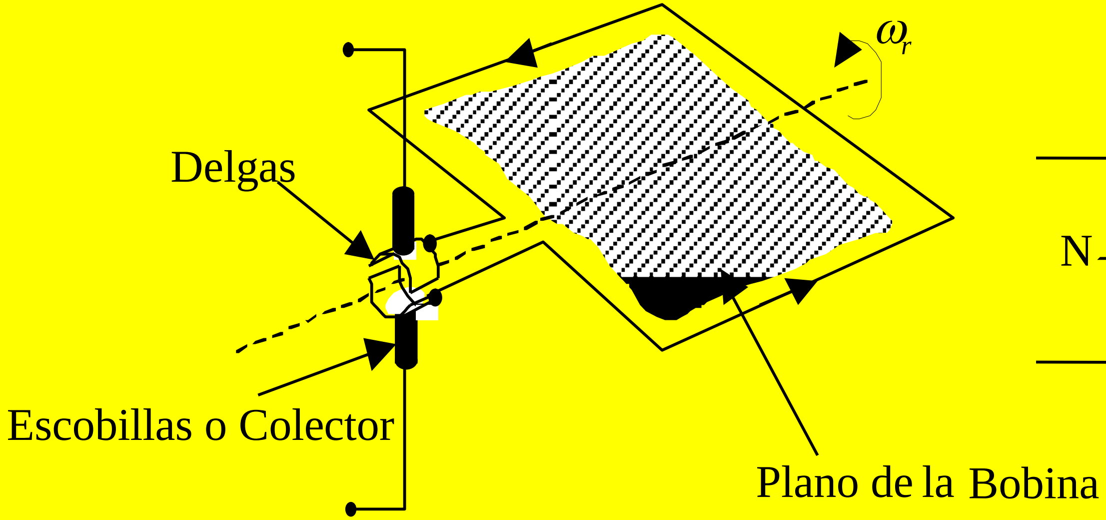


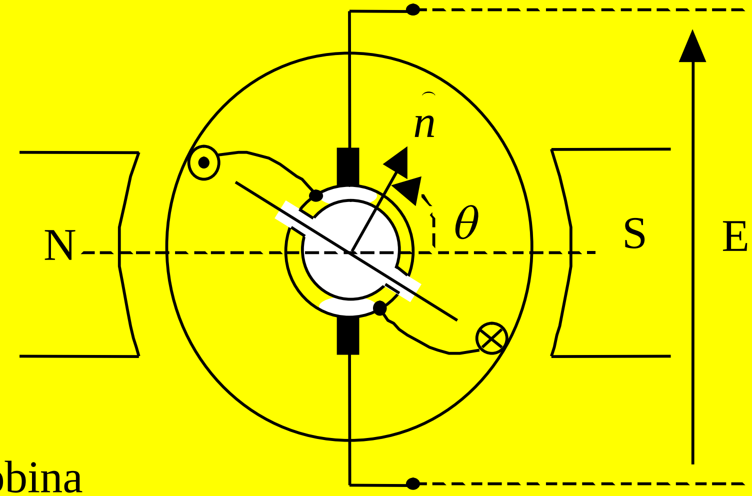
Valor medio no nulo

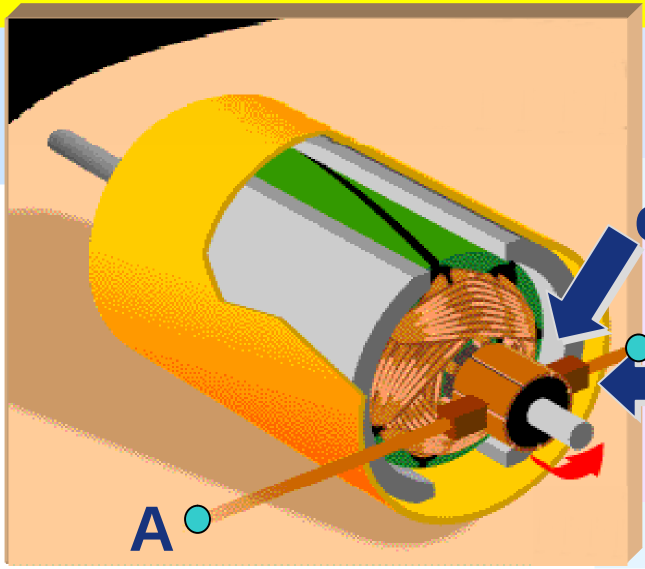


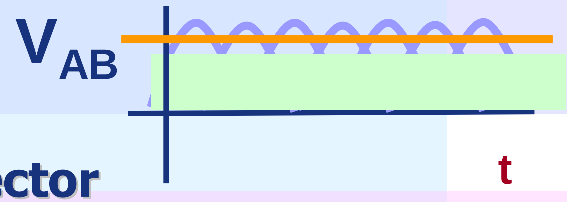
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

Generador de Corriente Continua









Colector real