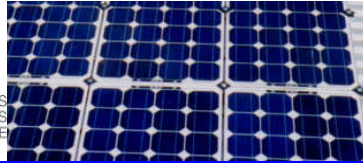




fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO

Clase 21

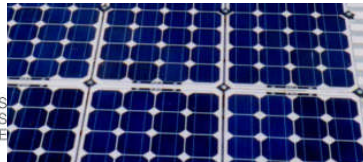
Magnetostática VI

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



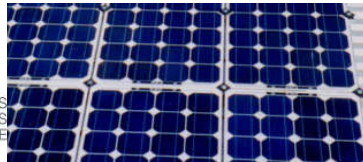
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



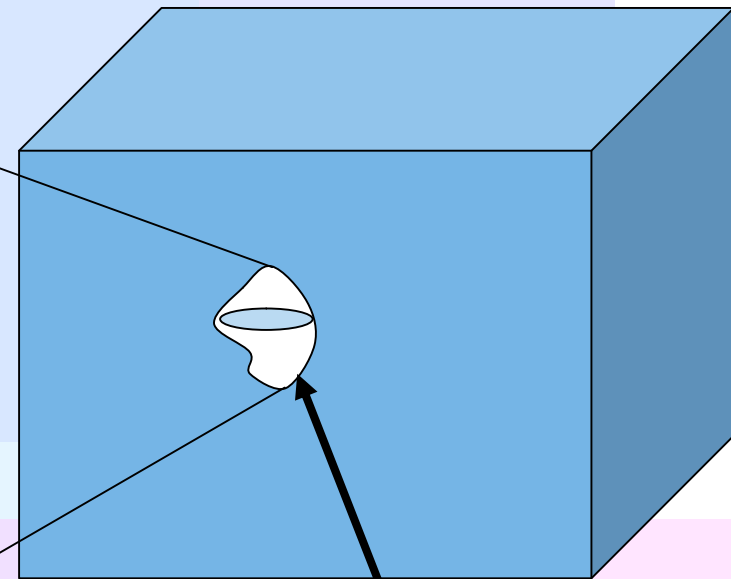
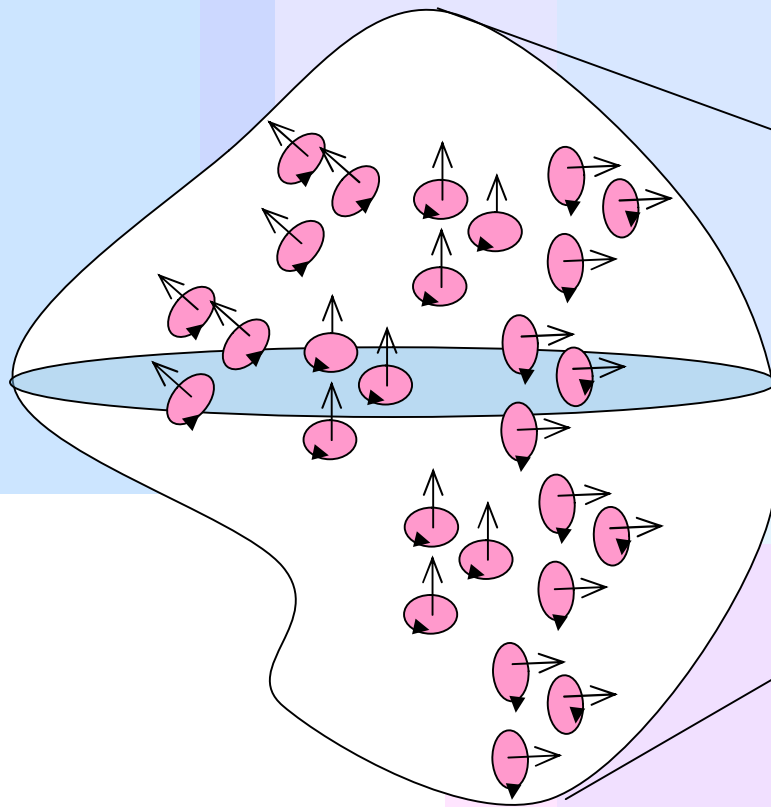
INDICE

- Repaso
 - Corrientes de Magnetización
 - Permeabilidad Magnética
 - Clasificación de materiales magnéticos
- Condiciones de borde

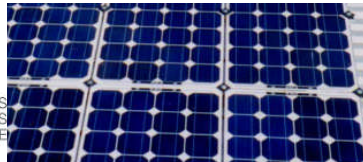


Modelo atómico de los materiales

En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (átomos)



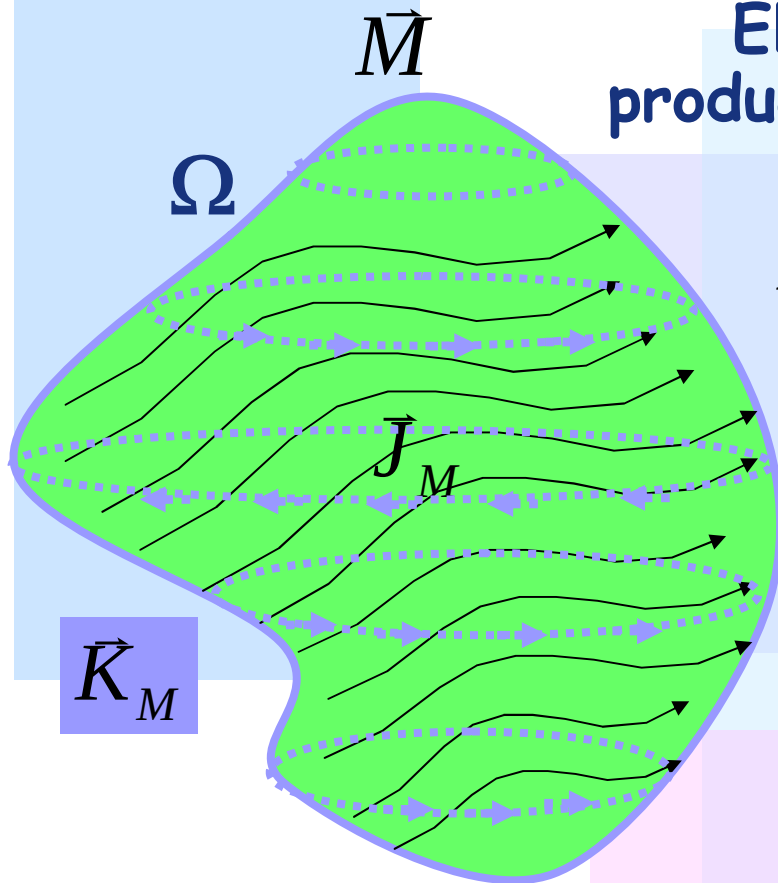
**Trozo infinitesimal
de material**



Corrientes de Magnetización

El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente de superficie}}$$

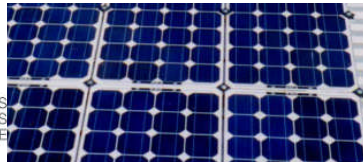


Potencial
producido
por una
densidad de
corriente
en volumen

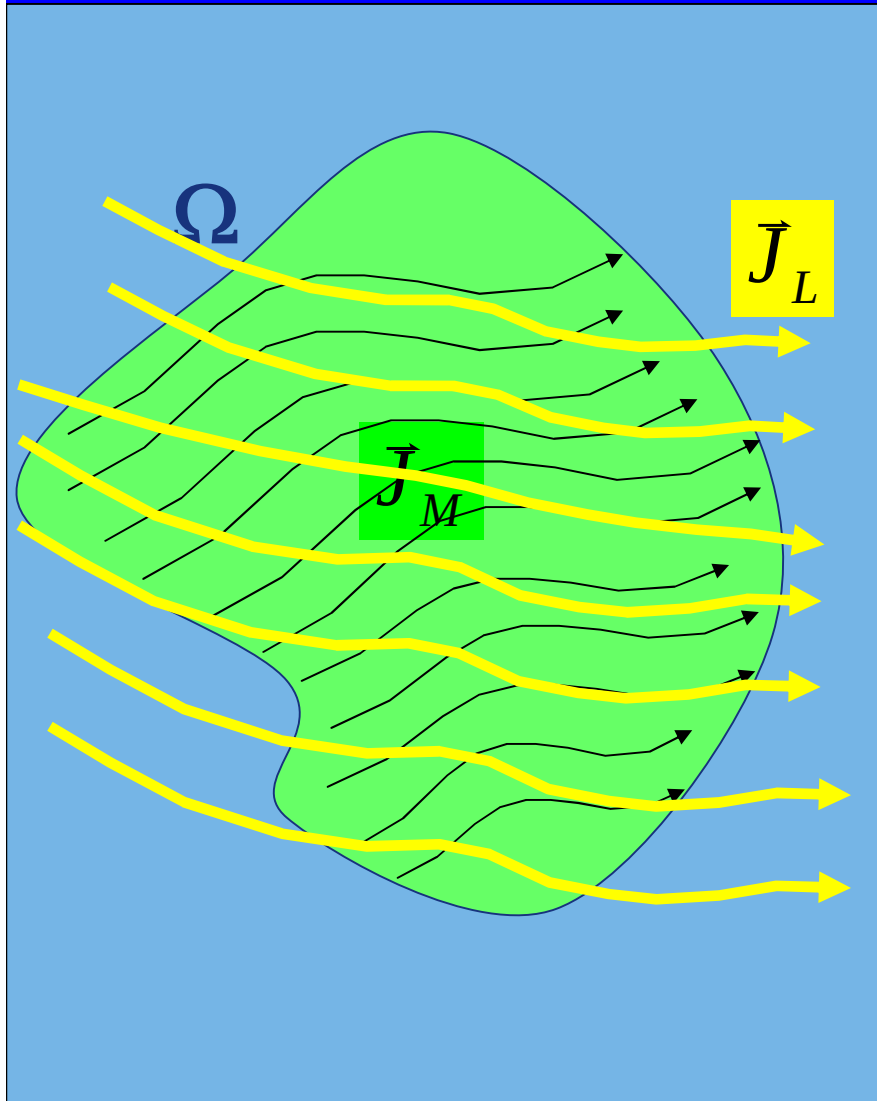
Potencial
producido
por una
densidad de
corriente de
superficie

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}$$



Permeabilidad magnética



$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Experimentalmente se encuentra que $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

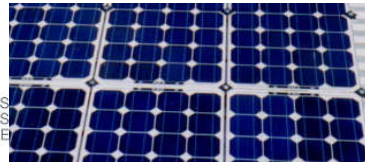
$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

μ_R permeabilidad relativa del material

$$\therefore \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Permeabilidad magnética del material

$$\mu = \mu_R \mu_0$$



Ejemplo

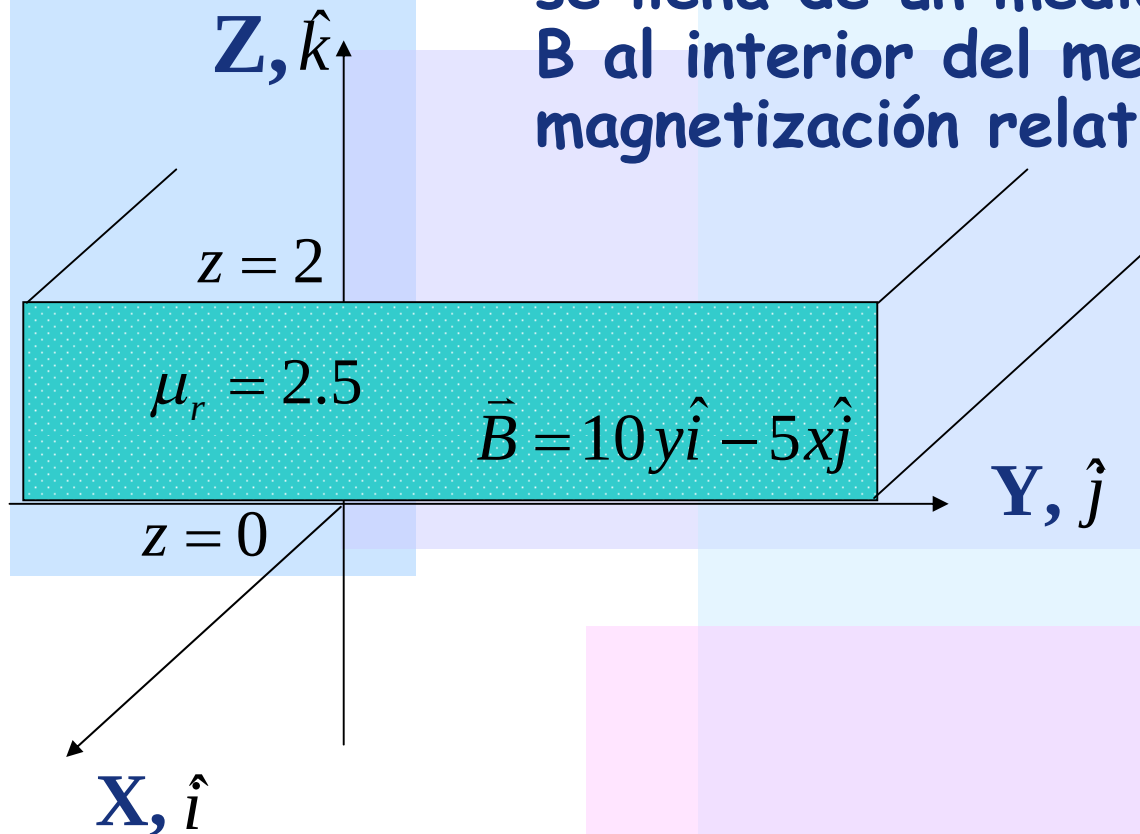
Una región del espacio definida por $x < 0$ se llena de un medio magnetizado. Dados $\vec{B}$ al interior del medio y la constante de magnetización relativa se pide

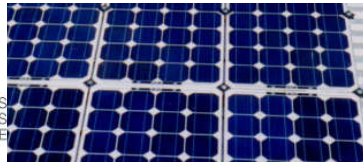
$$\vec{M} = ?$$

$$\vec{J}_M = ?$$

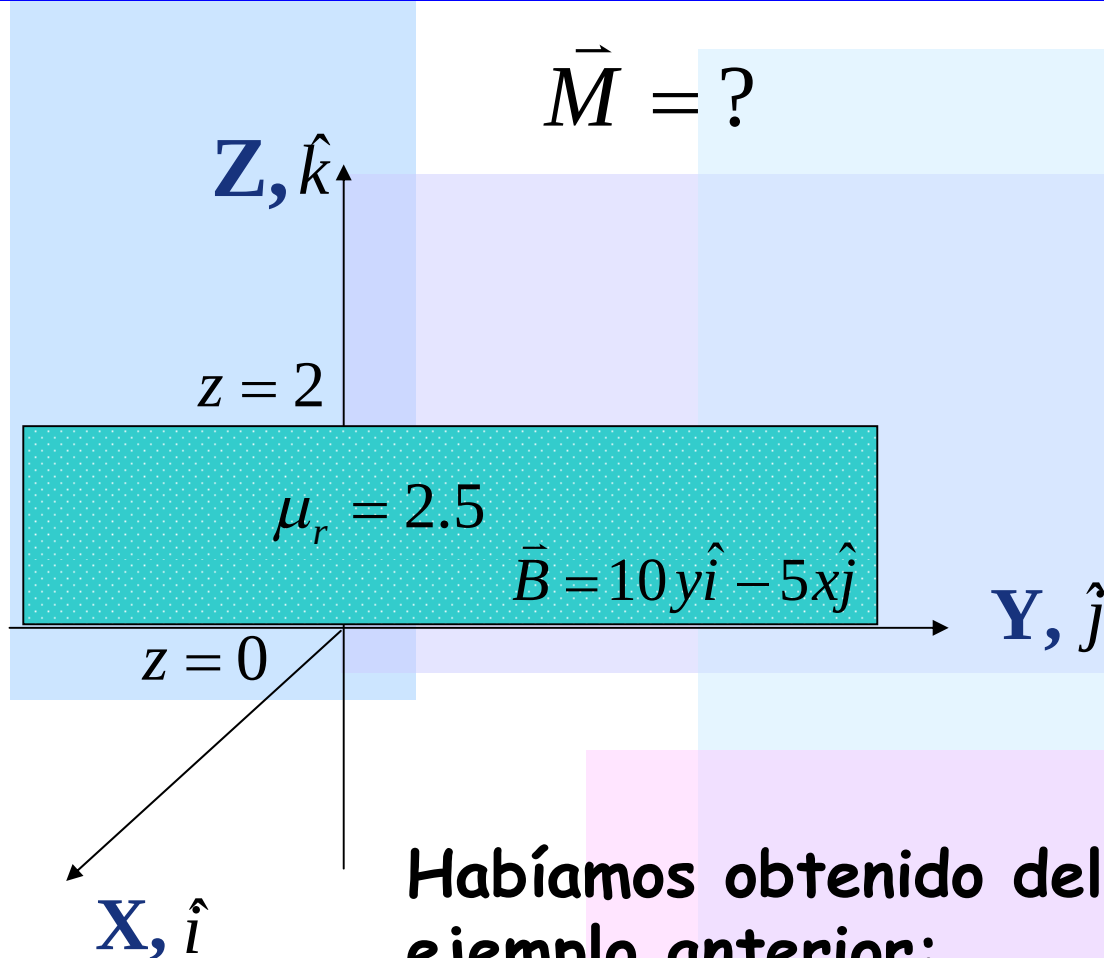
$$\vec{K}_M = ?$$

$$\vec{J}_L = ?$$





Ejemplo



$$\vec{M} = ?$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

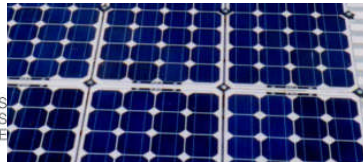
$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \mu = \mu_R \mu_0$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu} = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) \vec{B}$$

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) (10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

Habíamos obtenido del ejemplo anterior:

$$\vec{M} = 10M_0y\hat{i} - 5M_0x\hat{j} \Rightarrow M_0 = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right)$$



Ejemplo

Diagram illustrating the magnetic field and vector potential in a region with a magnetic material slab.

The region is defined by a slab of magnetic material with permeability $\mu_r = 2.5$ located between $z = 0$ and $z = 2$. The coordinate system is defined by $\mathbf{X}, \hat{i}$ (horizontal), $\mathbf{Y}, \hat{j}$ (vertical), and $\mathbf{Z}, \hat{k}$ (out of the page).

The magnetic field vector $\vec{B}$ is given by:

$$\vec{B} = 10y\hat{i} - 5x\hat{j}$$

The vector potential $\vec{M}$ is defined by the curl of $\vec{B}$:

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n} \quad \vec{M} = \left(\frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) (10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x \hat{i} + M_y \hat{j}$$

The unit normal vector $\hat{n}$ is defined by the boundary conditions:

$$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{k} & \text{en } z = 0 \\ \hat{k} & \text{en } z = 2 \\ \hat{i} & \text{en } x = 0 \end{cases}$$

The boundary conditions for the vector potential $\vec{M}$ at the interfaces are:

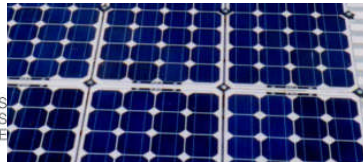
At $z = 2$:

$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=2} \times \hat{n} = -M_x \hat{j} + M_y \hat{i}$$

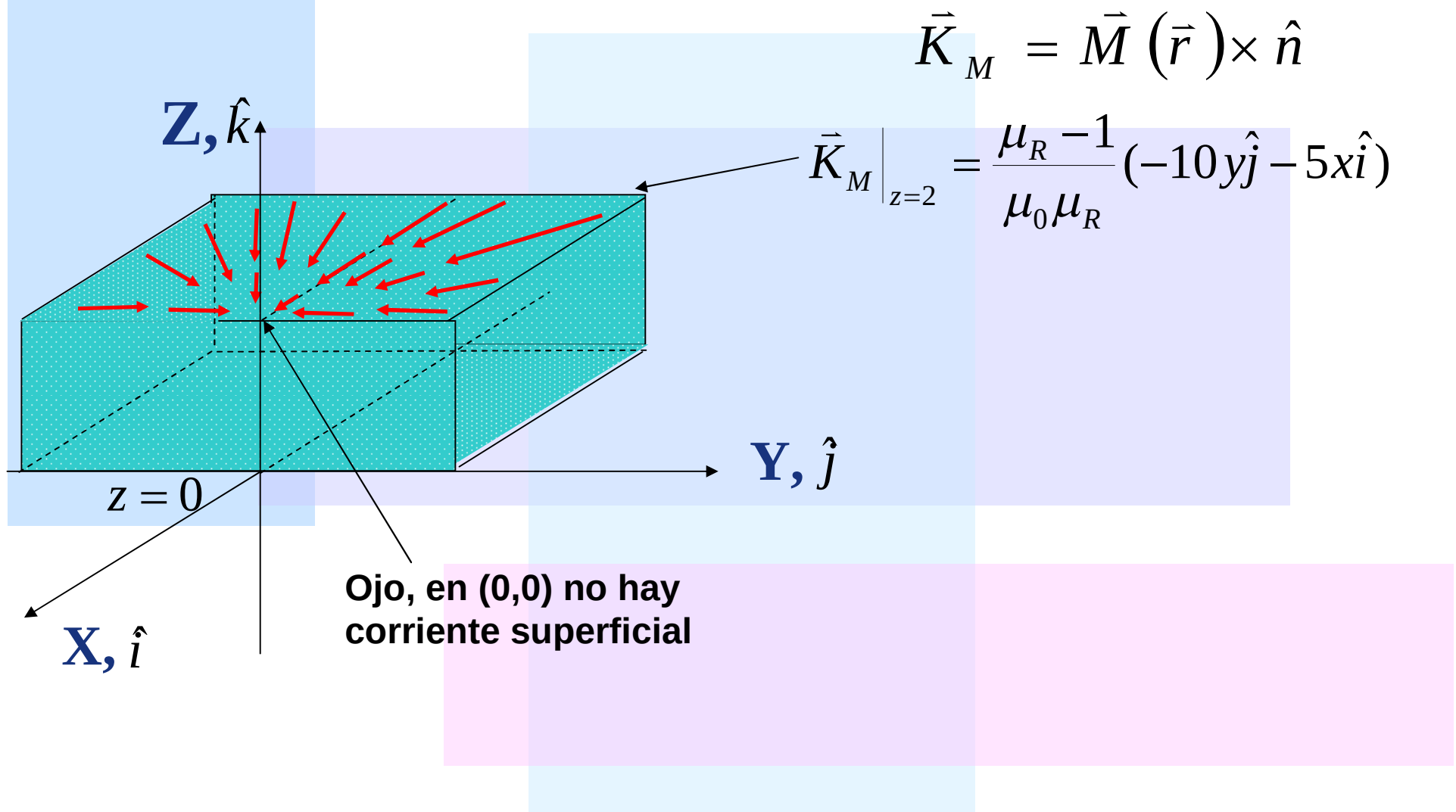
$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=2} \times \hat{n} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} (-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$

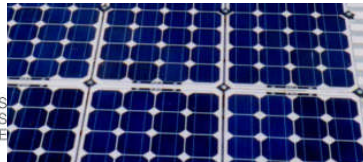
At $z = 0$:

$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=0} \times \hat{n} = M_x \hat{j} - M_y \hat{i} \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=0} \times \hat{n} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} (10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

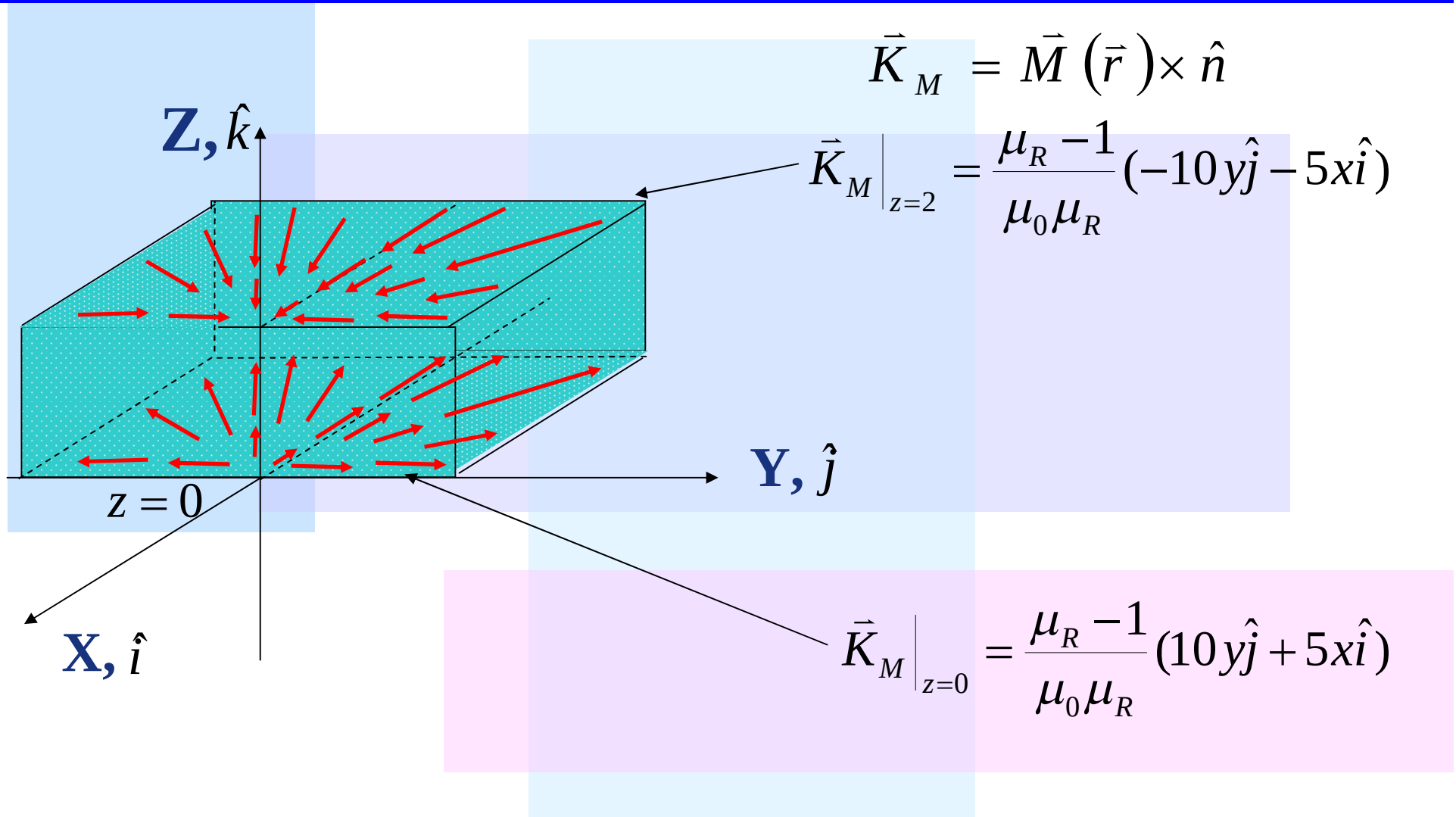


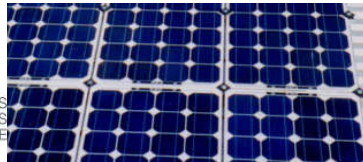
Ejemplo



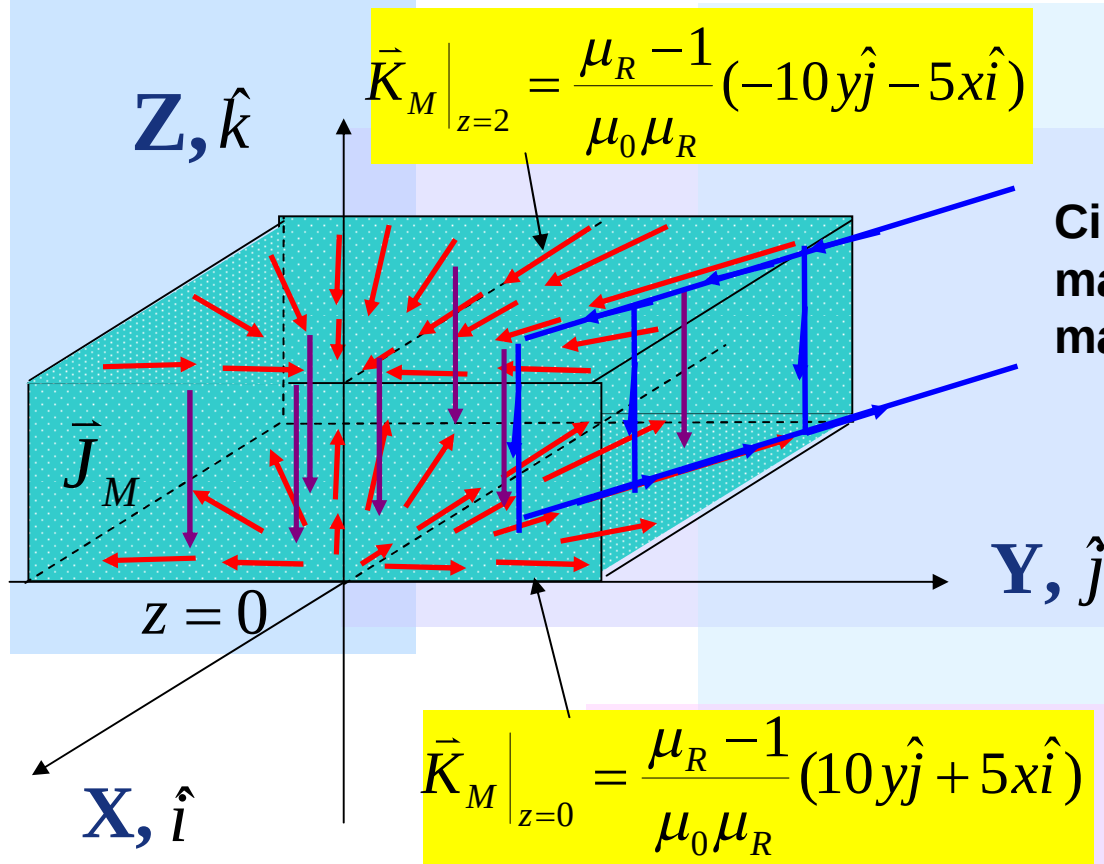


Ejemplo



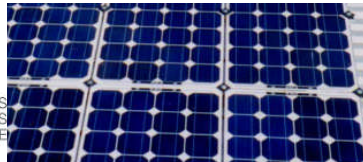


Ejemplo

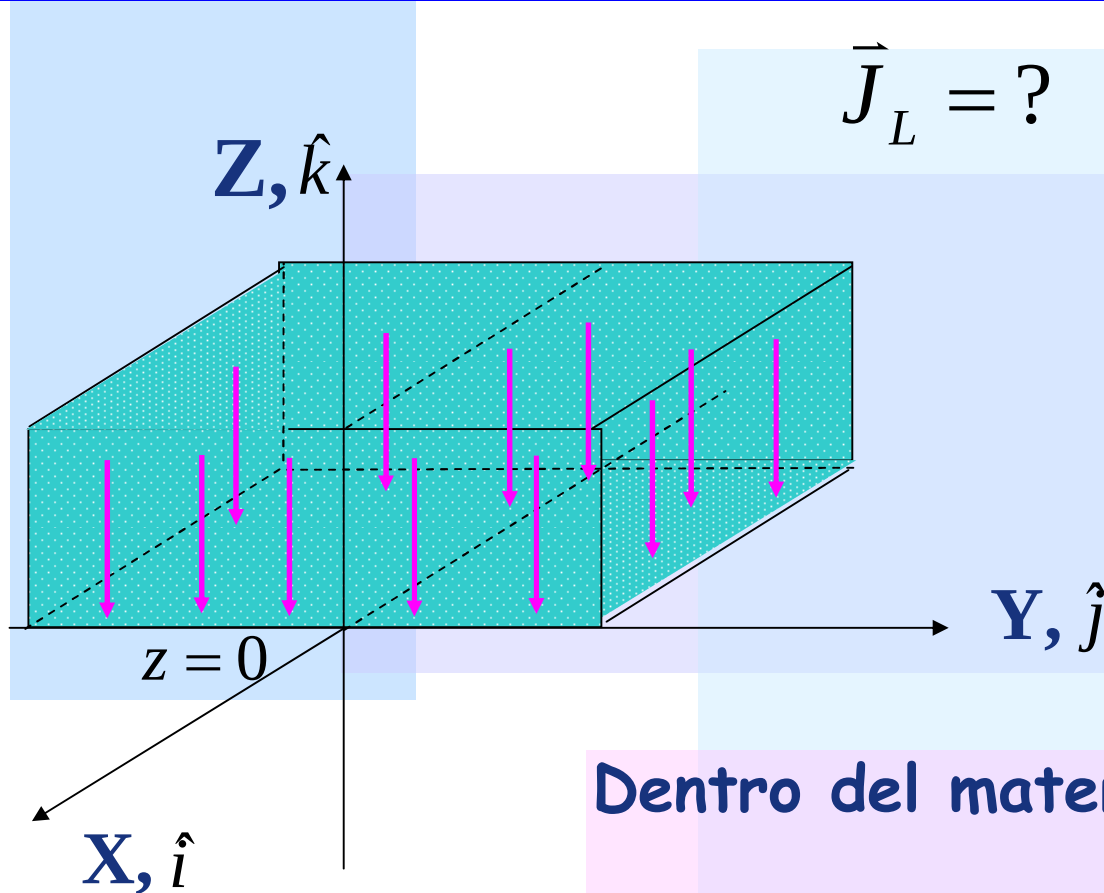


$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

Circuito típico de corriente de magnetización al interior del material (se cierra en el infinito)



Ejemplo



$$\vec{J}_L = ?$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

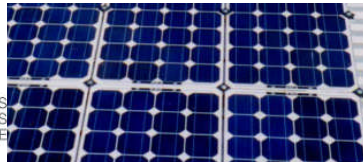
$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{B} = 10 y \hat{i} - 5 x \hat{j}$$

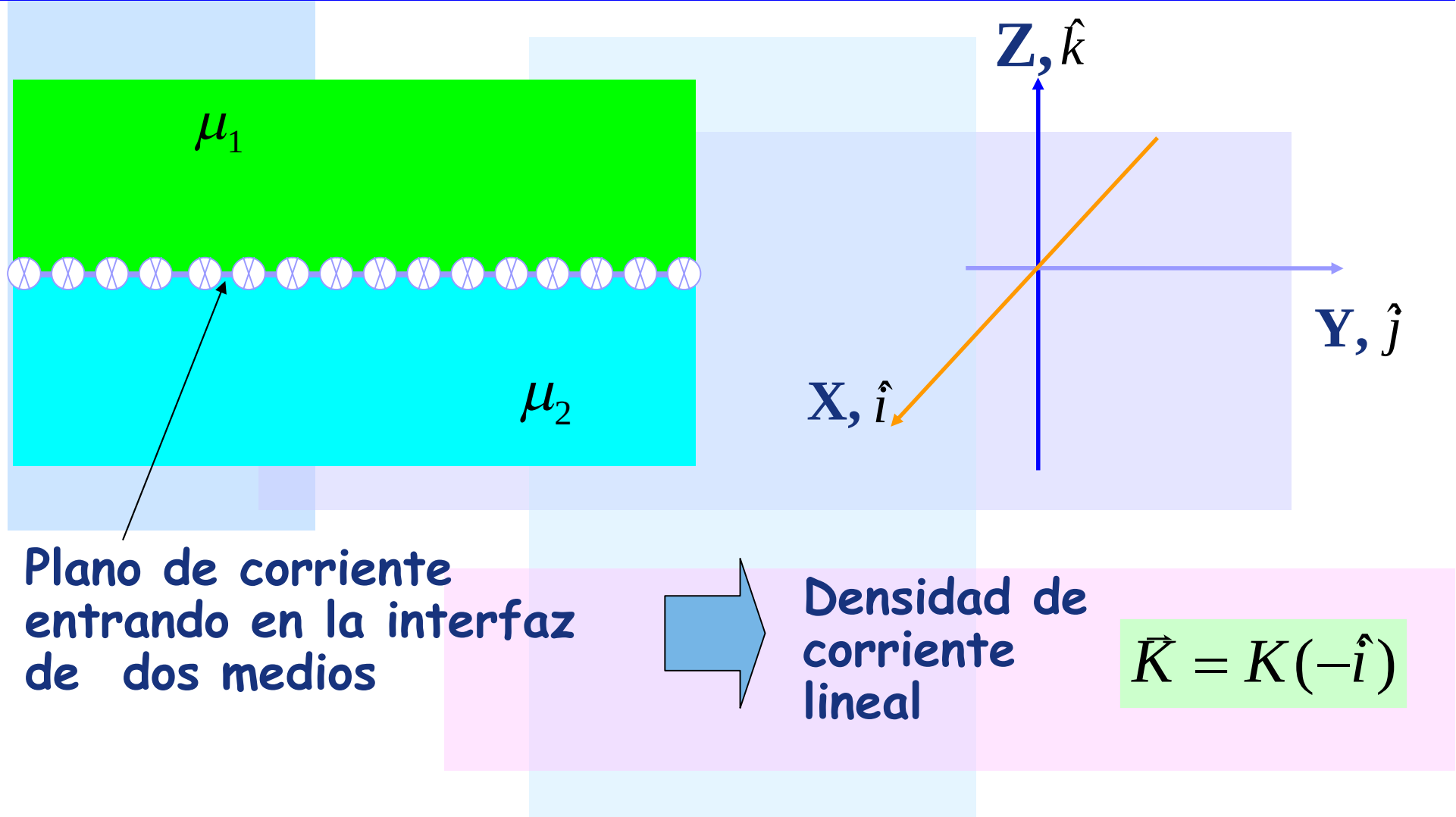
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} (10 y \hat{i} - 5 x \hat{j})$$

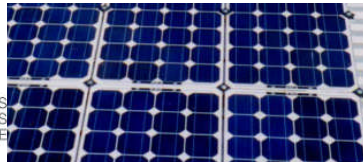
Dentro del material

$$\vec{J}_L = \frac{-15}{\mu_0 \mu_R} \hat{k}$$

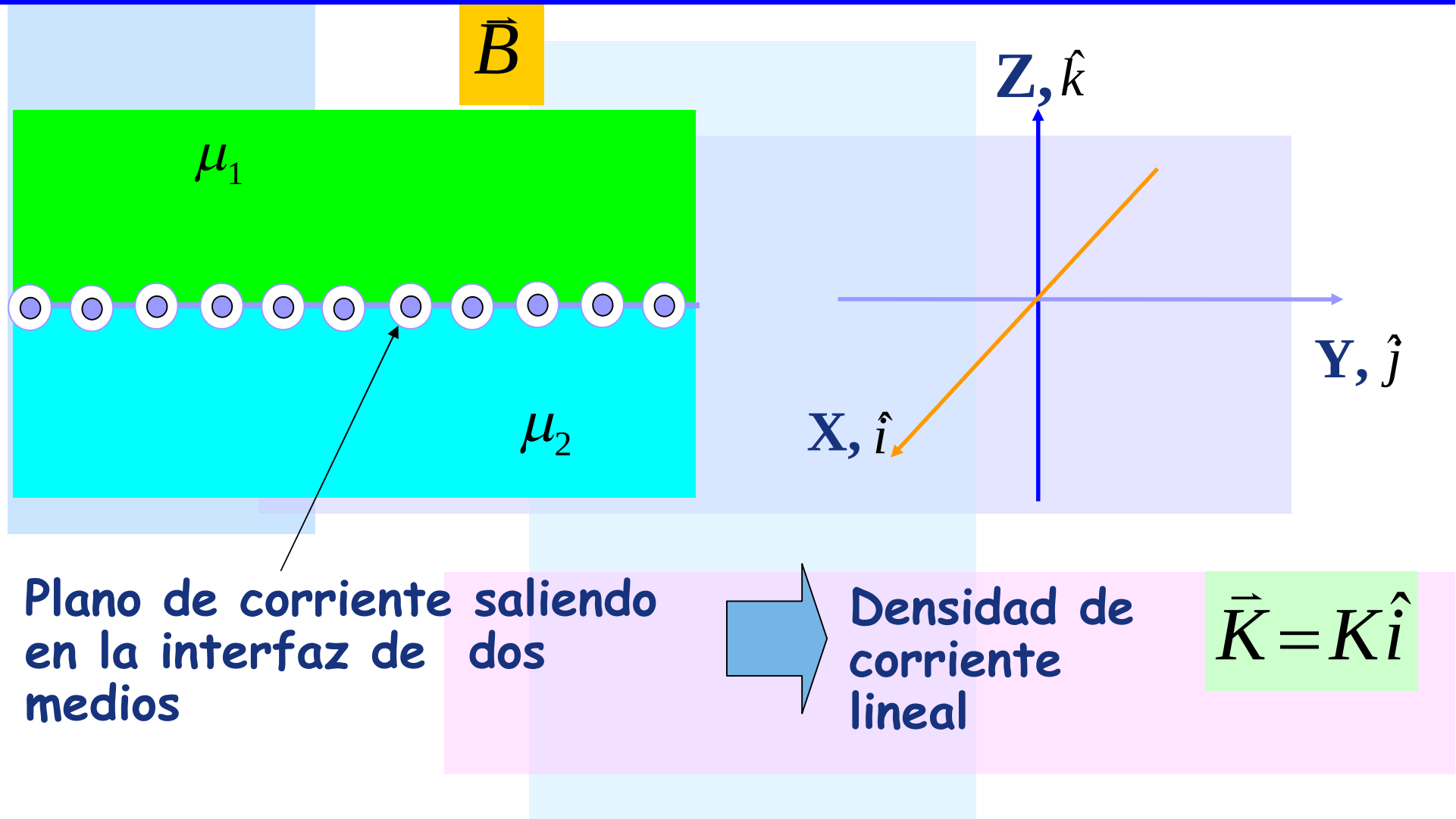


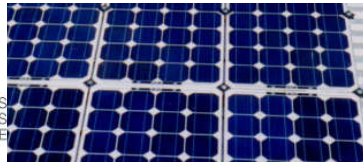
Condiciones de borde entre dos medios



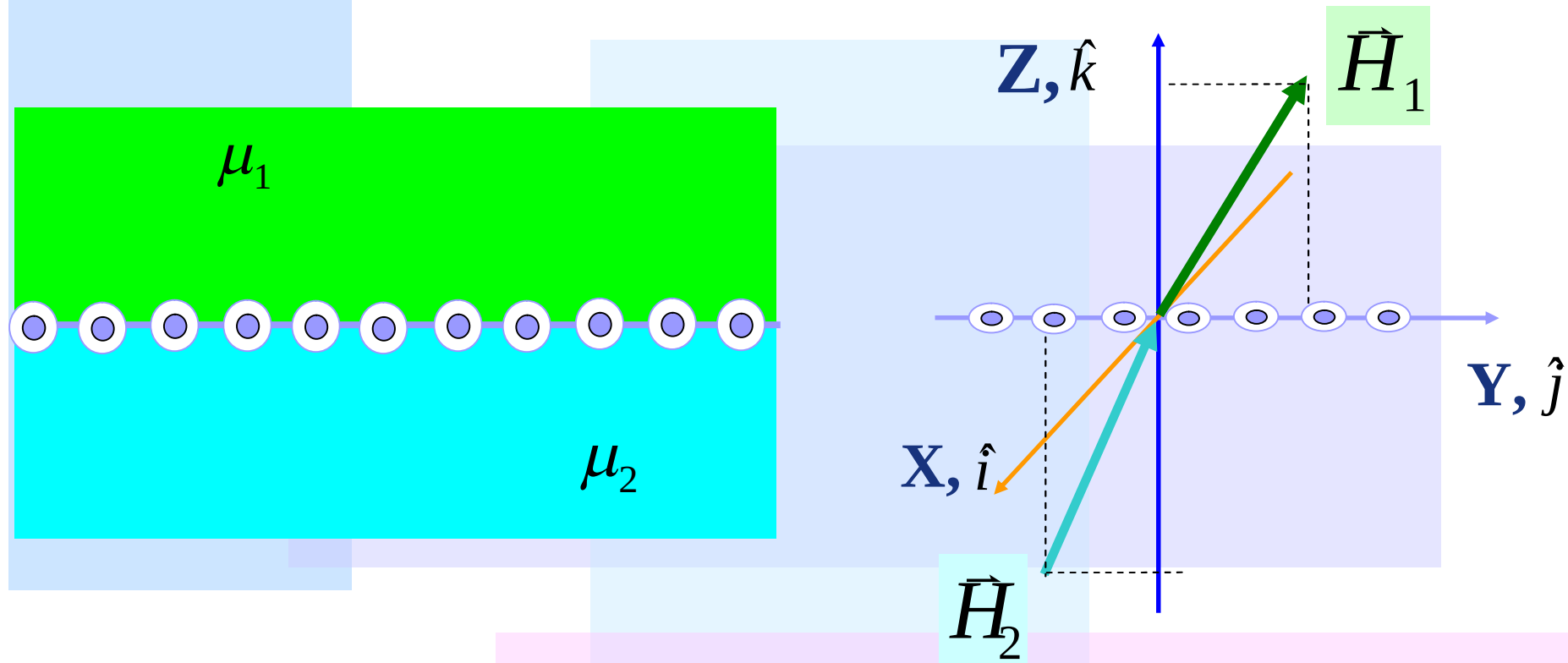


Condiciones de borde entre dos medios

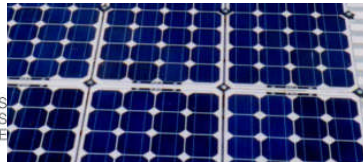




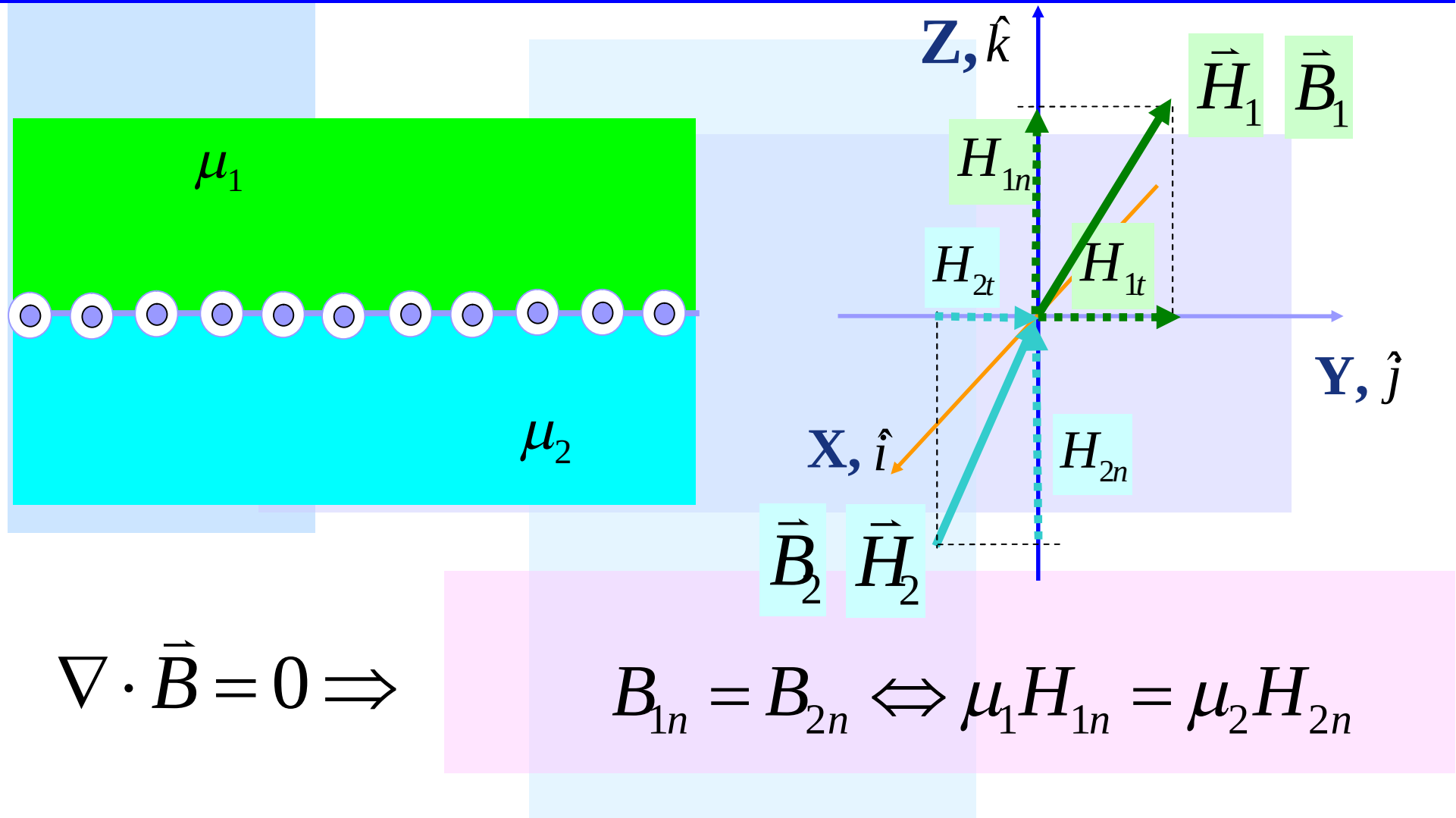
Condiciones de borde entre dos medios



¿qué condiciones cumplen los campos magnéticos en la interfaz?

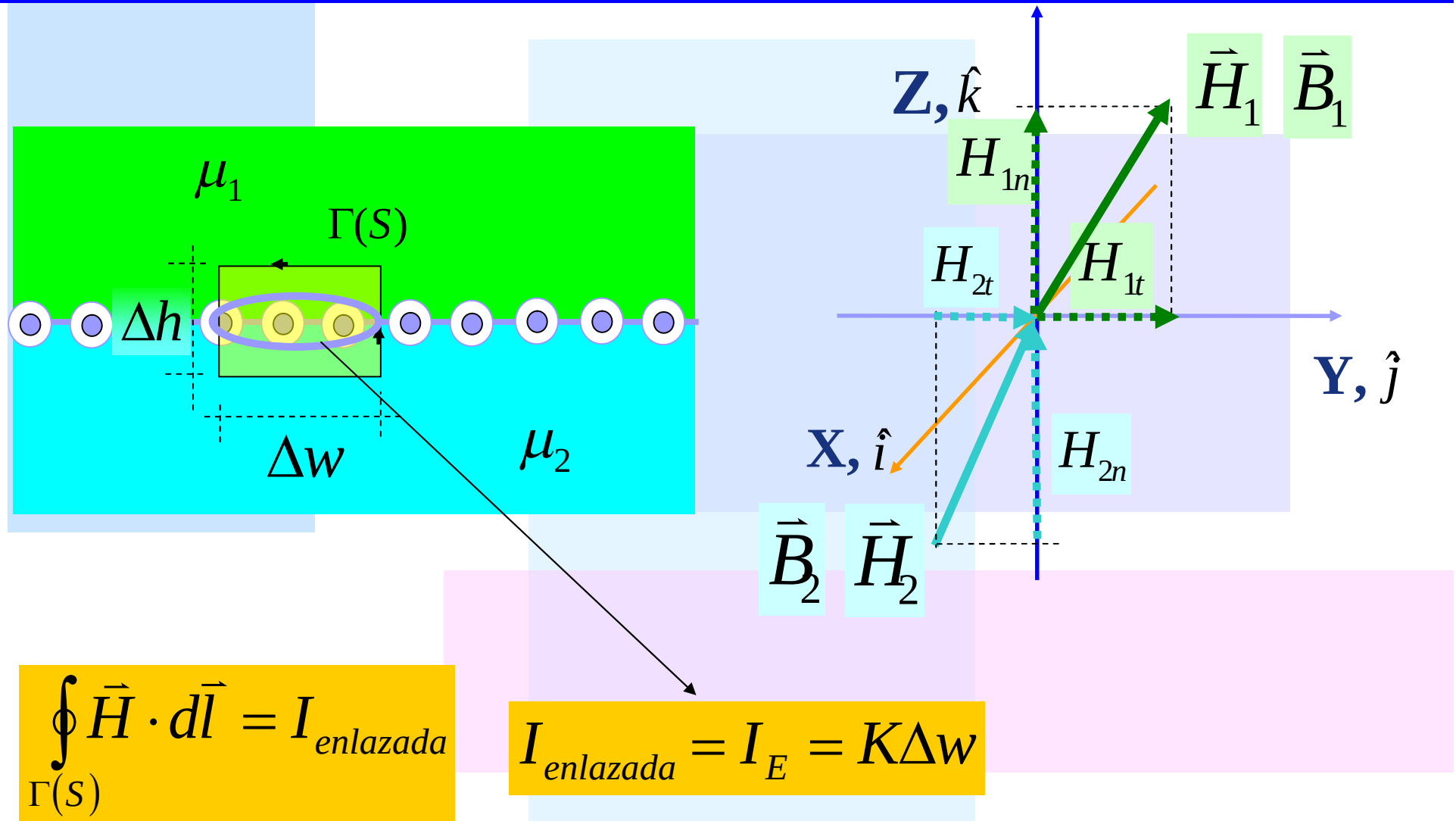


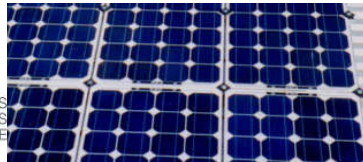
Condiciones de borde entre dos medios



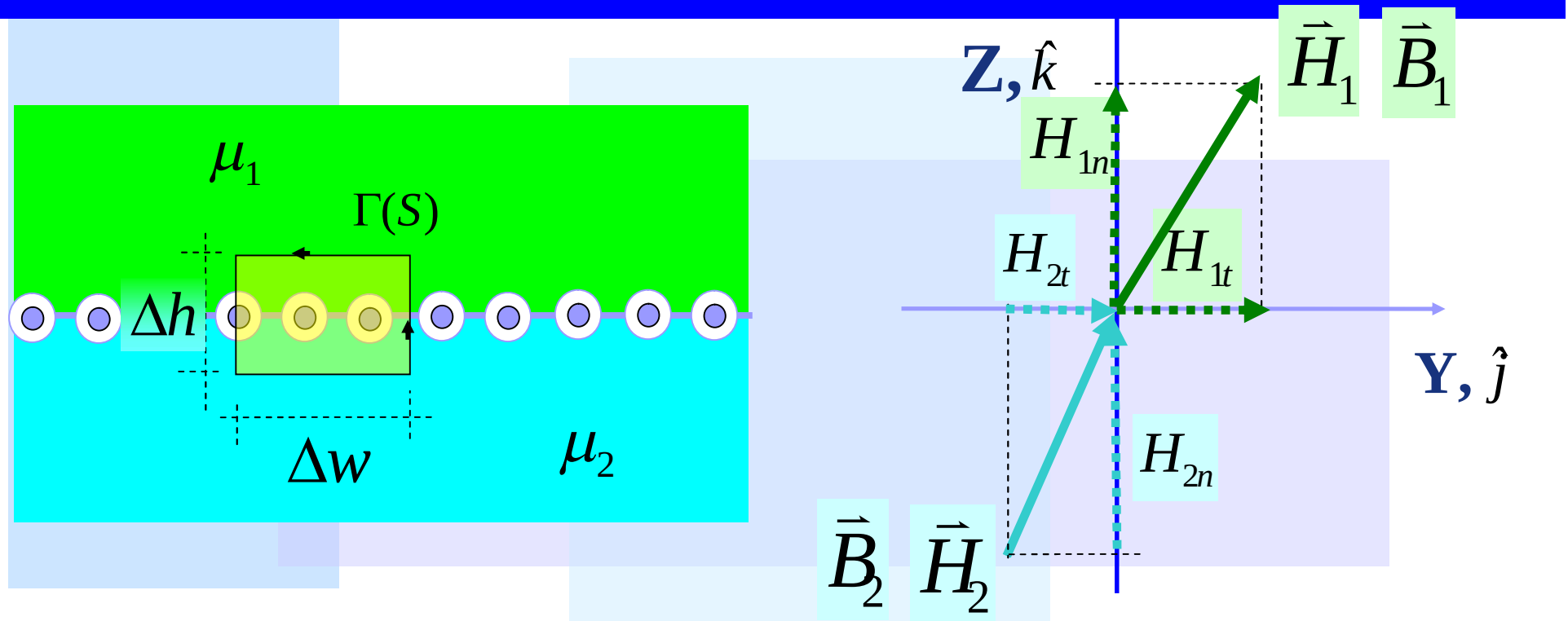


Condiciones de borde entre dos medios



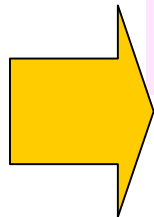


Condiciones de borde entre dos medios

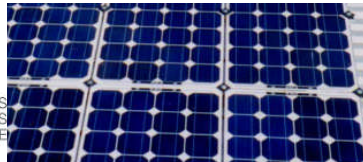


$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{2T} \Delta w + H_{2N} \frac{\Delta h}{2} + H_{1N} \frac{\Delta h}{2} - H_{1T} \Delta w - H_{1N} \frac{\Delta h}{2} - H_{2N} \frac{\Delta h}{2}$$

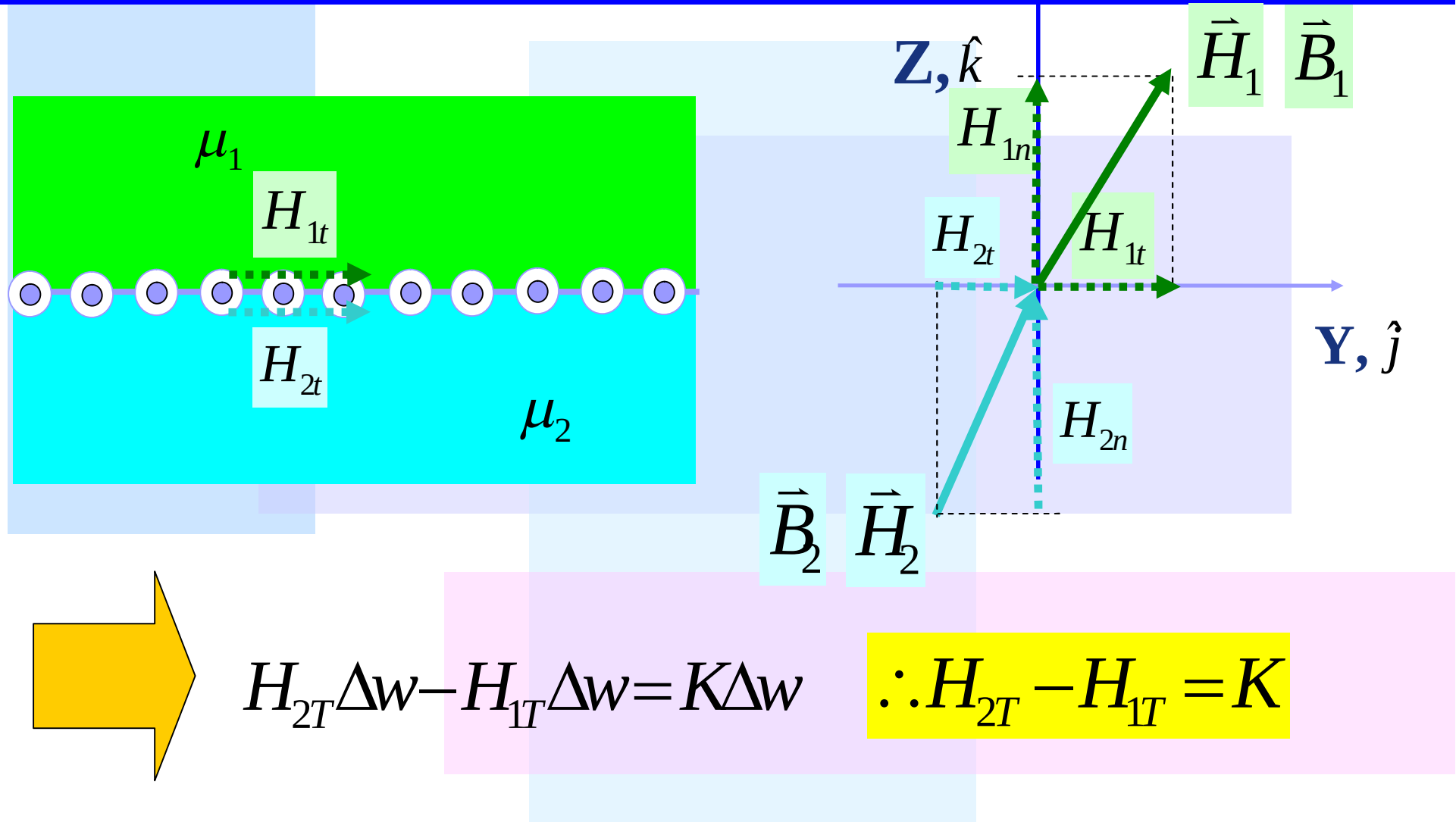
para $\Delta h \rightarrow 0$



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{2T} \Delta w - H_{1T} \Delta w$$

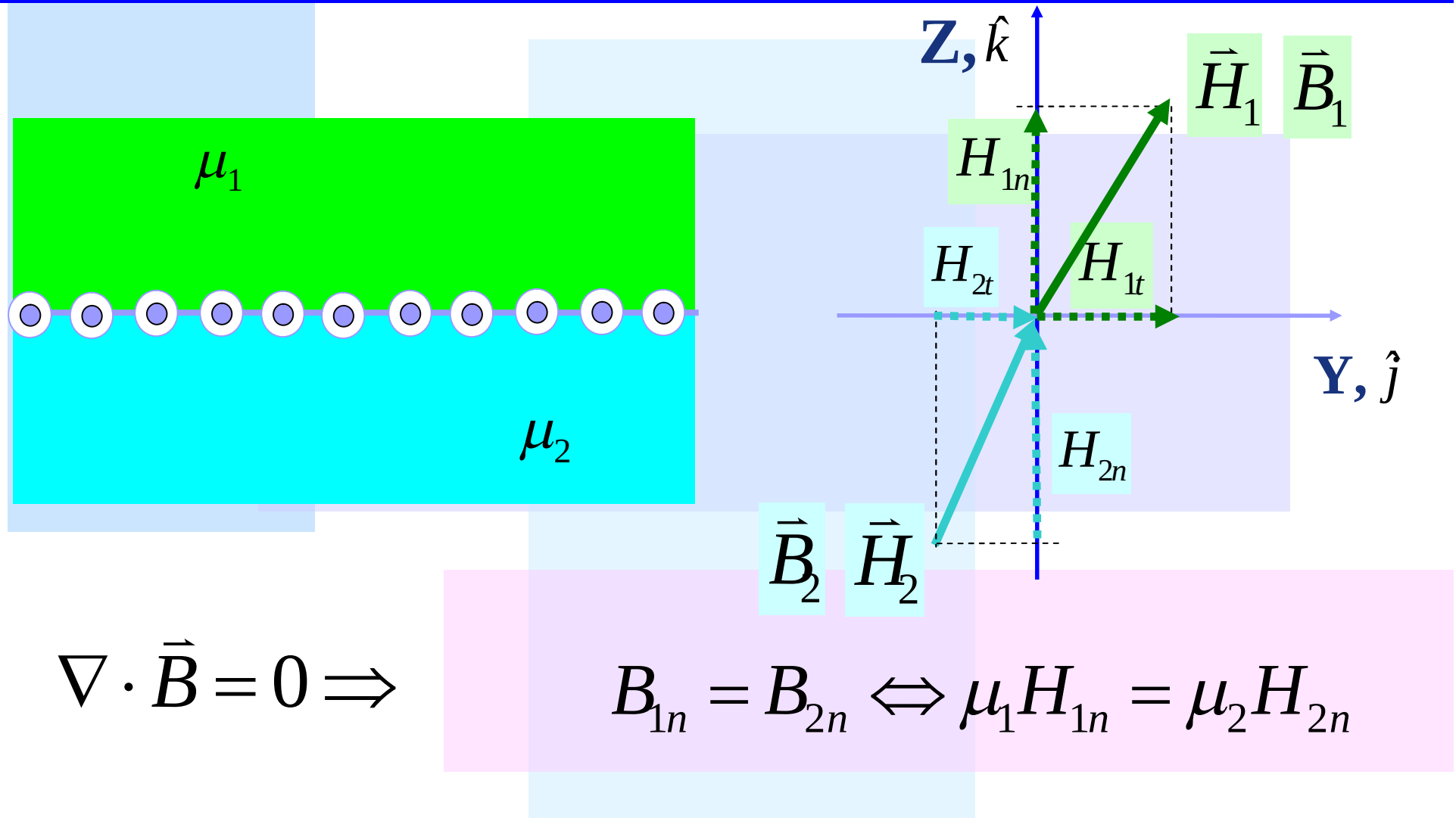


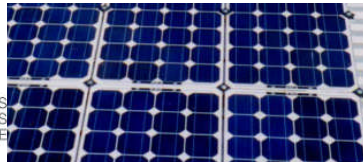
Condiciones de borde entre dos medios



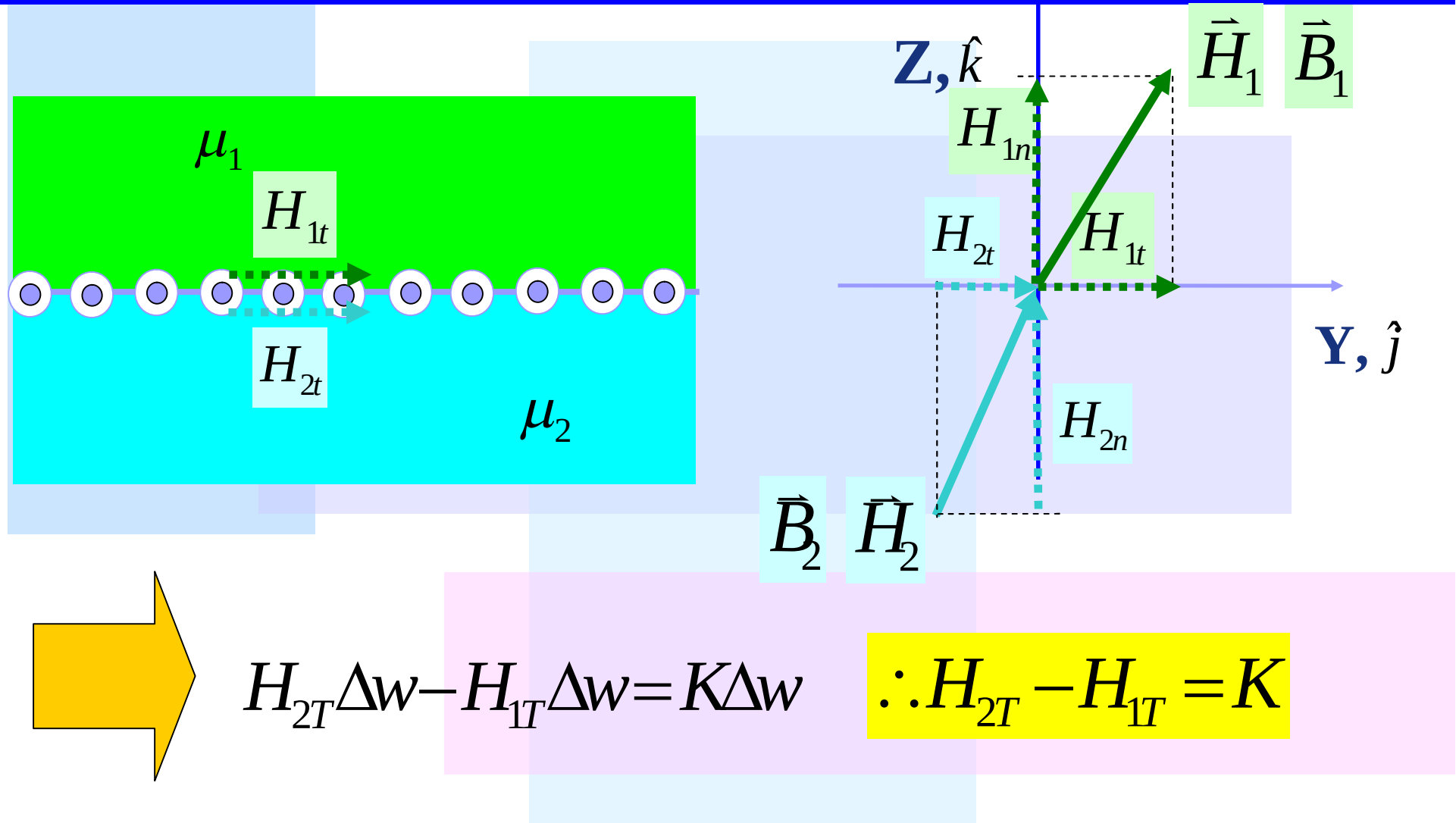


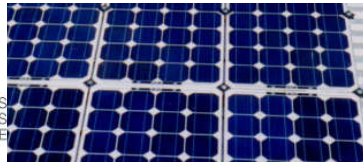
Condiciones de borde entre dos medios





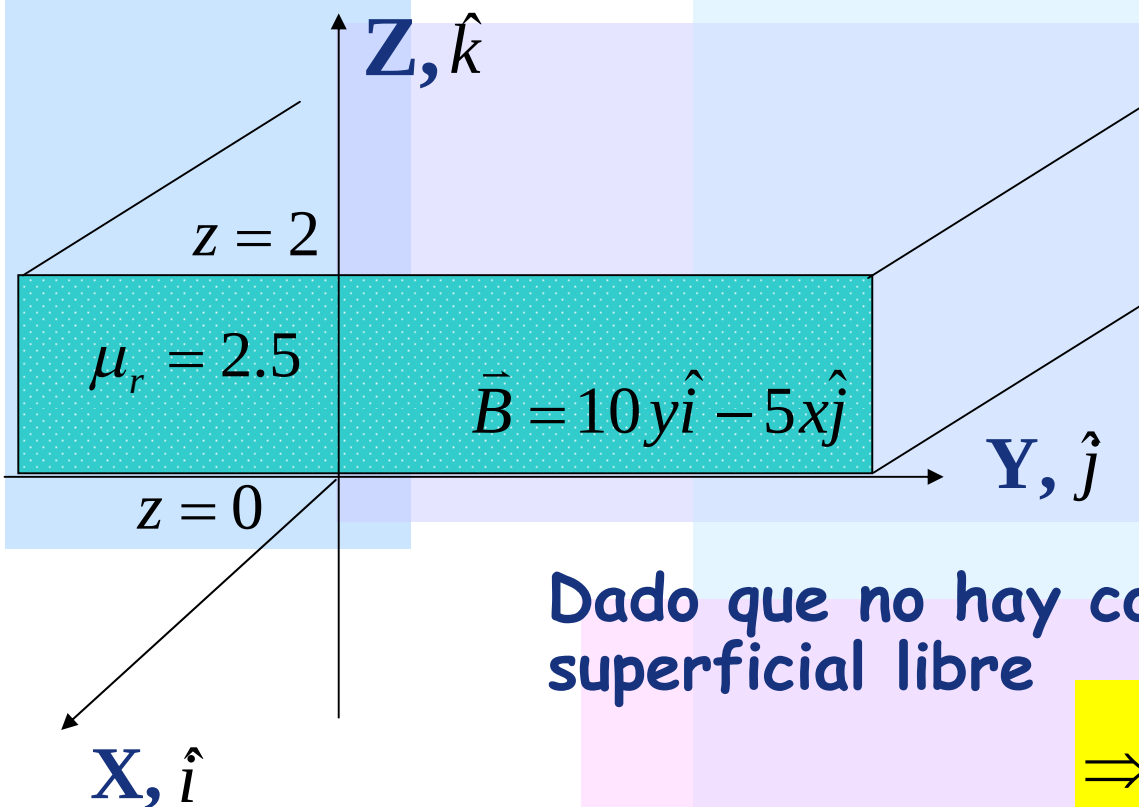
Condiciones de borde entre dos medios





Ejemplo

Dado $\vec{B}$ al interior del medio, determinar $\vec{B}$ y $\vec{H}$ afuera.
Hay corriente libre?



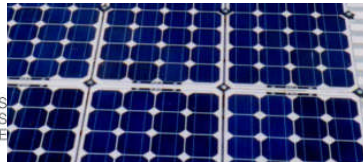
Al interior $\vec{B} = 10y\hat{i} - 5x\hat{j}$
 $\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$

Al exterior
 $B_{1n} = B_{2n} = \vec{B} \bullet \hat{k} = 0$

Dado que no hay corriente superficial libre $H_{2T} - H_{1T} = K = 0$

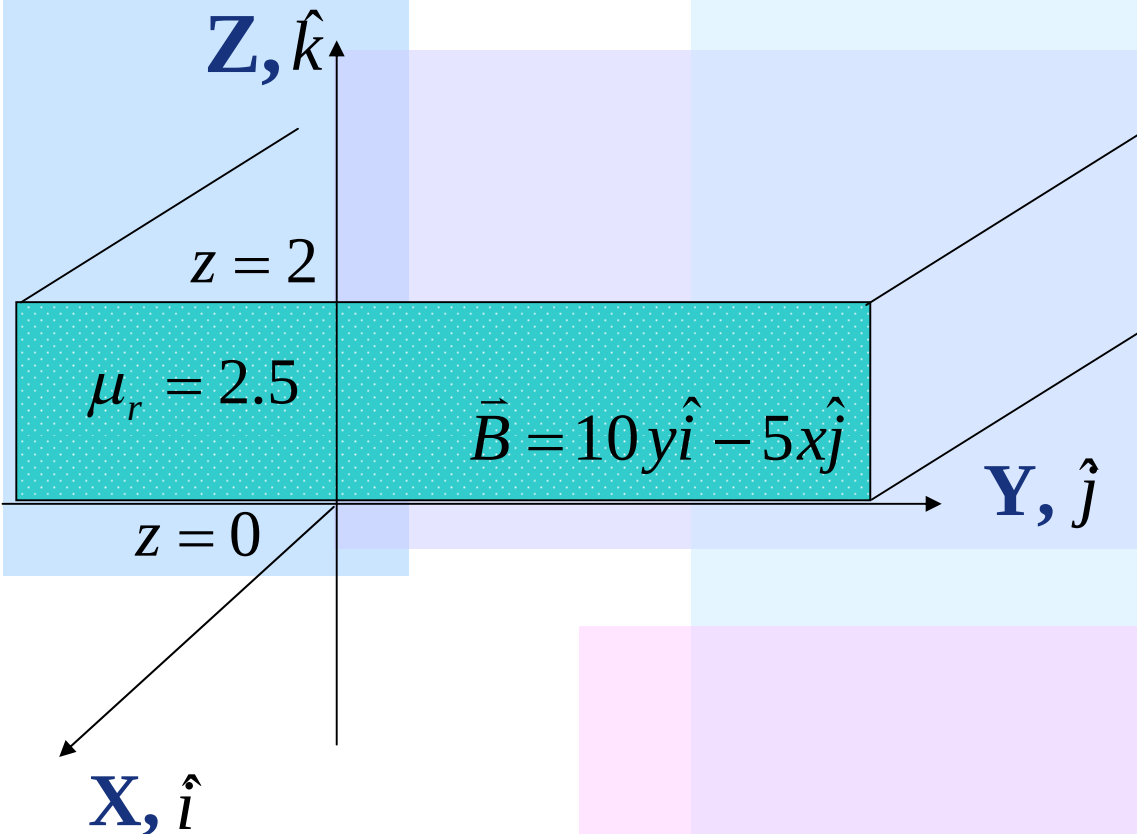
$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

$\vec{H}$ es el mismo en el interior y exterior



Ejemplo

Dado $\vec{B}$ al interior del medio, determinar $\vec{B}$ y $\vec{H}$ afuera



Al interior

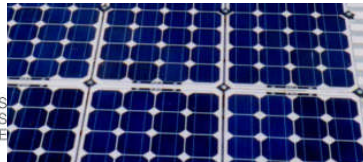
$$\vec{B} = 10y\hat{i} - 5x\hat{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

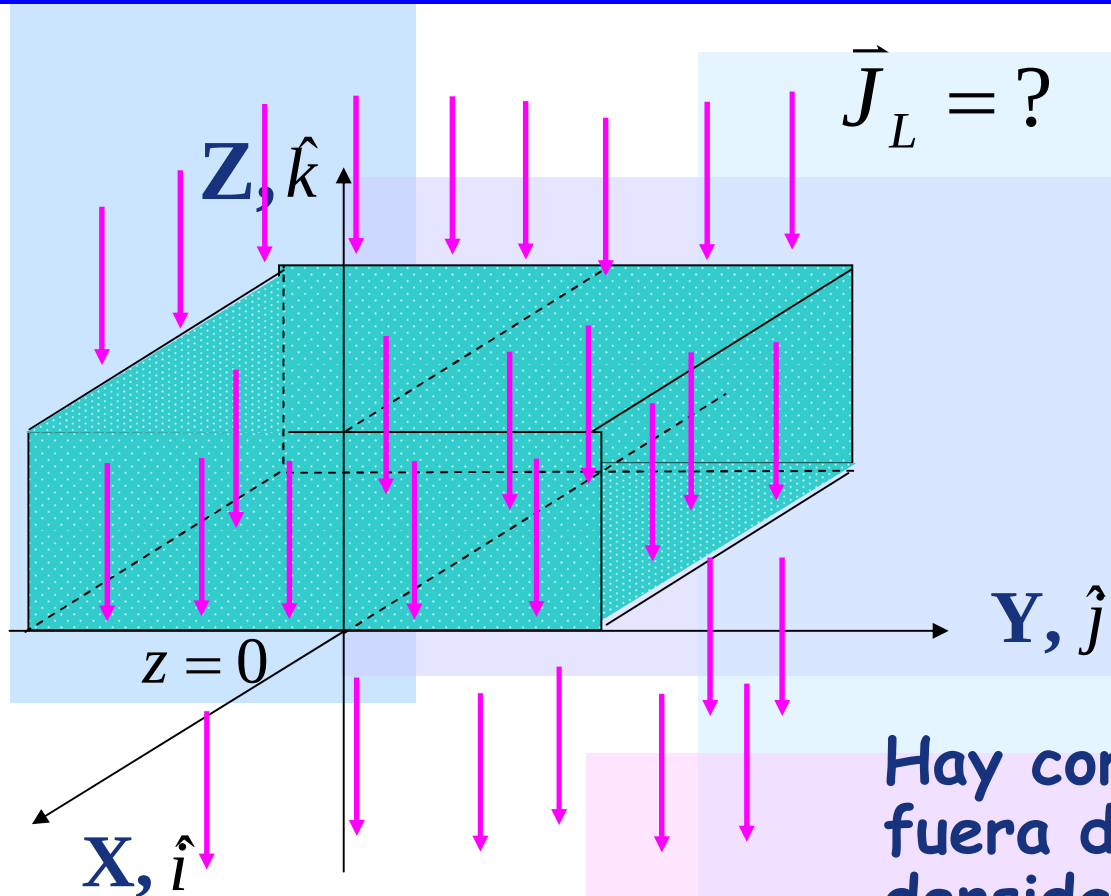
Al exterior

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\mu_r}(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$



Ejemplo

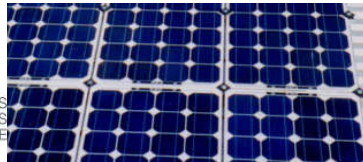


$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} (10 y \hat{i} - 5 x \hat{j})$$

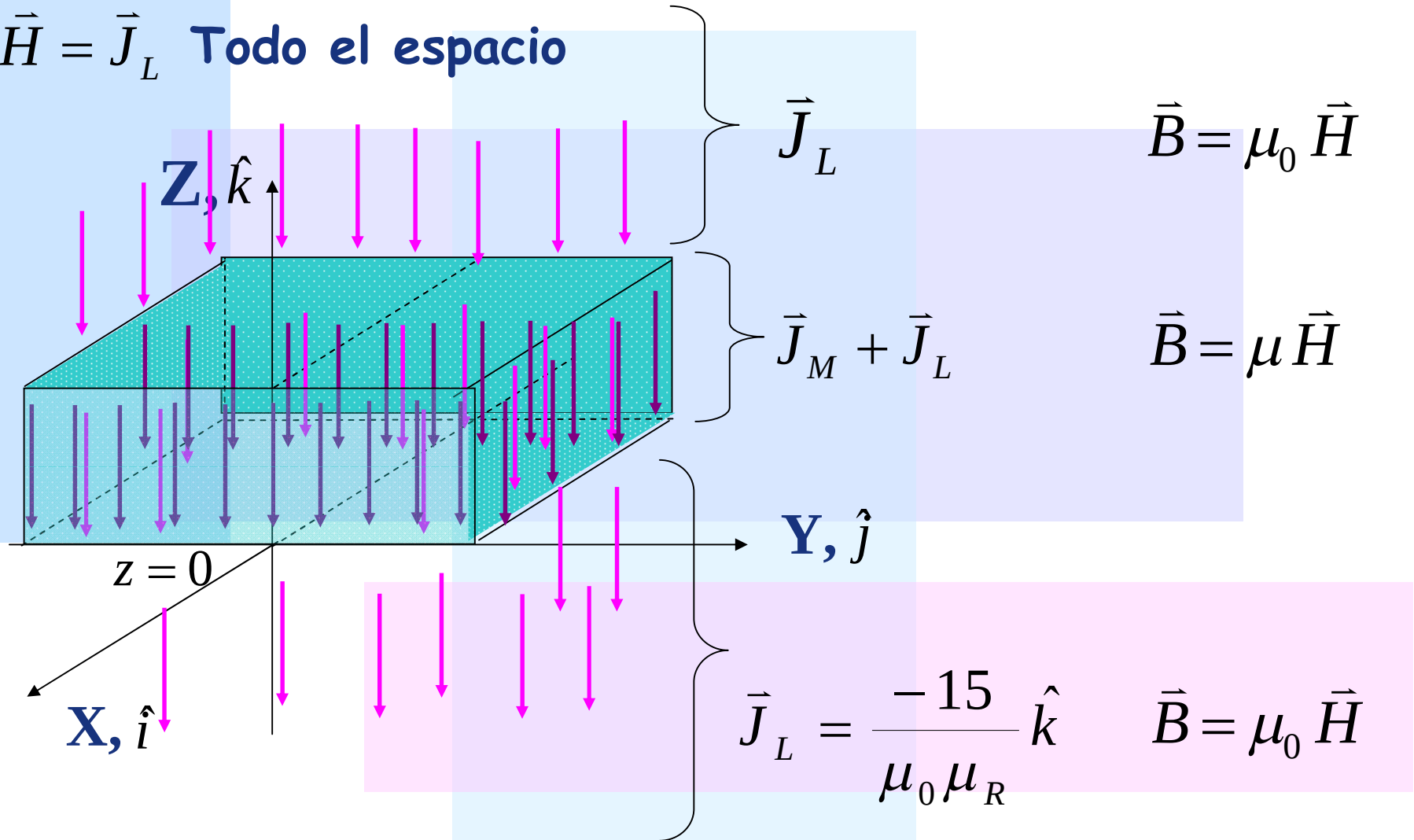
$$\vec{J}_L = \frac{-15}{\mu_0 \mu_R} \hat{k}$$

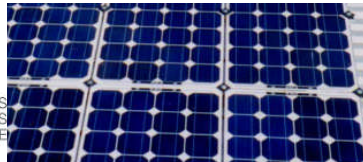
Hay corriente libre dentro y fuera del material con la misma densidad



Ejemplo

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L \quad \text{Todo el espacio}$$





Clasificación de los Materiales Magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_R \mu_0$$

Materiales magnéticos

**Materiales
diamagnéticos**

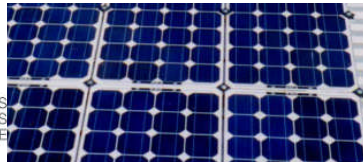
$$\chi_m < 0, \mu_r \leq 1$$

**Materiales
paramagnéticos**

$$\chi_m > 0, \mu_r \geq 1$$

**Materiales
Ferromagnéticos**

$$\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$$



Superconductores

Un superconductor es un medio que cumple con las siguientes características:

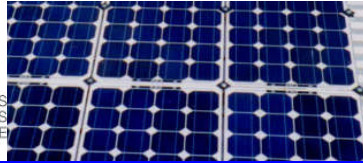
- Resistencia eléctrica nula $R = 0$
- Campo magnético al interior es siempre nulo (efecto Meisner). Esto es $\vec{B} = 0$

Esto es equivalente a decir que un superconductor es un diamagnético perfecto $\mu = 0$



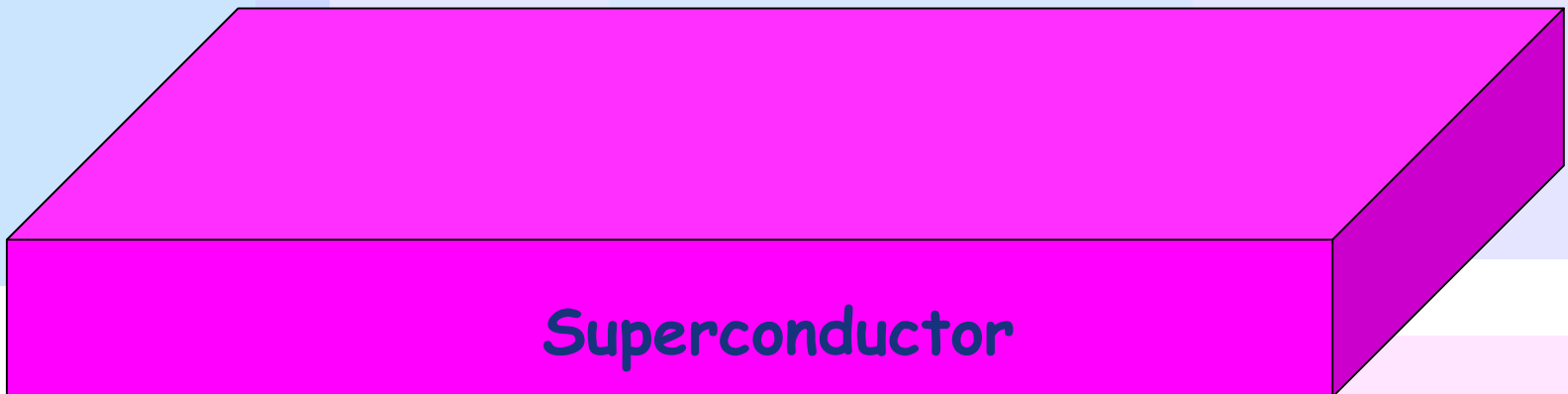
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Imán en presencia de superconductor

$$\vec{M} = M_0 \hat{k} \text{ Imán}$$

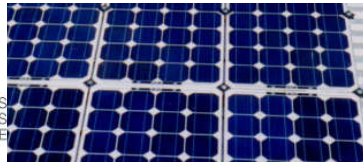



Superconductor



fcfm

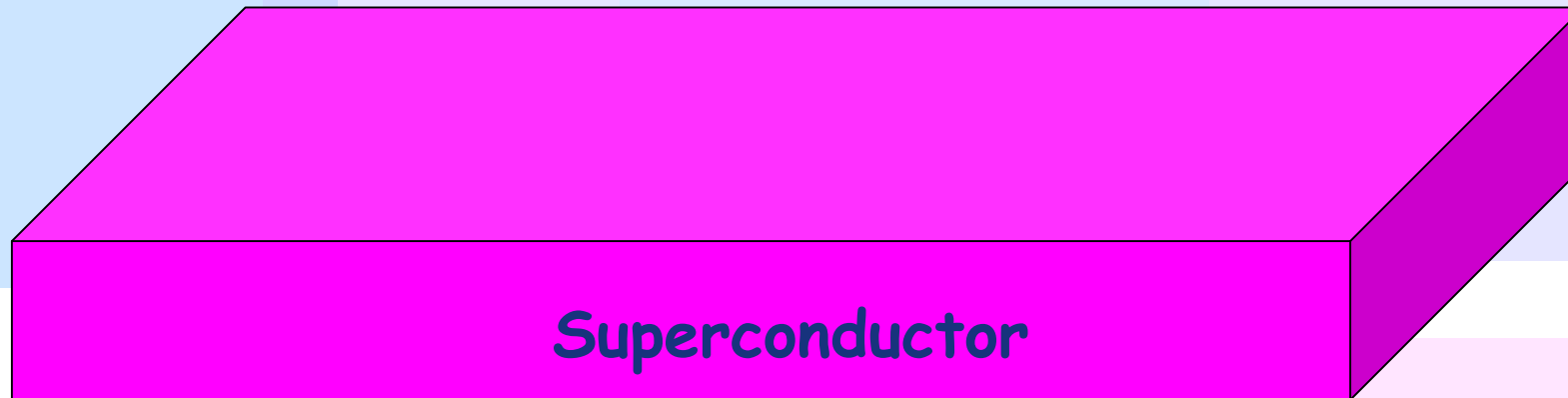
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

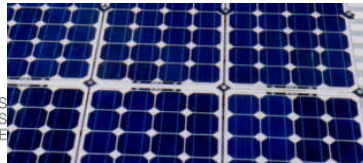


Imán en presencia de superconductor

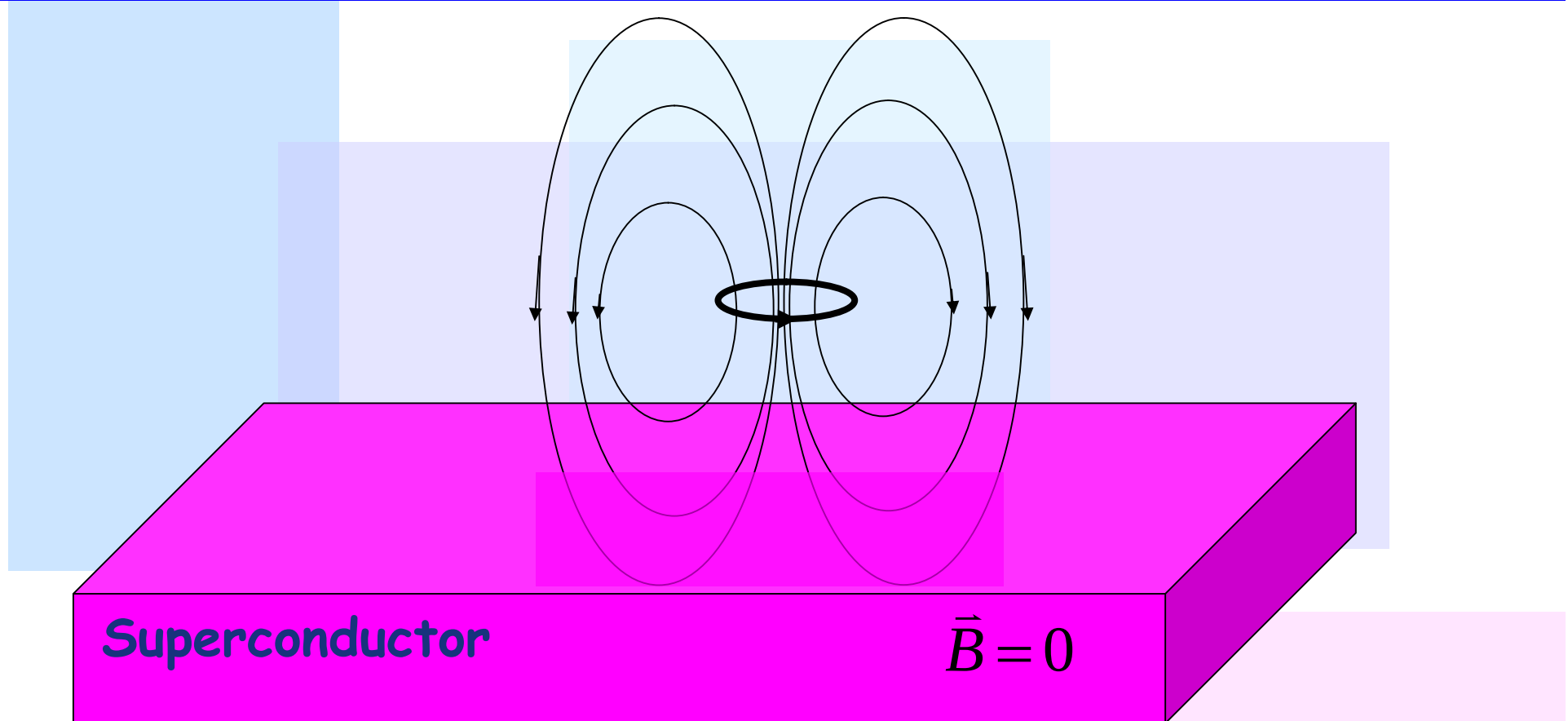
Podemos representar el imán como un dipolo magnético

$$\vec{m} = m_0 \hat{k} \quad \bigcirc \quad \text{Imán}$$

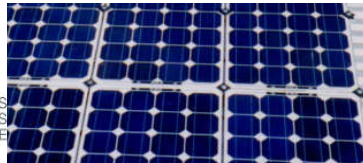




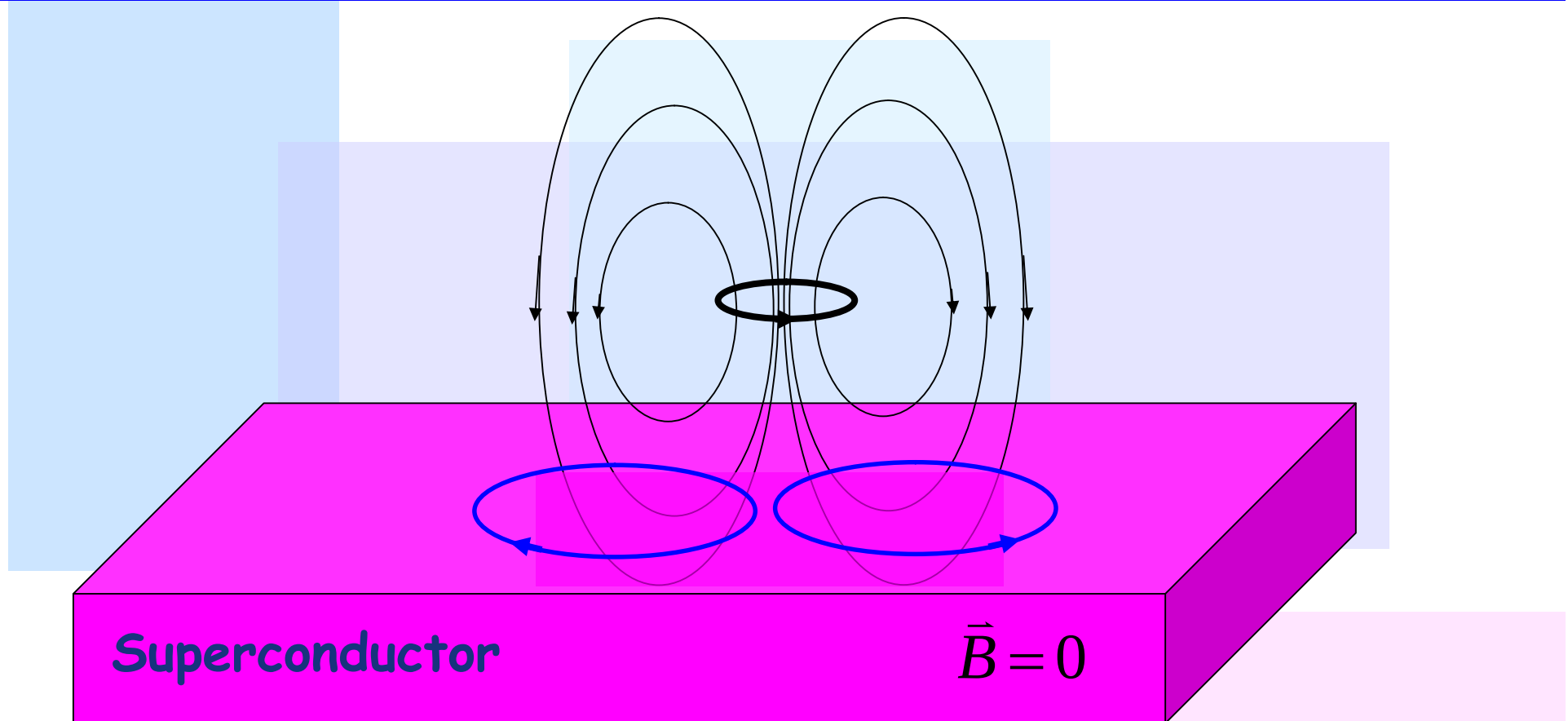
Imán en presencia de superconductor



Al interior del superconductor el campo magnético es nulo, luego se generan corrientes en la superficie del superconductor



Imán en presencia de superconductor



Al interior del superconductor el campo magnético es nulo, luego se generan corrientes en la superficie del superconductor