Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 20
Magnetostática-V

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Modelo atómico de los materiales
- Corrientes de Magnetización
- Permeabilidad Magnética
- Clasificación de materiales magnéticos
- Ciclo de histéresis

Potencial Magnético Vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

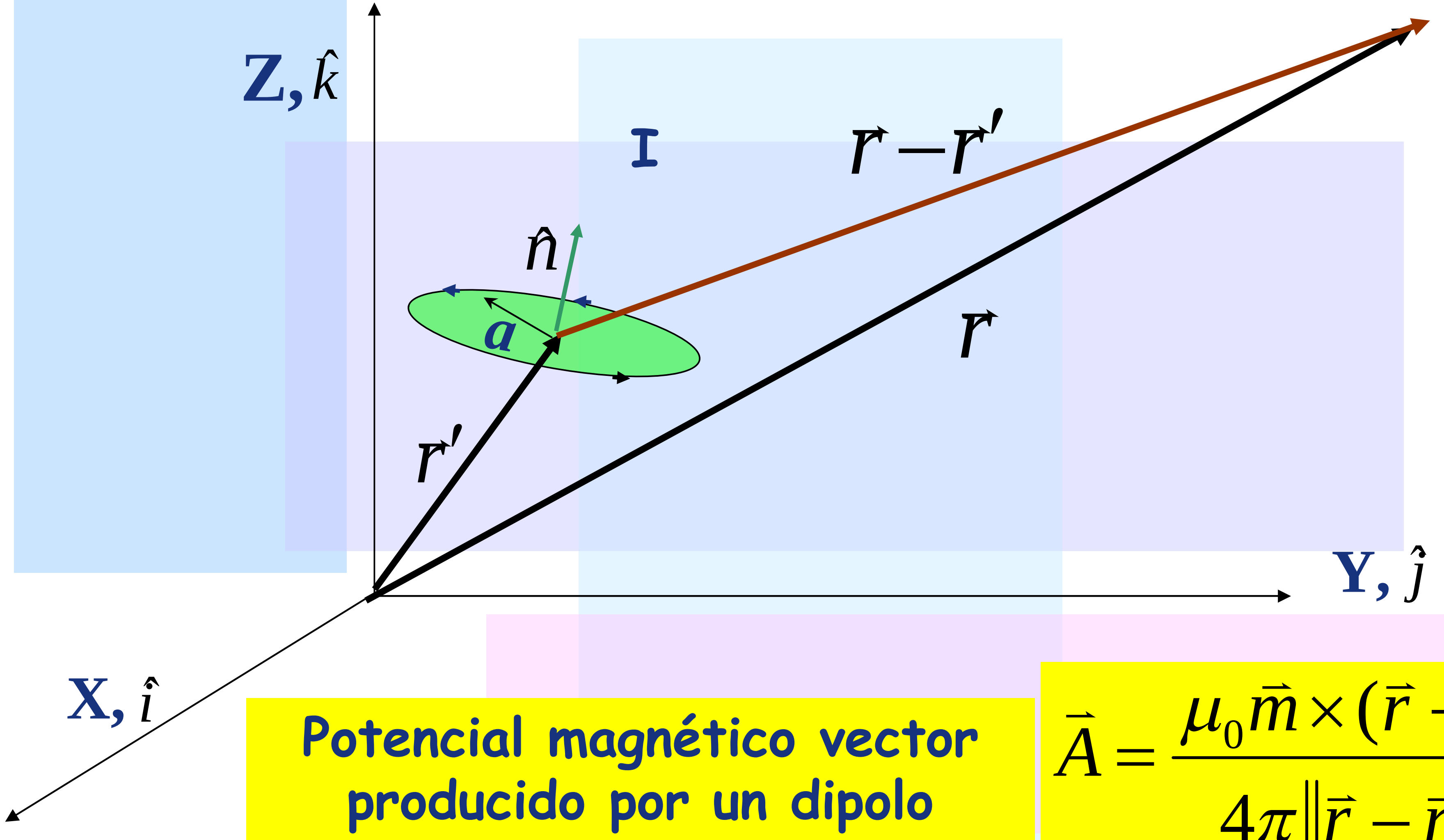
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

Para corrientes superficiales $\left[\vec{K}\right] = \frac{A}{m}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{\vec{J} dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

Para corrientes en volumen $\left[\vec{J}\right] = \frac{A}{m^2}$

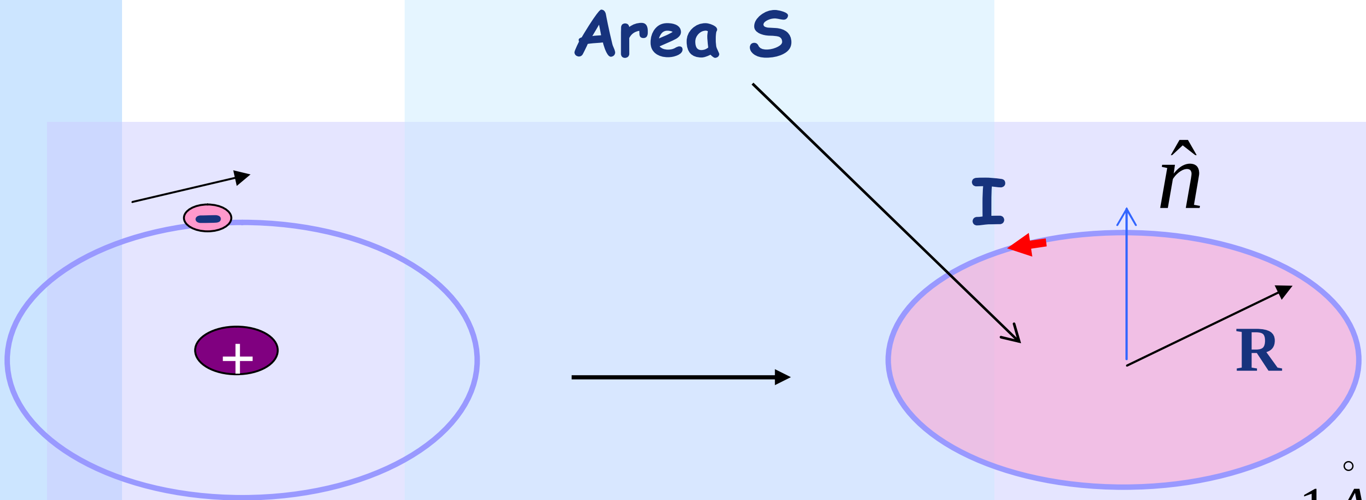
Vector potencial magnético de un dipolo



Potencial magnético vector producido por un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

Modelo atómico de los materiales



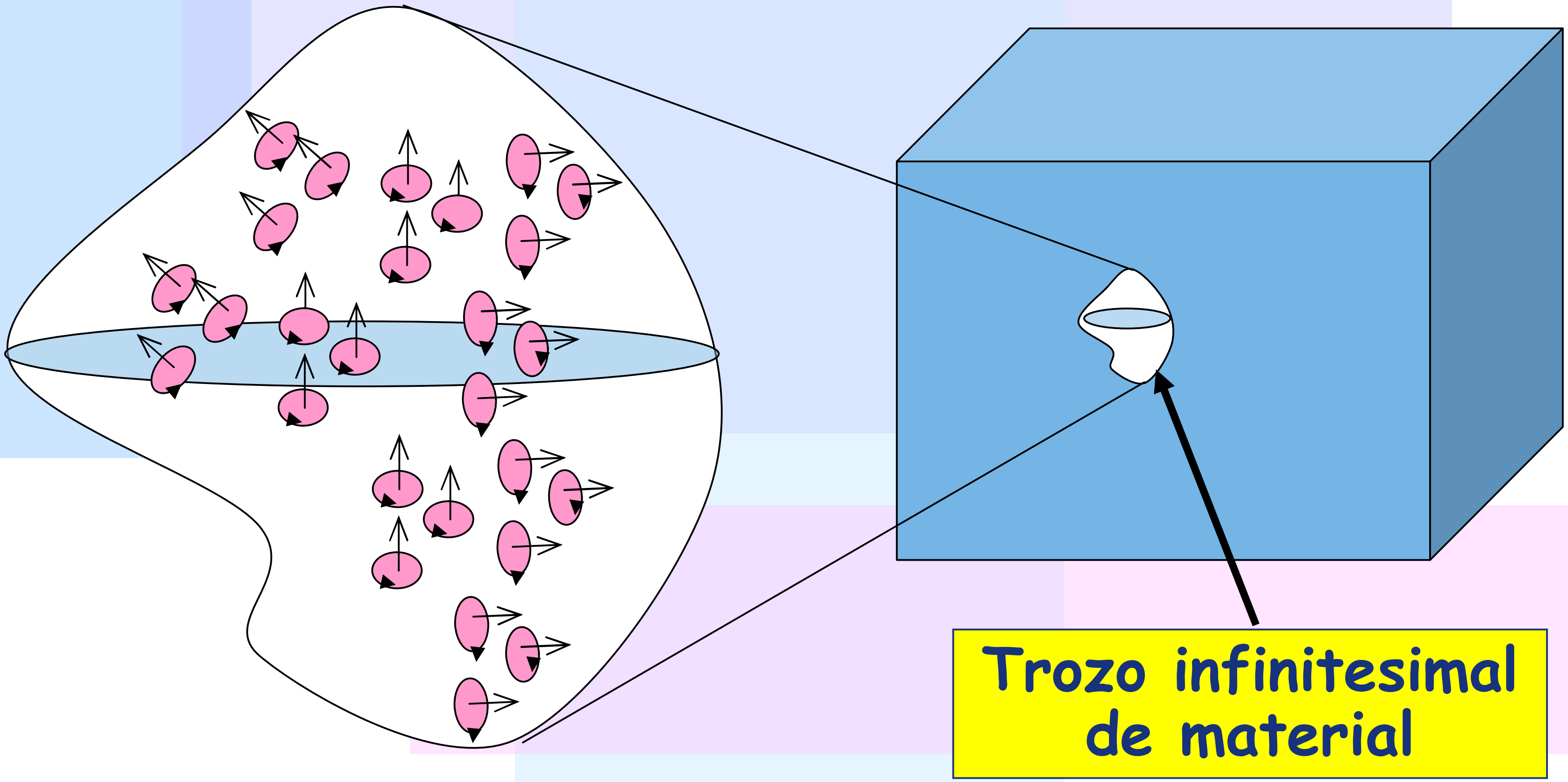
$$1\,\mathring{A} = 10^{-10}\,m$$

Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S\hat{n}\,[Am^2]$$

Modelo atómico de los materiales

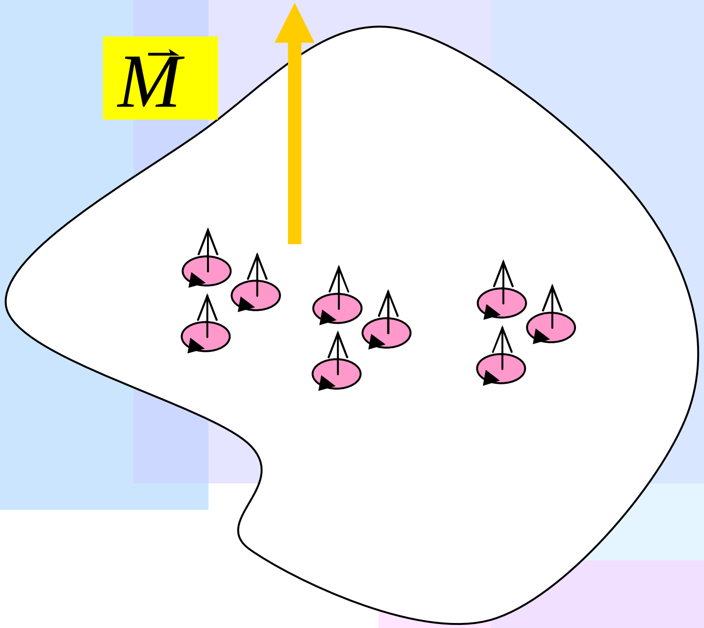
En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (10^{17}-10^{23} átomos/cm^3)



Modelo atómico de los materiales

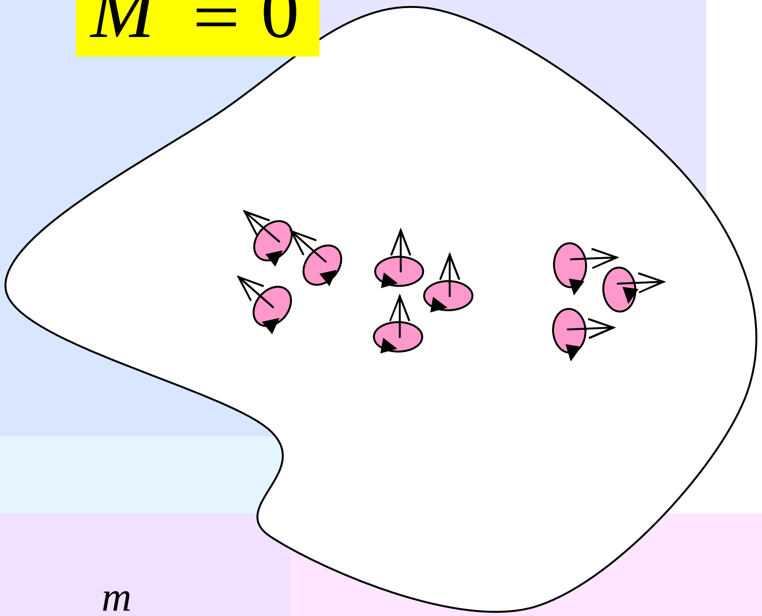
Materiales mantienen la magnetización

$\vec{M}$



Pero la mayoría la pierde

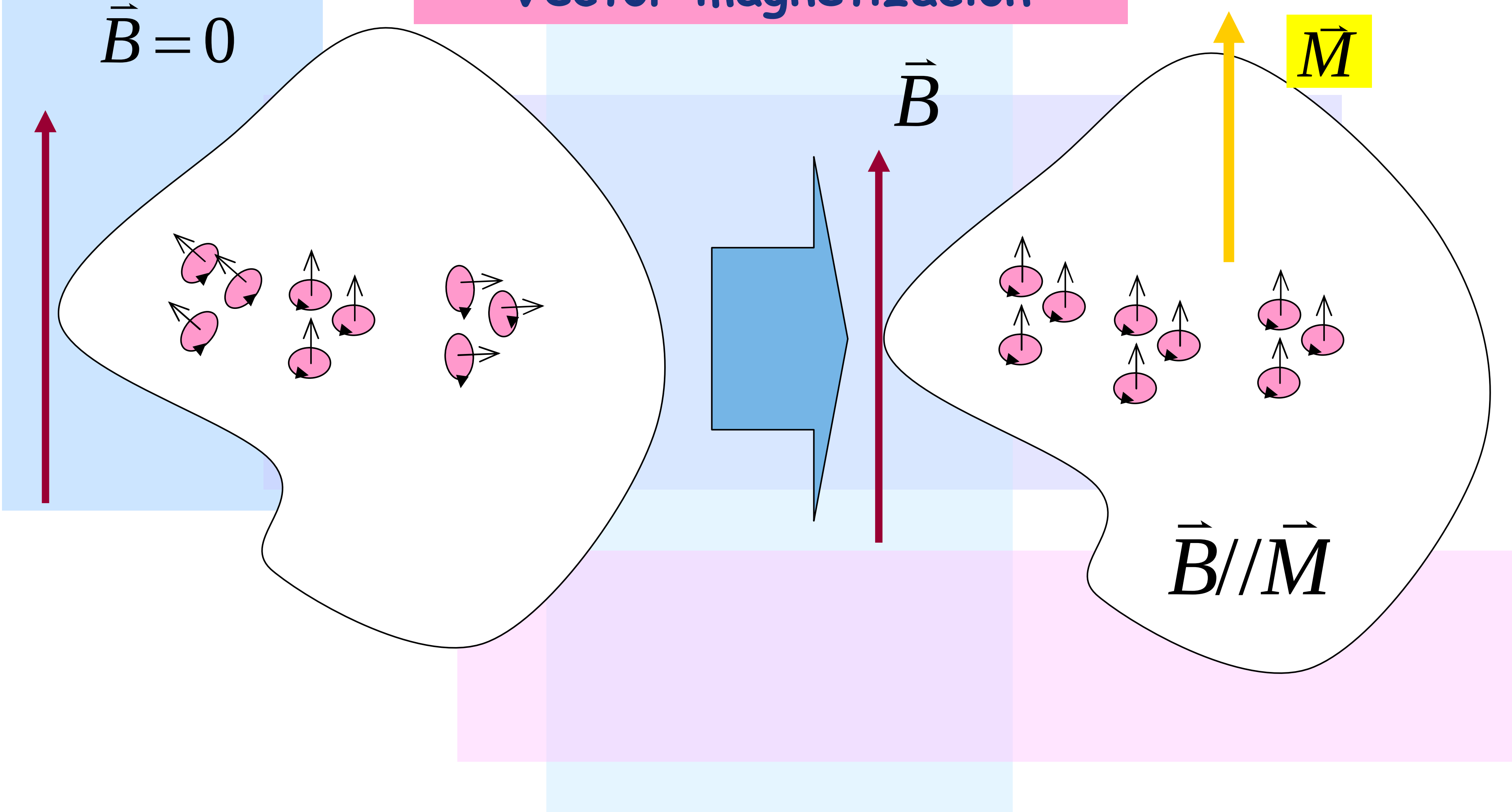
$\vec{M} = 0$



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{m} \vec{m}_k}{\Delta V} \left[A/m\right]$$

Modelo atómico de los materiales

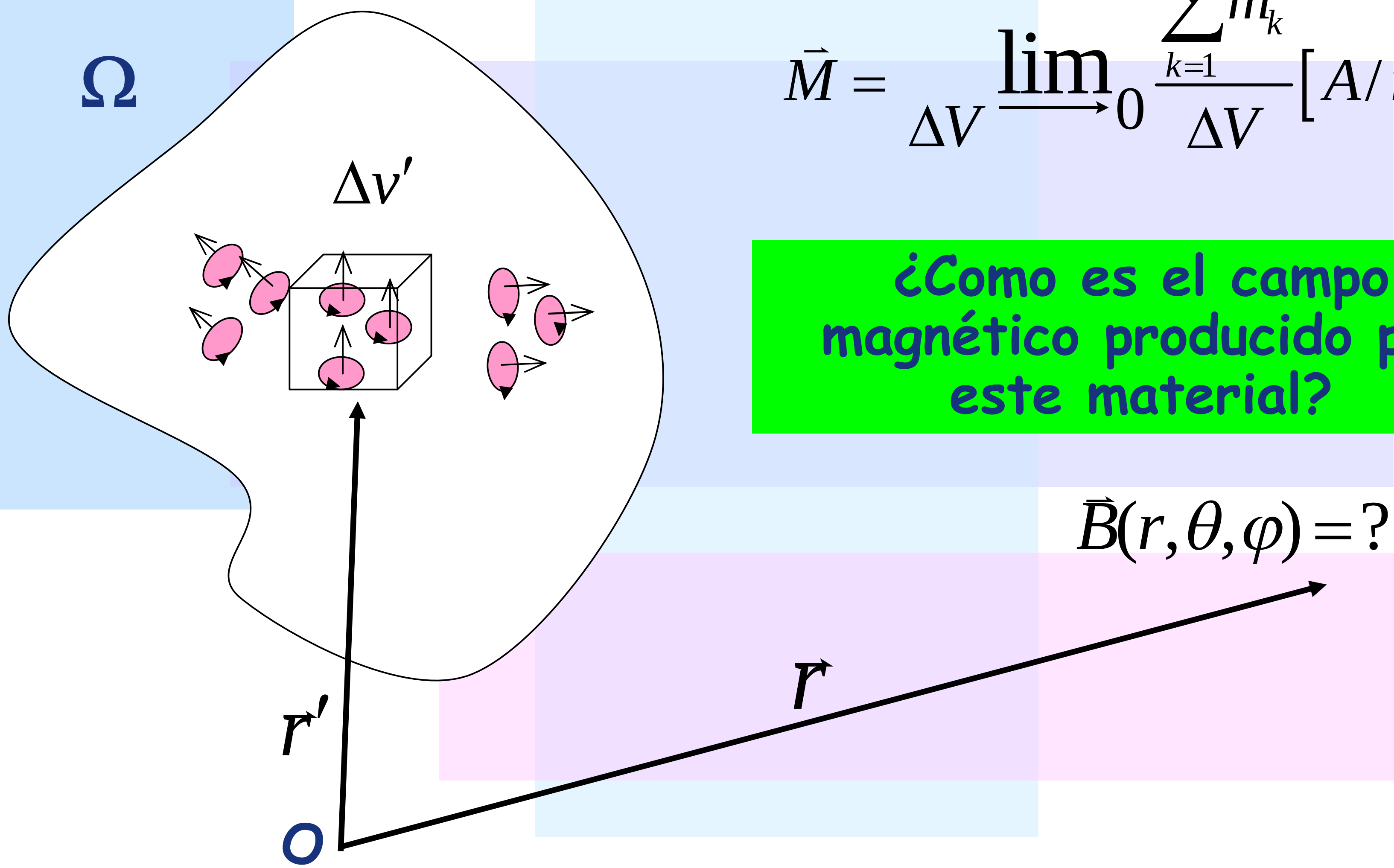
Vector magnetización



Corrientes de Magnetización

Consideremos un material magnetizado

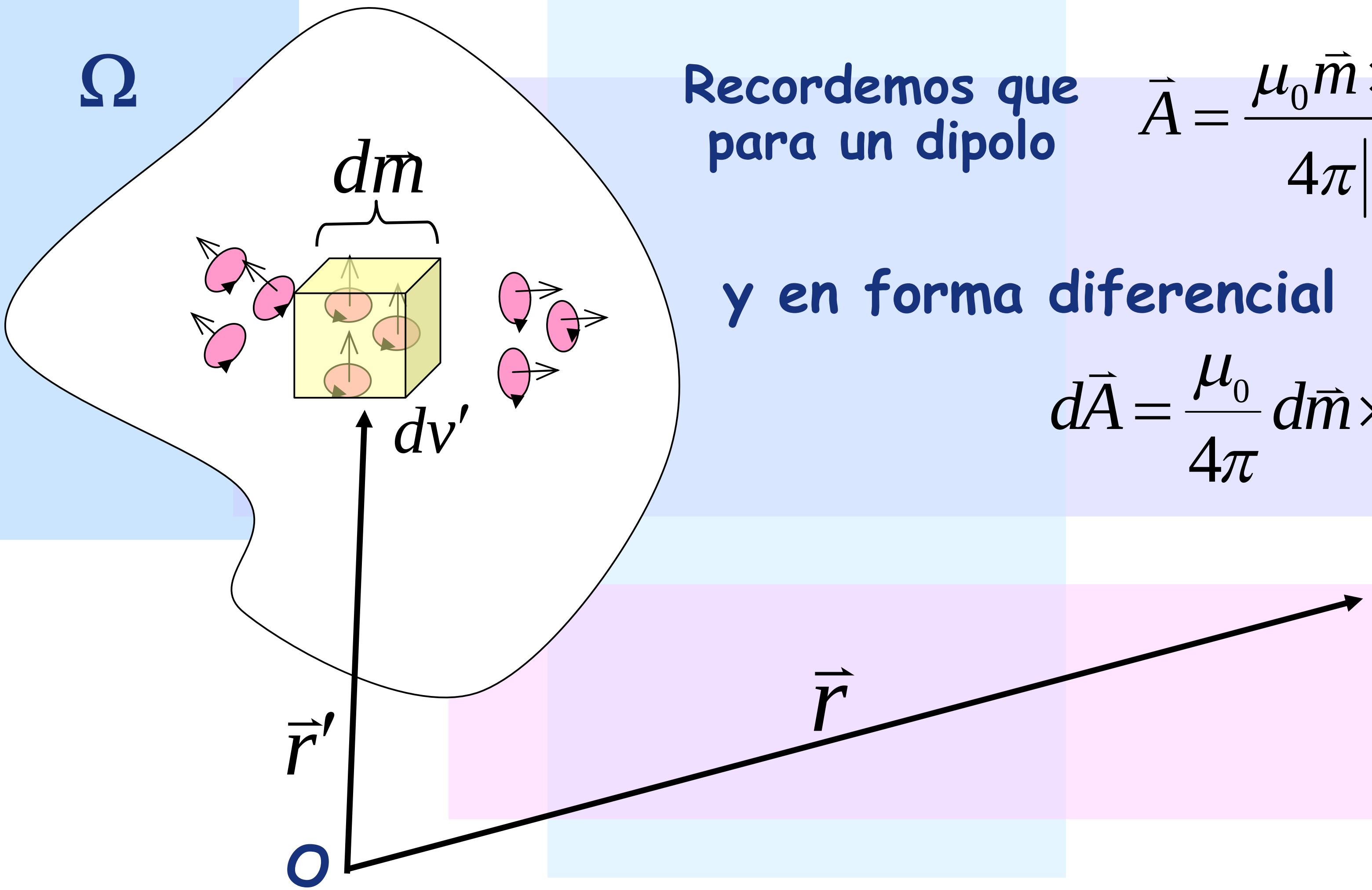
$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{m} \vec{m}_k}{\Delta V} \, [A/m]$$



¿Como es el campo magnético producido por este material?

Corrientes de Magnetización

Calcularemos el campo a partir del vector potencial magnético



Recordemos que para un dipolo

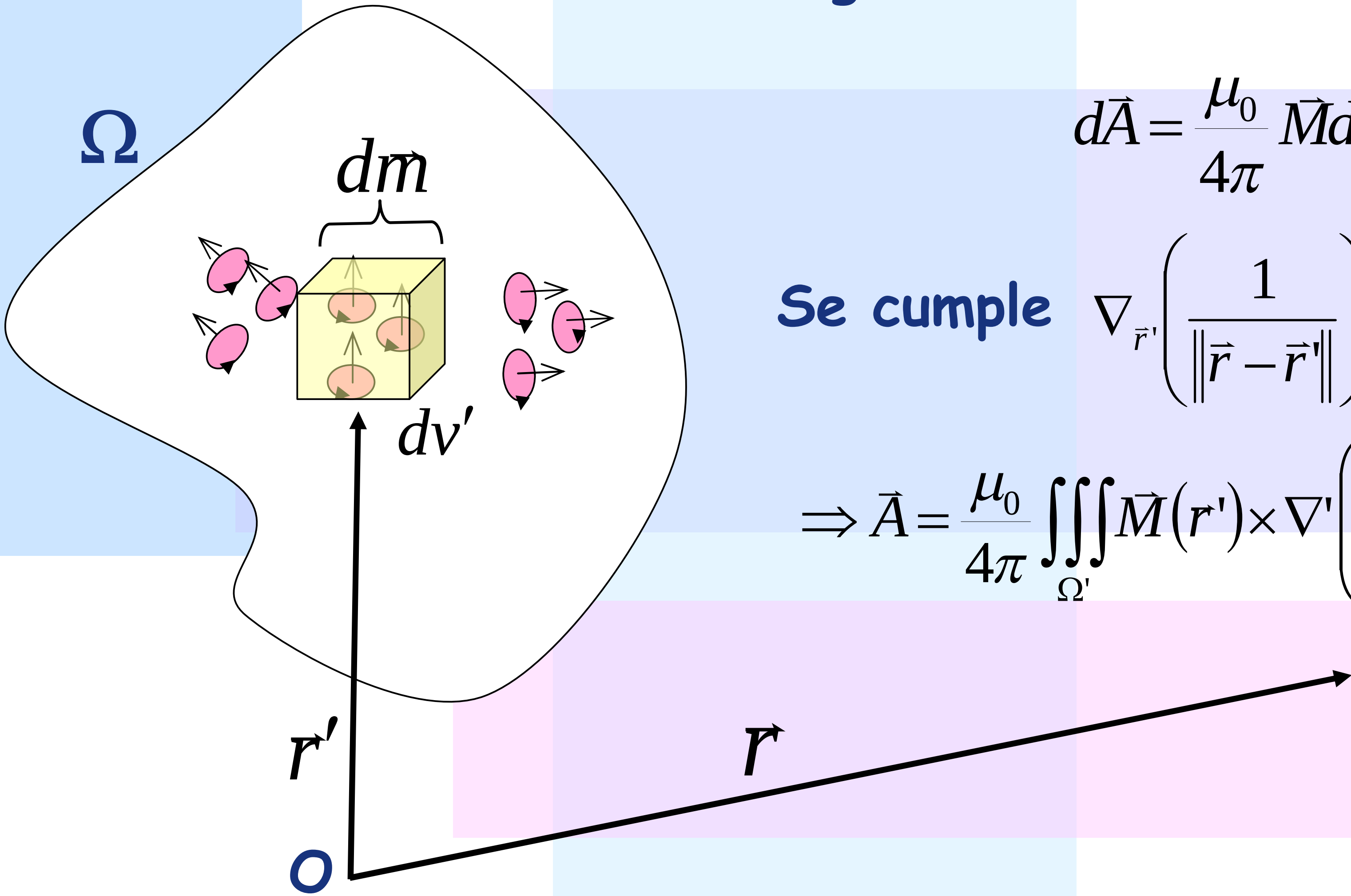
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

y en forma diferencial

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

Corrientes de Magnetización

En términos del vector magnetización $d\vec{m} = \vec{M}\,dv'$

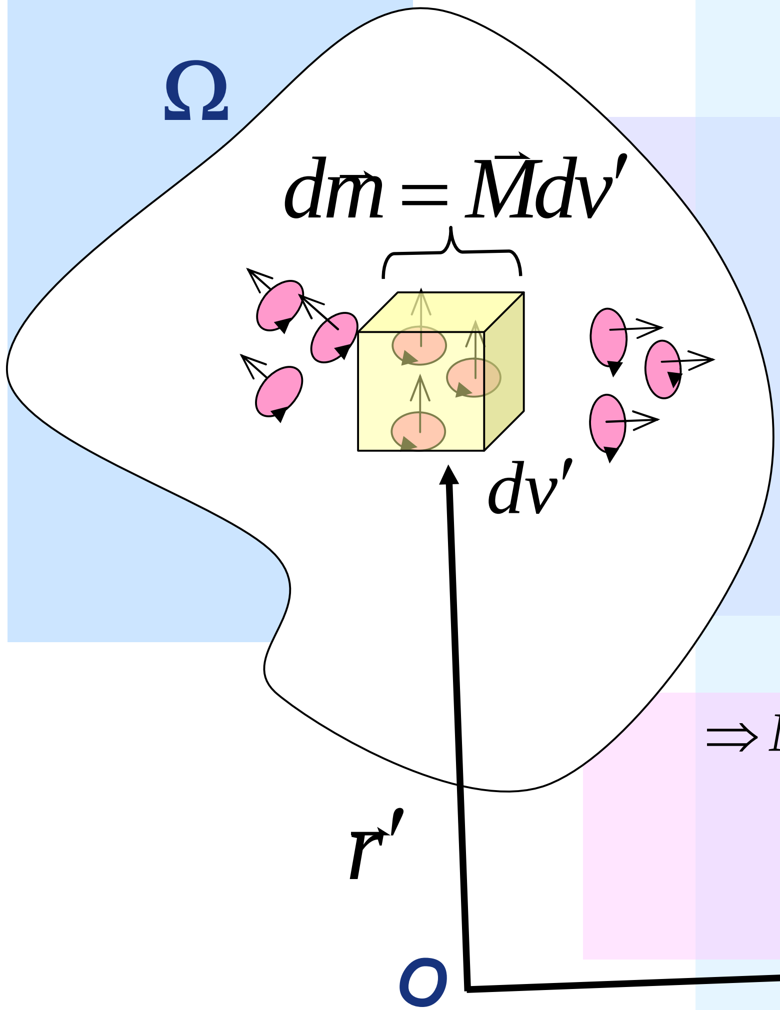


$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}dv' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

Se cumple $\nabla_{\vec{r}\,'}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\vec{M}(\vec{r}\,')\times\nabla'\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right)dv'$$

Corrientes de Magnetización



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}')\times\nabla'\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)dv'$$

Usando la propiedad

$$\nabla\times\left(f\vec{F}\right) = f\nabla\times\vec{F} + \left(\nabla f\right)\times\vec{F}$$

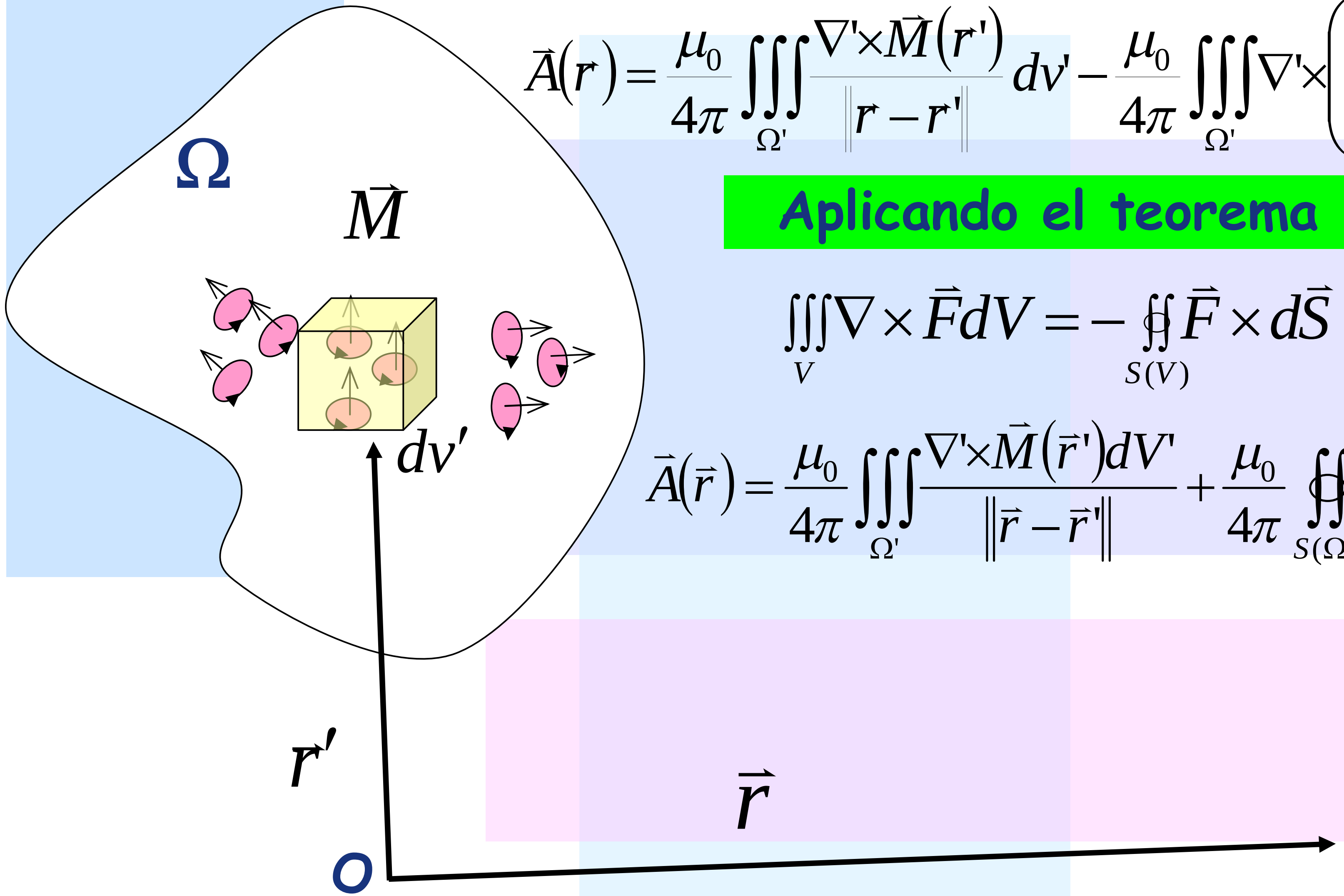
$$\nabla'\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right) = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\nabla'\times M(\vec{r}') + \nabla'\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)\times\vec{M}(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \vec{M}(\vec{r}')\times\nabla'\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right) = -\nabla'\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right) + \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')$$

$\vec{r}$

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Corrientes de Magnetización



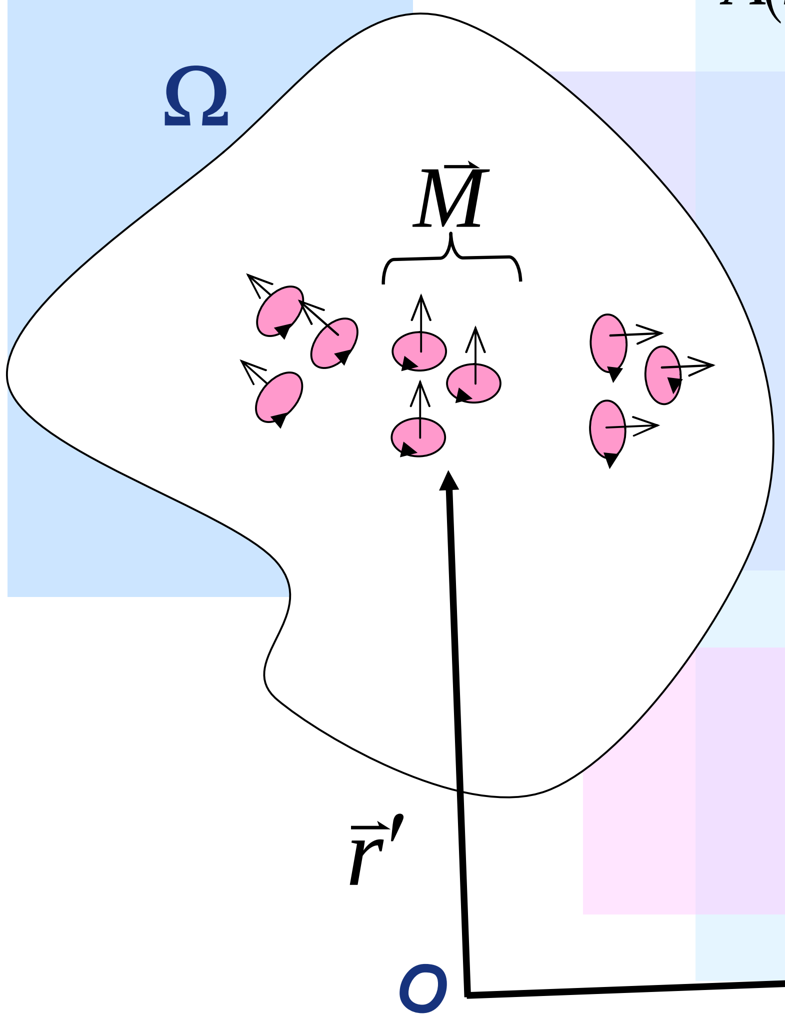
$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \frac{\nabla'\times\vec{M}(r')}{\left\| r - r' \right\|}\, dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \nabla'\times\left(\frac{\vec{M}(r')}{\left\| r - r' \right\|}\right) dv'$$

Aplicando el teorema

$$\iiint_V \nabla\times\vec{F}\, dV = -\oiint_{S(V)} \vec{F}\times d\vec{S}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \frac{\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}\,')\, dV'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega')} \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times dS'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$

Corrientes de Magnetización



$$\vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\nabla'\times\vec{M}(r')dv'}{\|r-r'\|}+\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega)}\frac{\vec{M}(r')\times ds'}{\|r-r'\|}$$

Esta expresión tiene la forma

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{J}_M dv'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}+\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega)}\frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

Con densidades de corriente

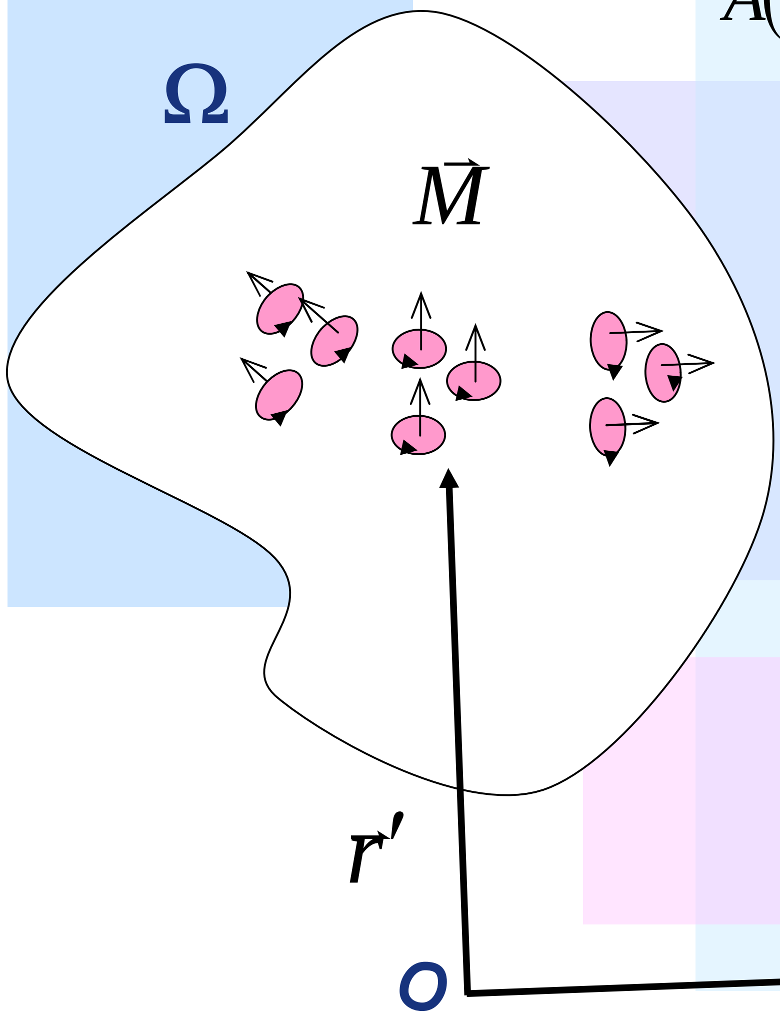
$$\vec{J}_M=\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}\,') \quad \text{en volumen}$$

$$\vec{K}_M=\vec{M}(r')\times\hat{n} \quad \text{de superficie}$$

$\vec{r}$

Corrientes de Magnetización

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}\,')dv'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega)}\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times d\vec{s}\,'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}$$



Esta expresión tiene la forma

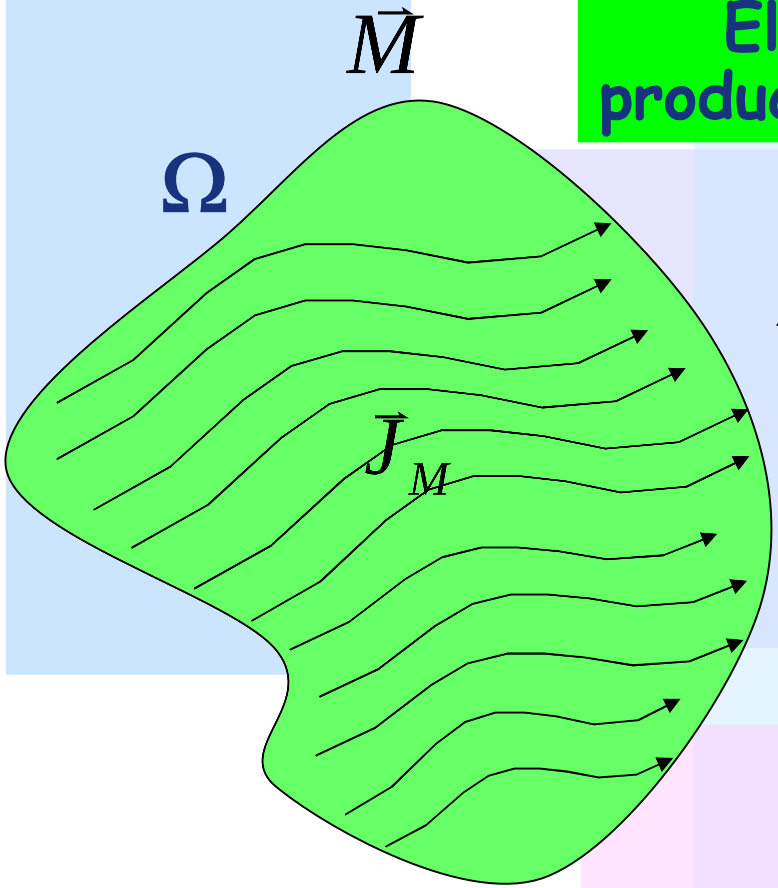
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{J}_M dv'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega)}\frac{\vec{K}_M ds'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}$$

Con densidades de corriente

$$\vec{J}_M = \nabla'\times\vec{M}(\vec{r}\,')$$ **en volumen**

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}\,')\times\vec{n}$$ **de superficie**

Corrientes de Magnetización

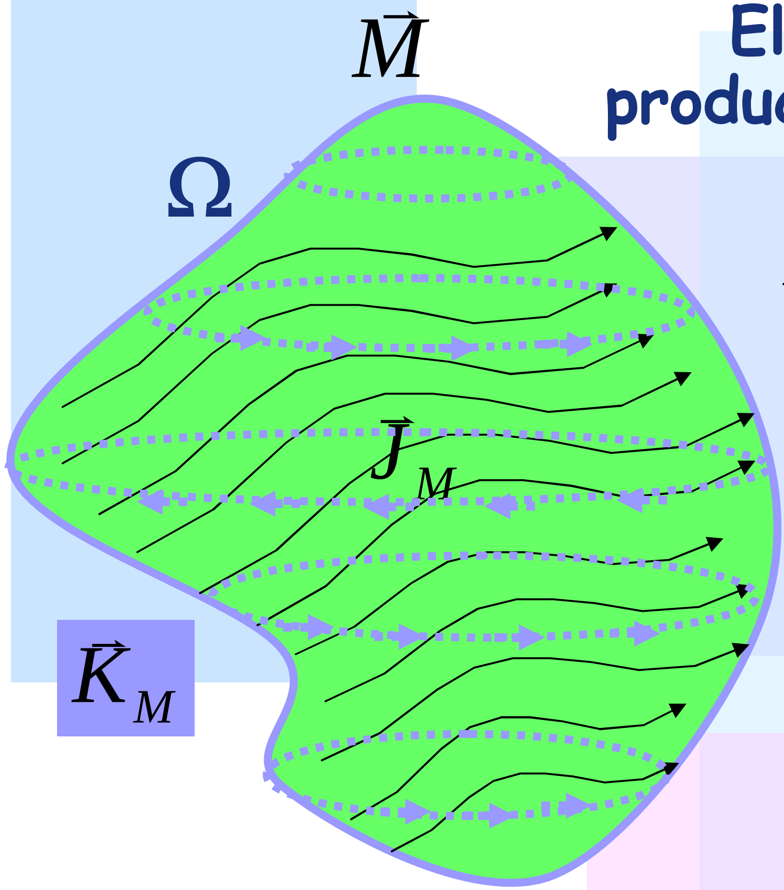


El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{J}_M\,dv'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{S(\Omega)}\frac{\vec{K}_M\,ds'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}$$

$$\vec{J}_M = \nabla'\times\vec{M}\left(\vec{r}\,'\right)$$

Corrientes de Magnetización



El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es

$$\vec{A}(r) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{J}_M\,dv'}{\left\|r - r'\right\|}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\!\!\oint_{S(\Omega)}\frac{\vec{K}_M\,ds'}{\left\|r - r'\right\|}}$$

Potencial producido por una densidad de corriente en volumen

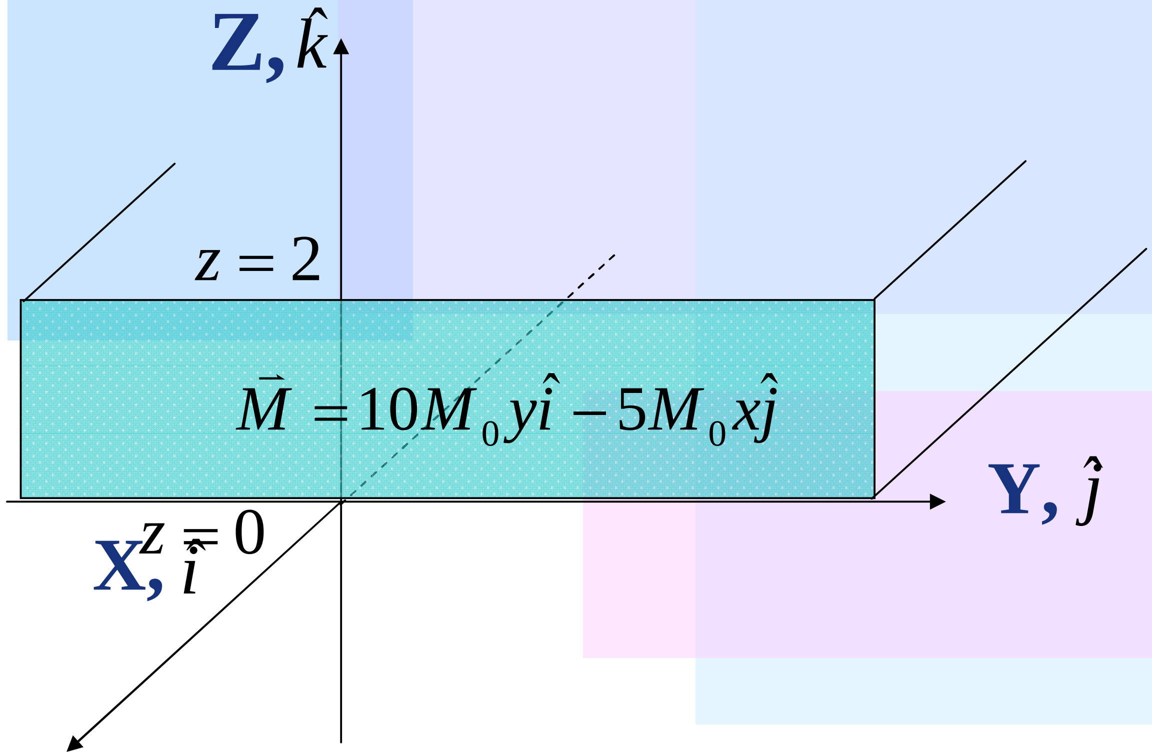
Potencial producido por una densidad de corriente de superficie

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}\,')$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}\,') \times \vec{n}$$

Ejemplo Corrientes de Magnetización

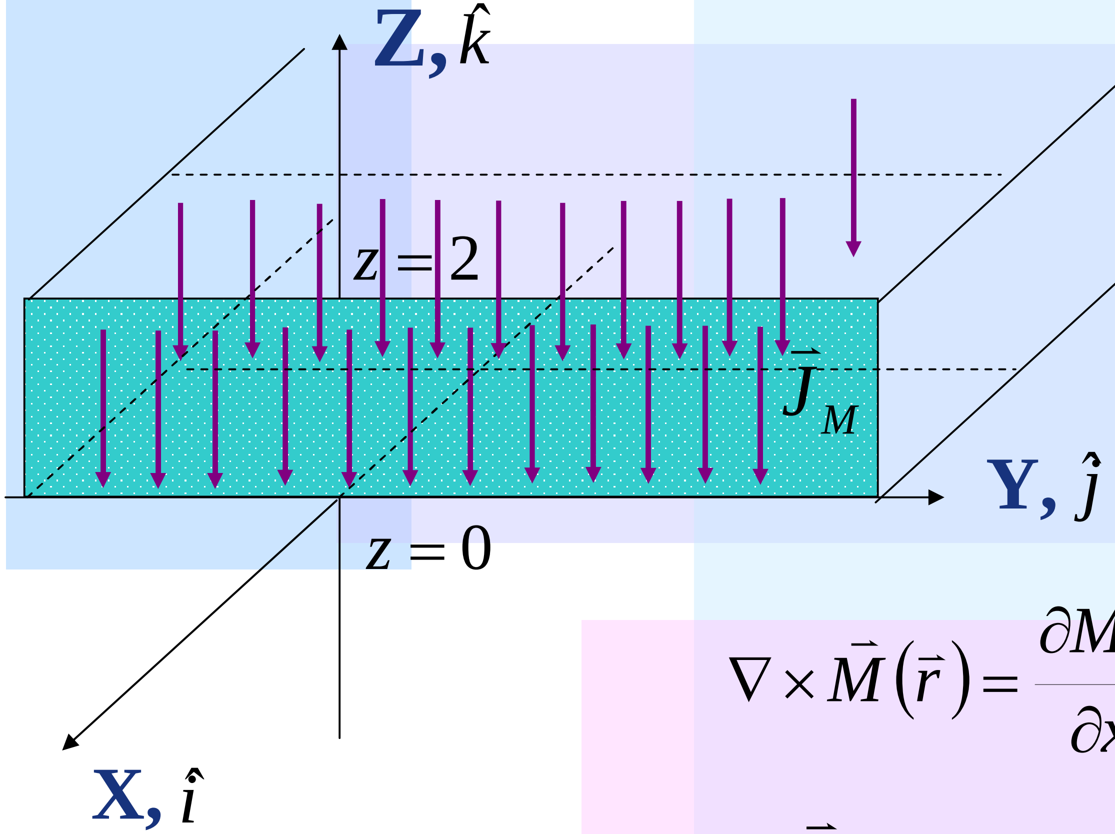
Considere una región del espacio llena de un medio material magnetizado, el cual posee una magnetización $\vec{M} = 10M_0 y\hat{i} - 5M_0 x\hat{j}$. Se pide determinar las corrientes de magnetización



$$\vec{J}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = ?$$

Ejemplo Corrientes de Magnetización



$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

$$\vec{M} = 10M_0 y\hat{i} - 5M_0 x\hat{j}$$

$$\vec{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

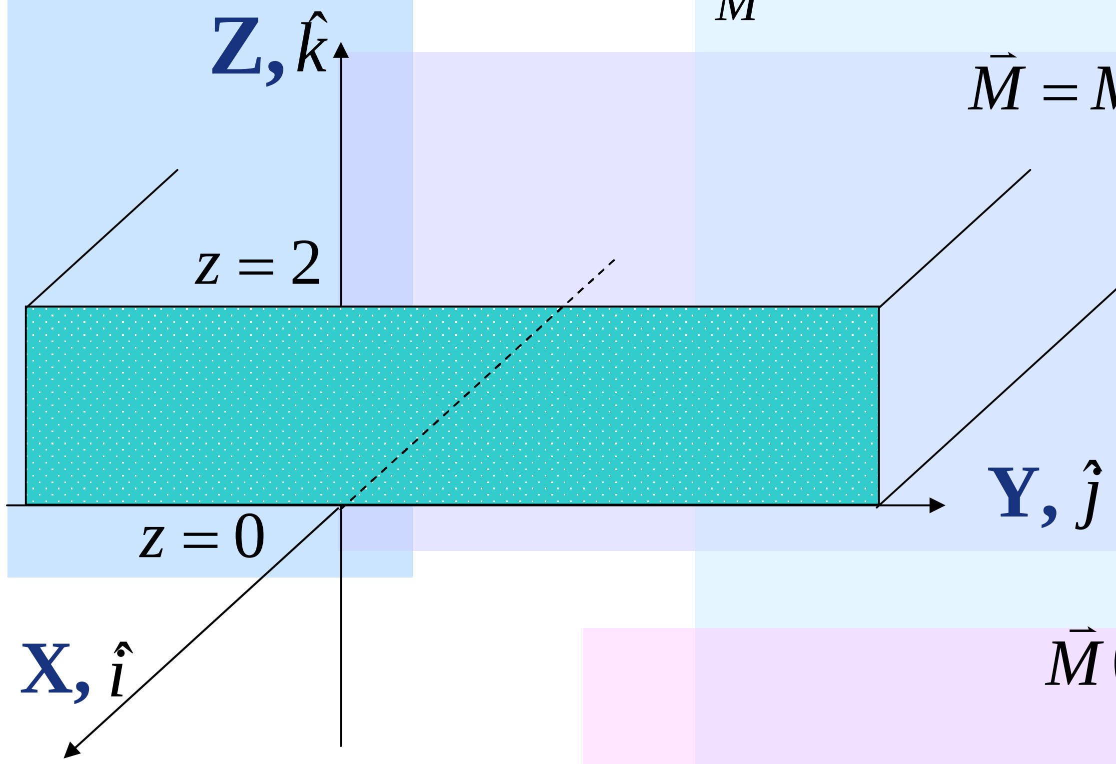
$$\nabla \times \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\partial M_y}{\partial x}\hat{k} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\hat{k} + \frac{\partial M_x}{\partial z}\hat{j} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_M = M_0(-5\hat{k} - 10\hat{k}) = -15M_0\hat{k}$$

Ejemplo Corrientes de Magnetización

$$\vec{K}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$



$$\vec{M} = M_0(10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x\hat{i} + M_y\hat{j}$$

$$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{k} & en \quad z = 0 \\ \hat{k} & en \quad z = 2 \end{cases}$$

$$\vec{M}(\vec{r})\Big|_{z=2} \times \hat{n} = -M_x\hat{j} + M_y\hat{i}$$

$$\vec{M}(\vec{r})\Big|_{z=2} \times \hat{n} = M_0(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$

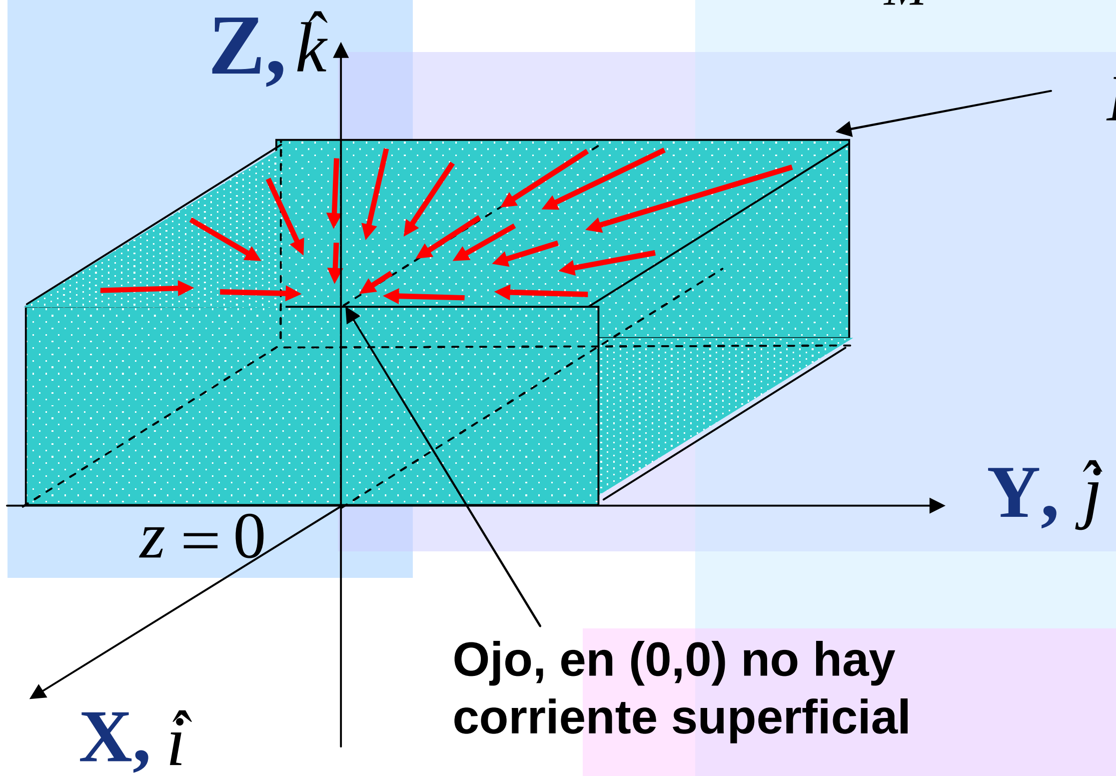
$$\vec{M}(\vec{r})\Big|_{z=0} \times \hat{n} = M_x\hat{j} - M_y\hat{i} \Rightarrow \qquad \vec{M}(\vec{r})\Big|_{z=0} \times \hat{n} = M_0(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

Ejemplo Corrientes de Magnetización

$$\vec{K}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

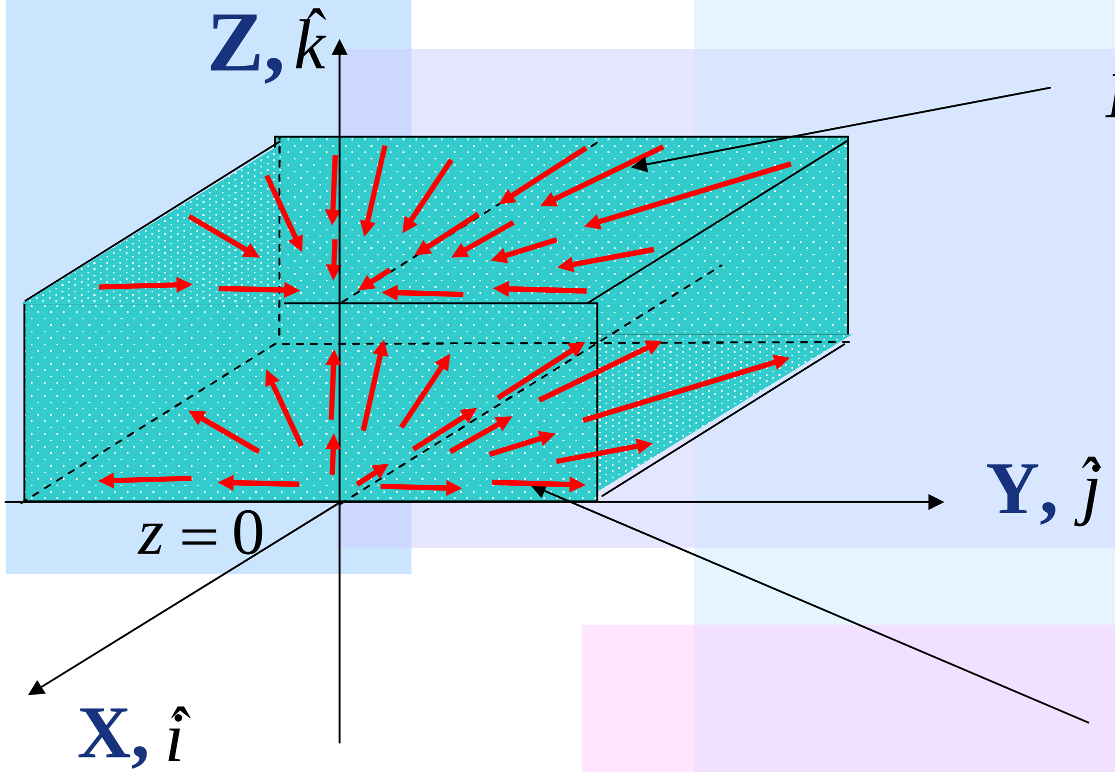
$$\vec{K}_M \Big|_{z=2} = M_0(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$



Ojo, en (0,0) no hay corriente superficial

Ejemplo Corrientes de Magnetización

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$



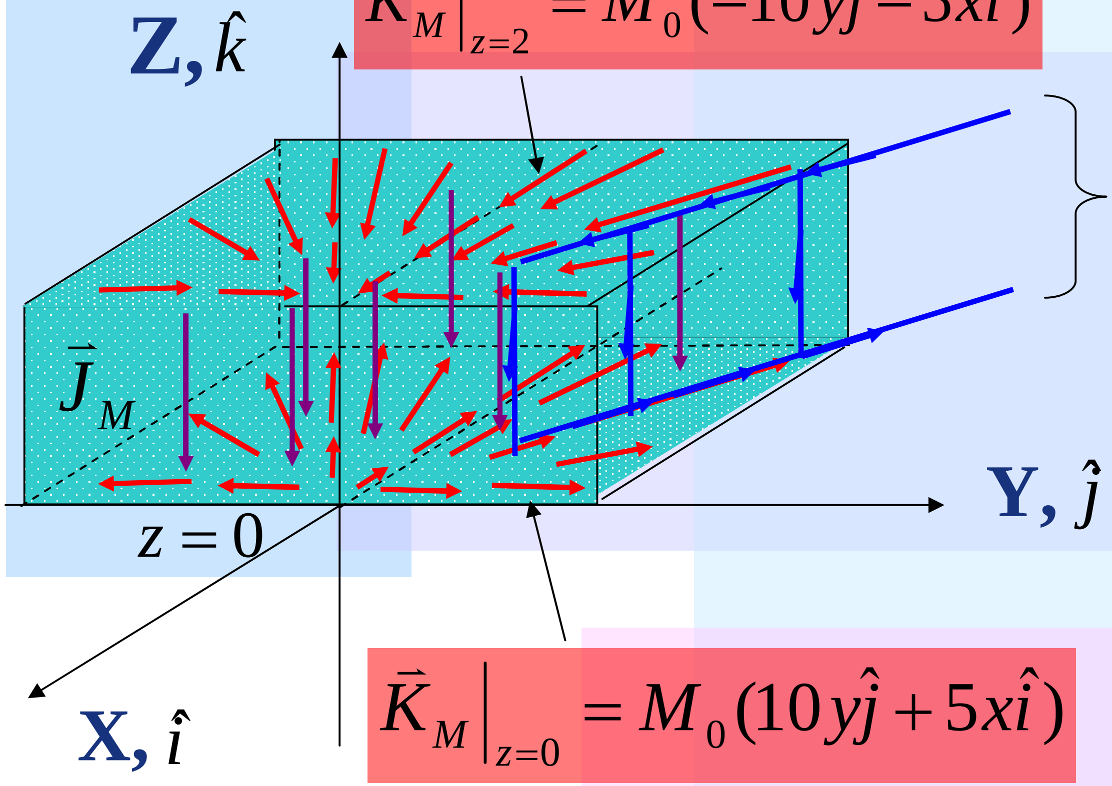
$$\vec{K}_M\Big|_{z=2} = M_0(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$

$$\vec{K}_M\Big|_{z=0} = M_0(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

Ejemplo Corrientes de Magnetización

$$\vec{K}_M\Big|_{z=2} = M_0(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

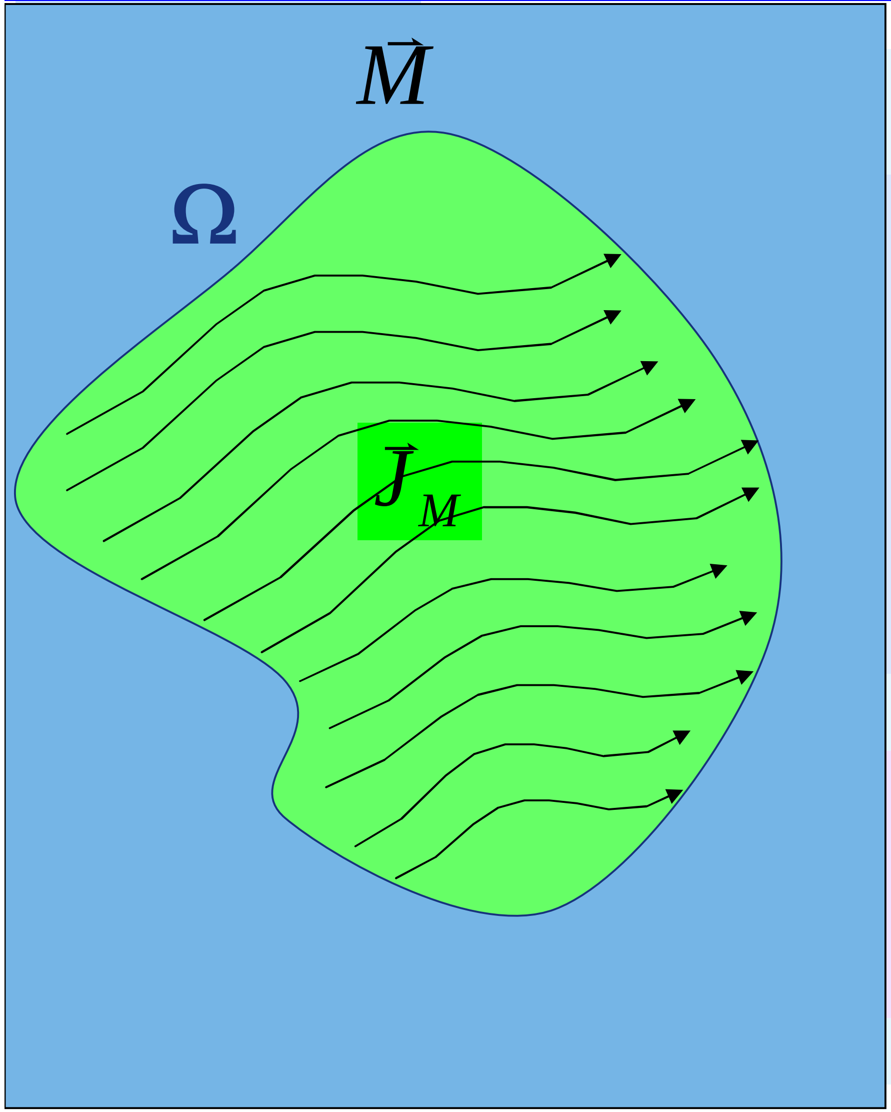


Circuito típico de corriente de magnetización al interior del material (se cierra en el infinito)

$$\vec{K}_M\Big|_{z=0} = M_0(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

Notar que esta corriente no se debe a los electrones libres que circulan en un conductor metálico !

Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación de Maxwell en el espacio vacío es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

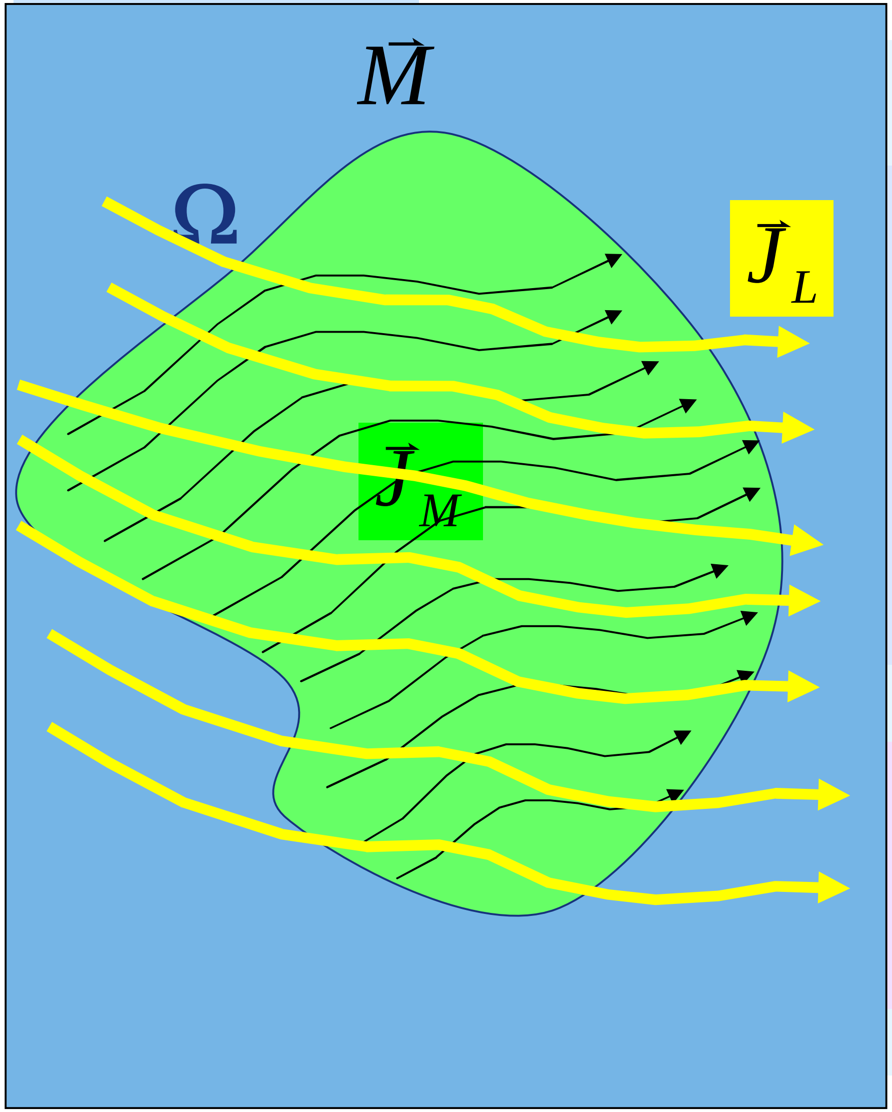
En general pueden haber dos tipos de corrientes en volumen

$$\vec{J}_M$$

Corriente de magnetización

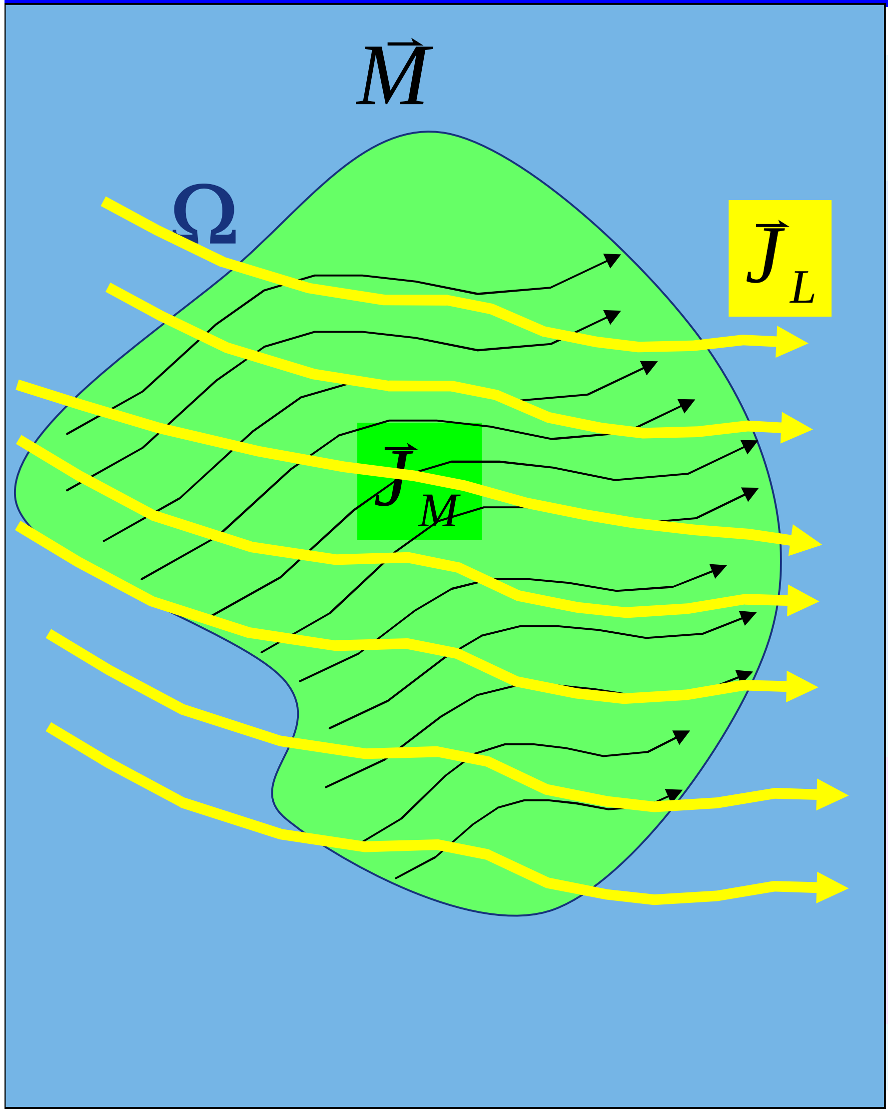
$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$

Permeabilidad magnética



$$\underbrace{\vec{J}_L}_{\text{Corriente libre}}$$

Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos tipos de corrientes en volumen

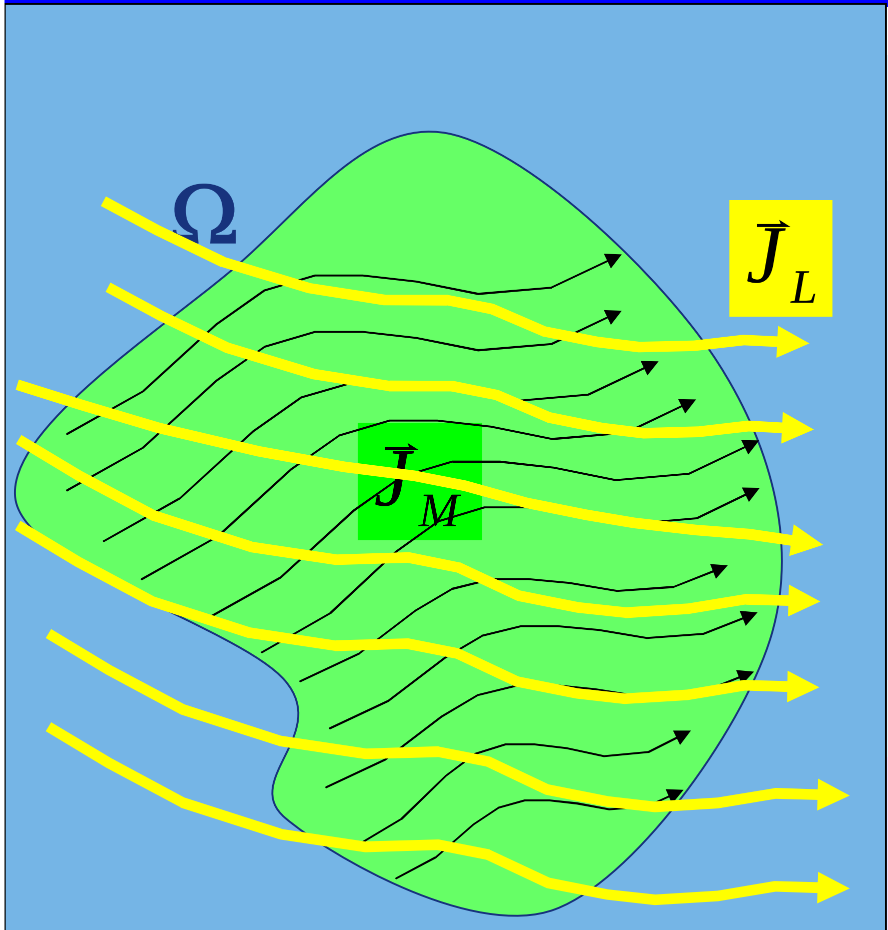
$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

Corriente libre

Corriente de magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$

Permeabilidad magnética



$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

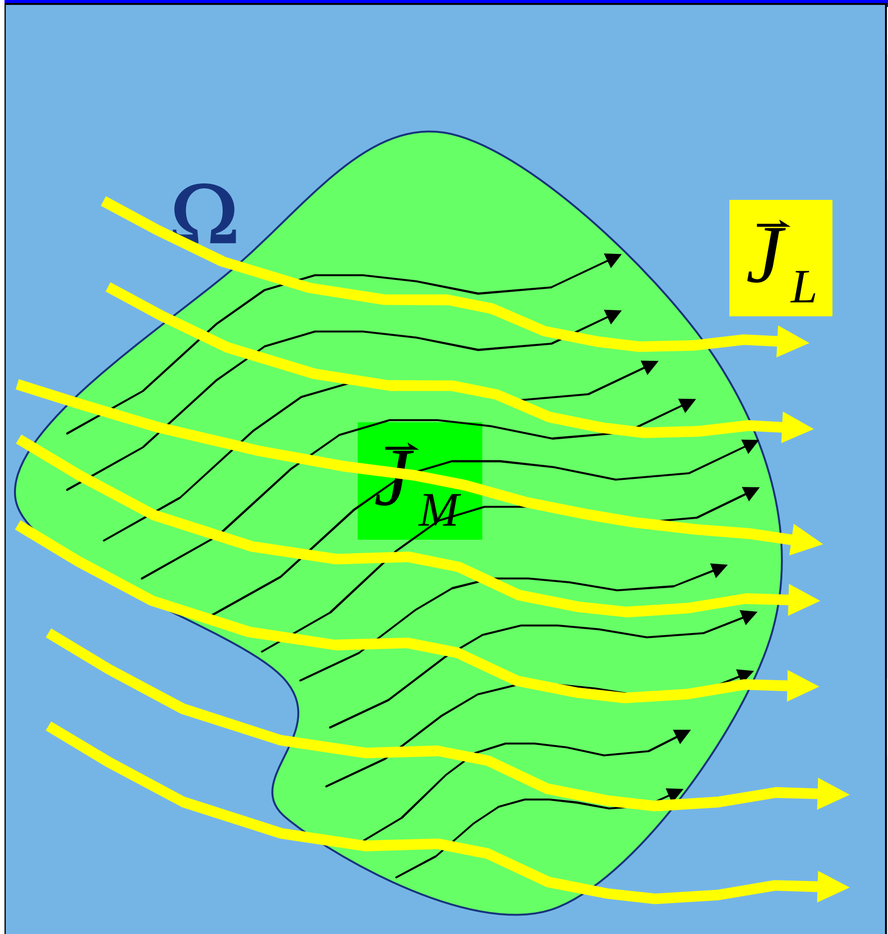
$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_L + \nabla \times \vec{M}$$

La 4ta ecuación de Maxwell es

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$$

Permeabilidad magnética



$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

Experimentalmente se encuentra que

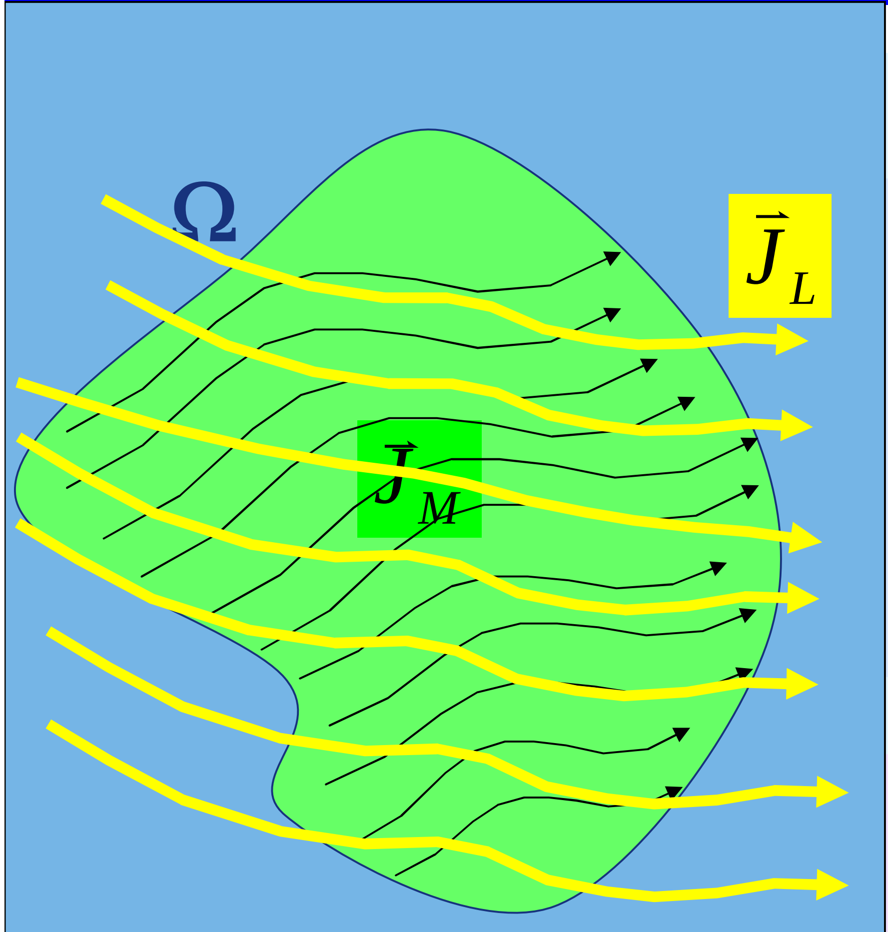
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_R} \vec{H}$$

permeabilidad relativa del material

$$\therefore \vec{B} = \mu_0 \mu_R \vec{H}$$

Permeabilidad magnética



$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

$$\therefore \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Permeabilidad magnética del material

$$\mu = \mu_R \mu_0$$

Clasificación de los Materiales Magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

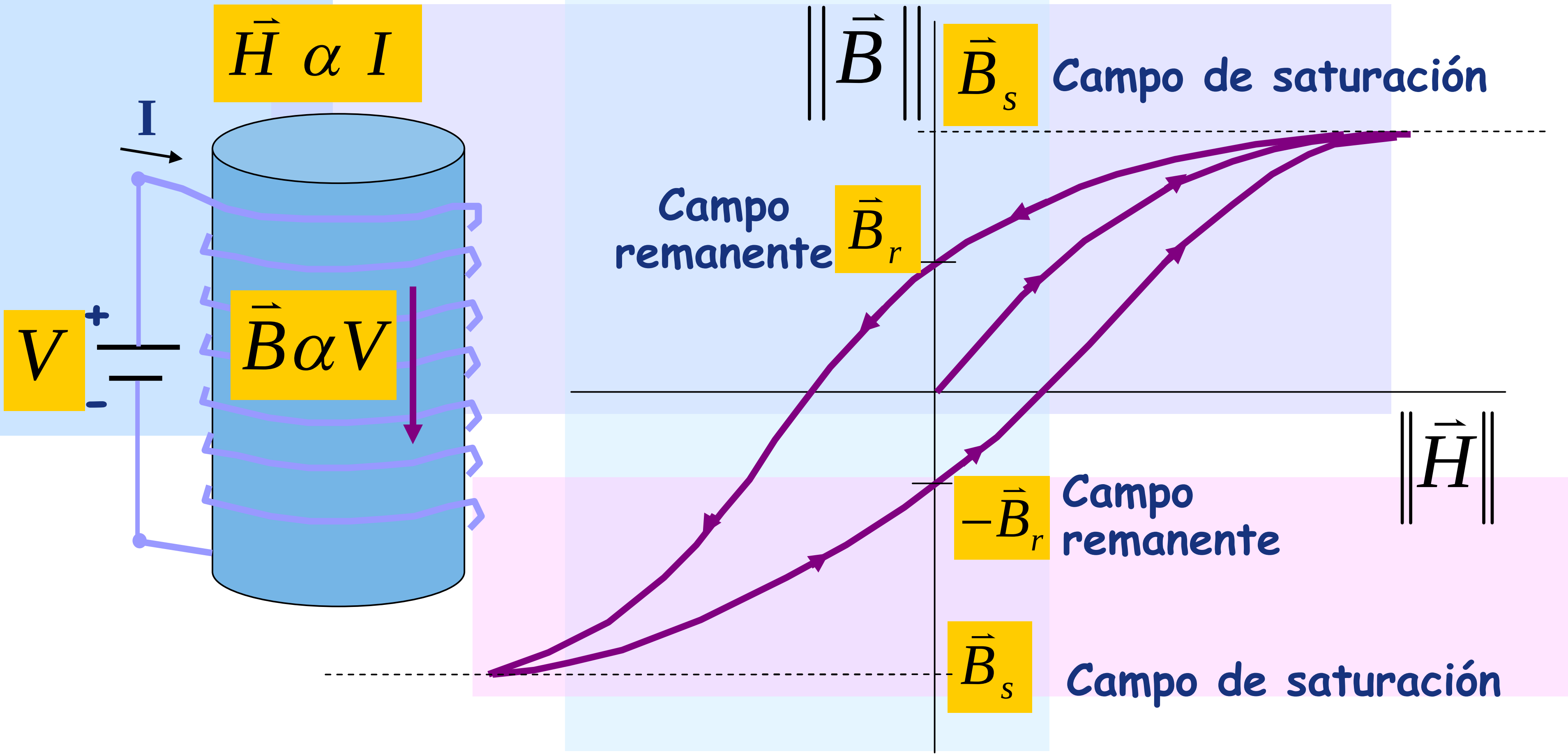
$$\mu = \mu_R\mu_0$$

Materiales magnéticos

- **Materiales diamagnéticos**: $\chi_m < 0, \mu_r \le 1$
- **Materiales paramagnétic**: $\chi_m > 0, \mu_r \ge 1$
- **Materiales Ferromagnéticos**: $\chi_m >> 0, \mu_r >> 1$

Ciclo de histéresis

$\mu = \mu_R \mu_0$ se puede determinar experimentalmente



Clasificación de los Materiales Magnéticos

Material	
Diamagnéticos	
Bismuto	0.999833
Mercurio	0.999968
Plata	0.9999736
Plomo	0.9999831
Cobre	0.9999906
Agua	0.9999912
Hidrógeno (s.t.p.)	≈1.0
Paramagnéticos	
Oxigeno (s.t.p.)	0.999998
Aire	1.00000037
Aluminio	1.000021
Tungsteno	1.00008
Platino	1.0003
Manganeso	1.001
Ferromagnéticos	
Cobalto	250
Níquel	600
Hierro Suave	5000
Hierro-Silicio	7000