Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 16
Magnetostática-I

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

Introducción

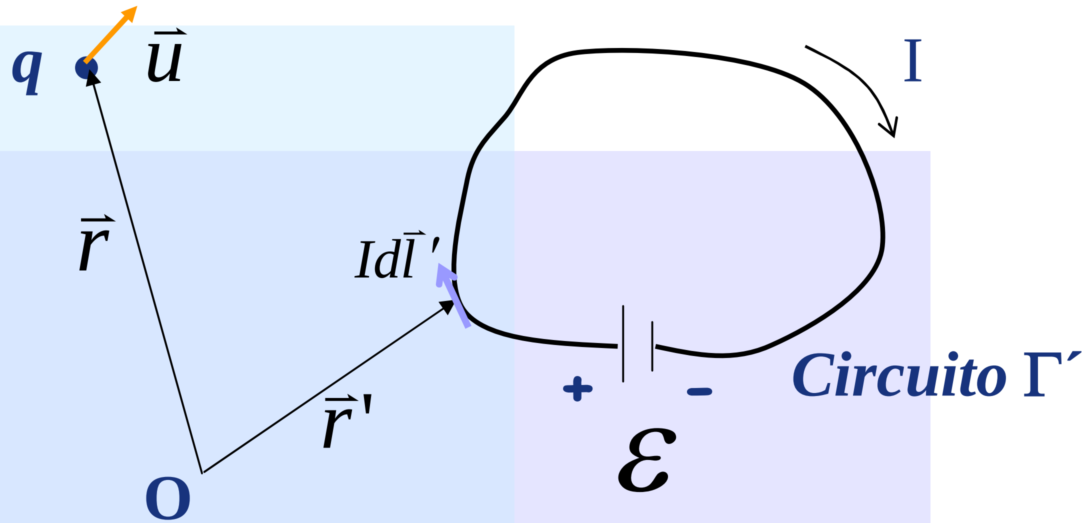
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Corrientes constantes

Estudiaremos primero régimen estacionario

Fuerza sobre una carga

Fuerza sobre q

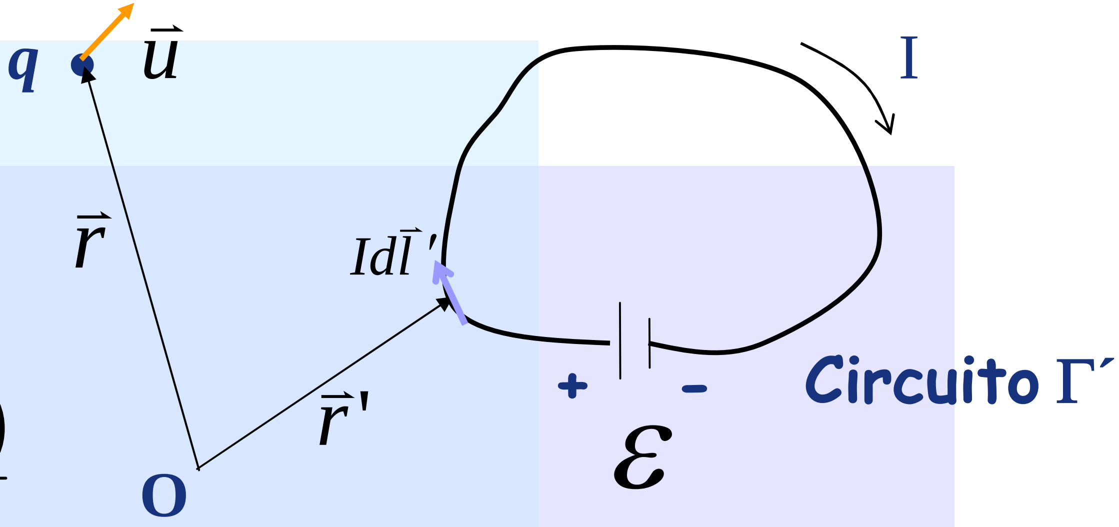


Se encuentra experimentalmente que

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$ permeabilidad del aire (constante)

Campo magnético



$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

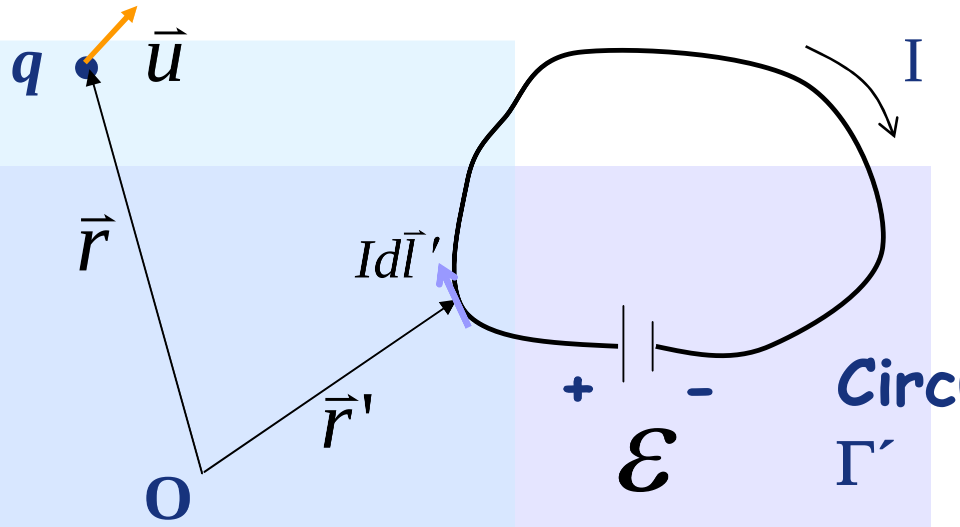
Se define el campo magnético producido por circuito Γ´

$$\boxed{\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}}$$

Fuerza de Lorentz

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$



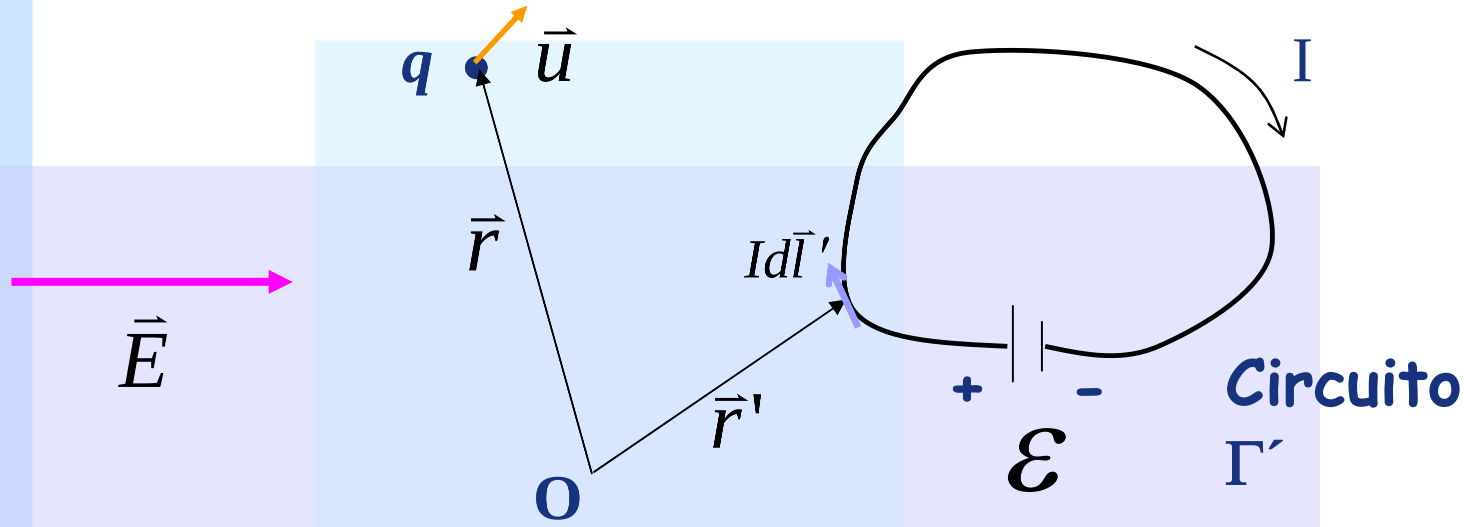
Unidades del campo

$$[F] = [q][V][B] \Rightarrow [B] = \frac{[F]}{[q][V]} = \frac{[N]}{[C][m/seg]}$$

$$1\,Tesla = [T] = \left[\frac{N}{C \times m/seg}\right]$$

$$1[T] = 10^4[G]Gauss$$

Fuerza de Lorentz



Cuando además hay un campo eléctrico la Fuerza de Lorentz es

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$$

Ejemplo: Fuerza sobre una carga

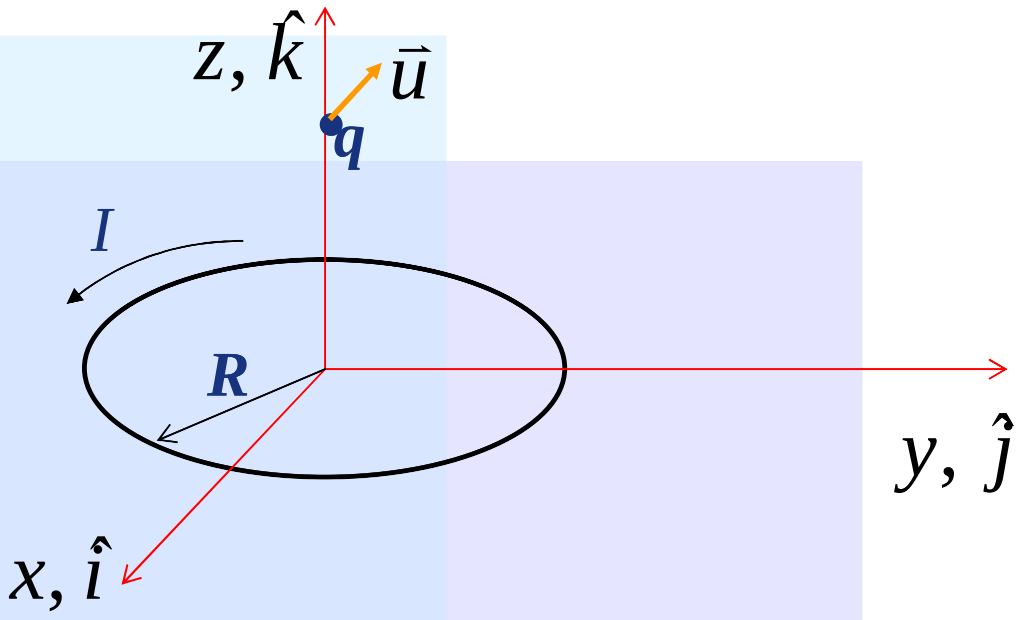
Calcular la fuerza sobre la carga q en los casos:

$$\vec{u} = 0$$

$$\vec{u} = v_o \hat{k}$$

$$\vec{u} = v_o \hat{j}$$

$$\vec{u} = v_o \hat{i}$$



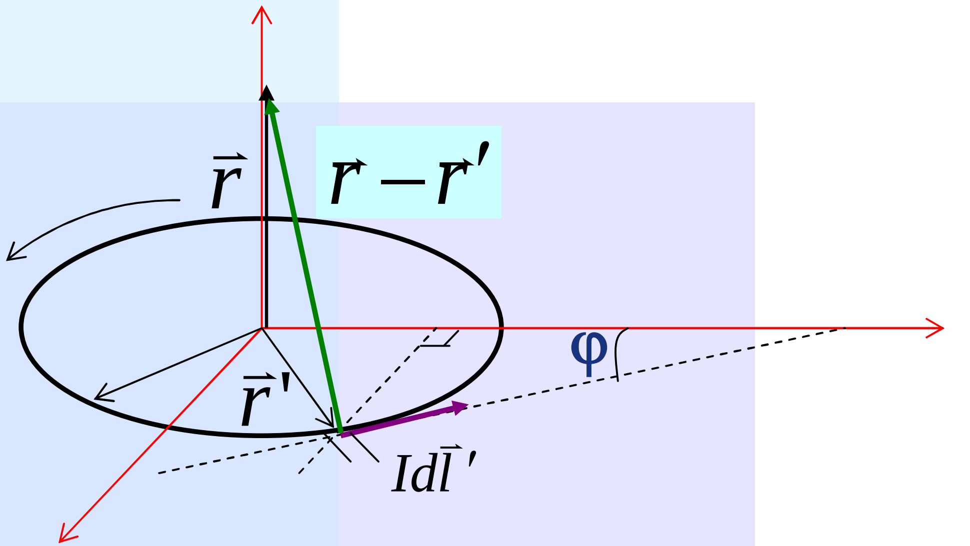
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Regla de la mano derecha

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$$

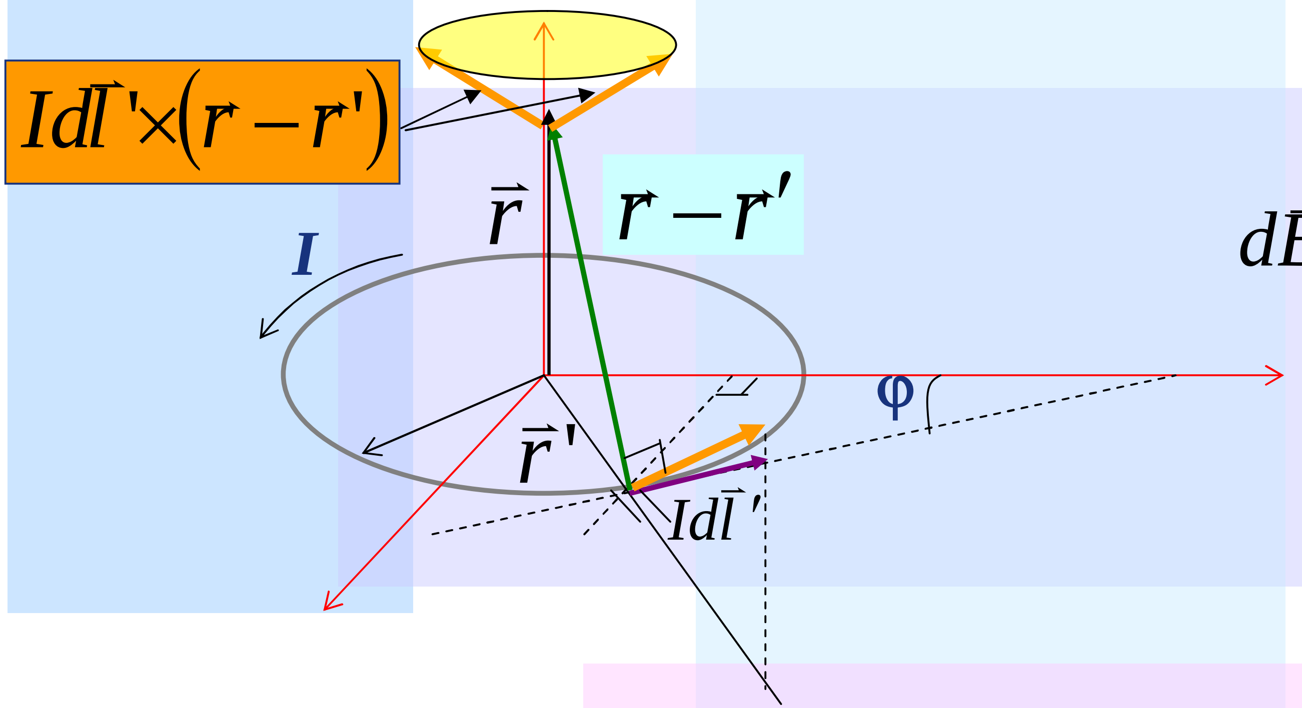
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$$



Dirección de campo está dado por el producto

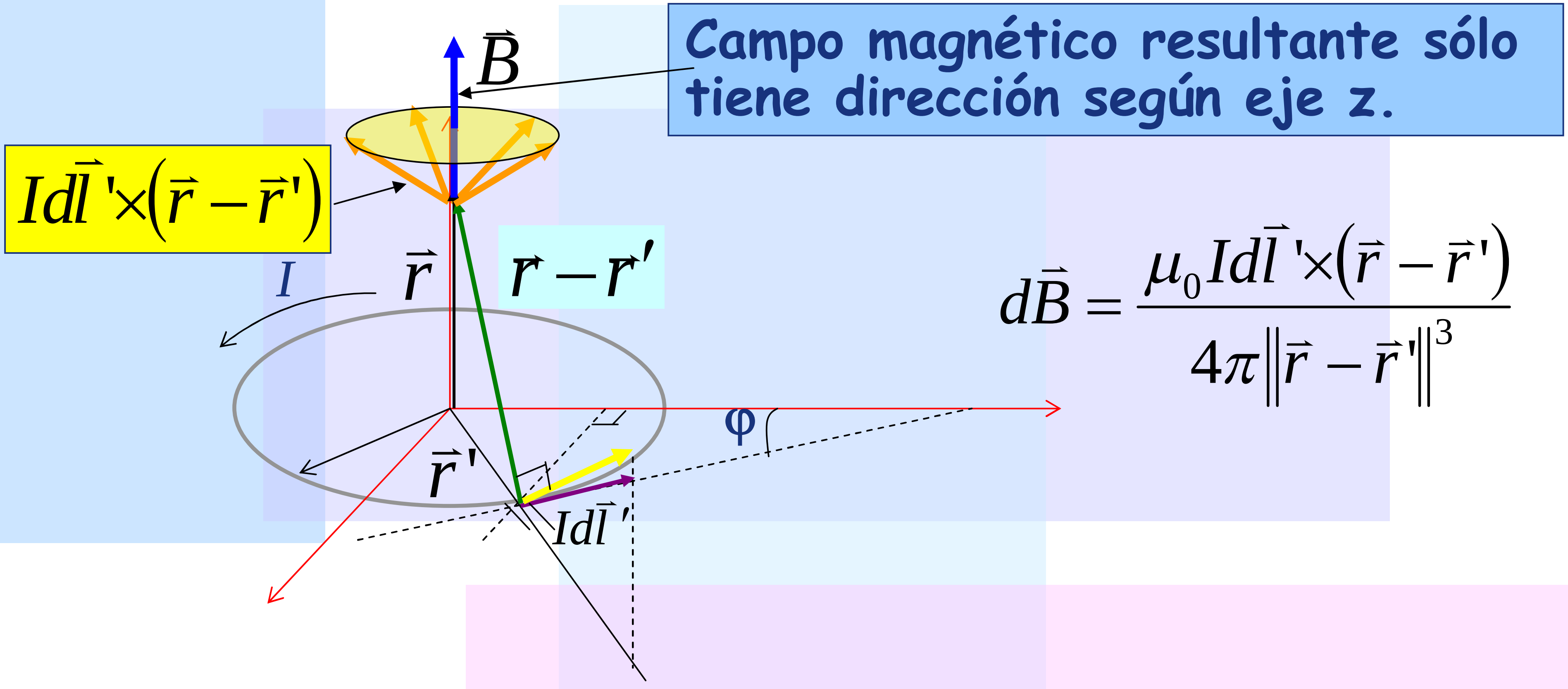
$$I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

Regla de la mano derecha



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r}-\vec{r}\,' \right\|^3}$$

Regla de la mano derecha

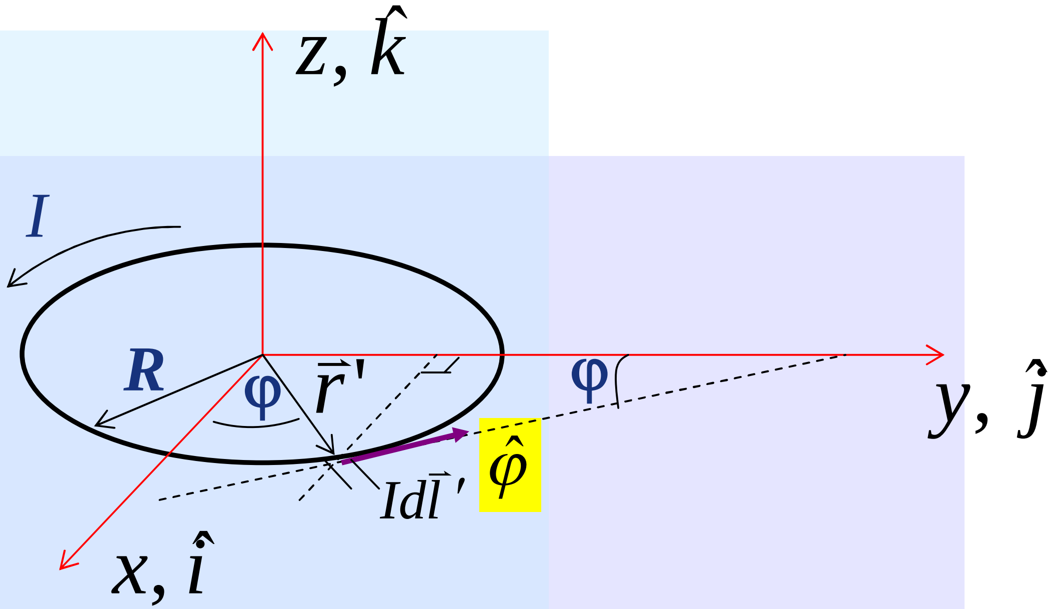


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}$$

Ejemplo

Calculemos $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

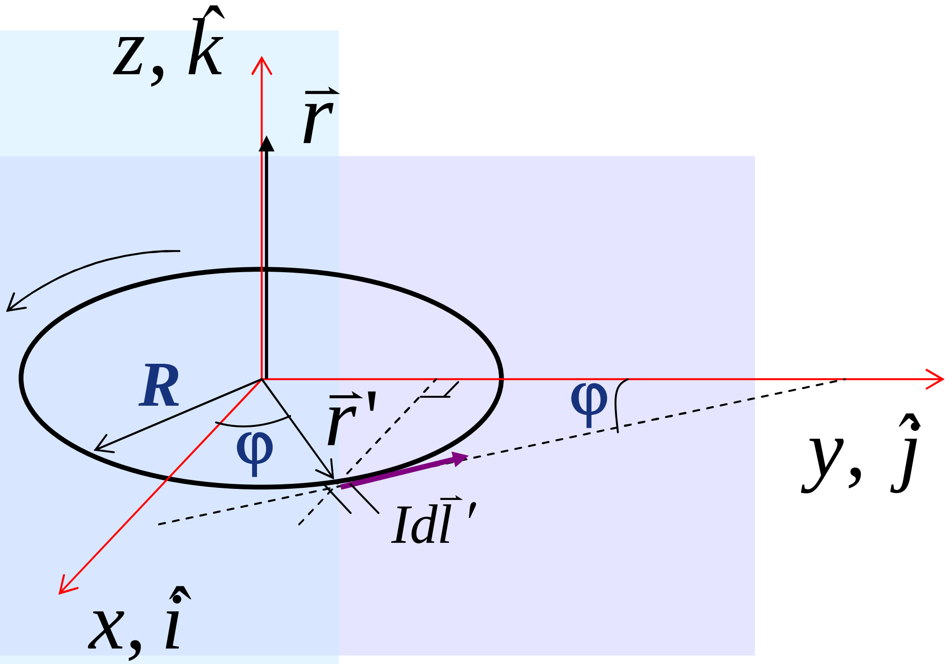


$$Id\vec{l}\,' = Idl'\hat{\varphi} = Idl'\left(-\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}\right)$$

Ejemplo

Calculemos $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$



$$\vec{r}\,' = R\hat{\rho} = R(\cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j})$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = -R\cos\varphi\,\vec{i} - R\sin\varphi\,\hat{j} + z\hat{k}$$

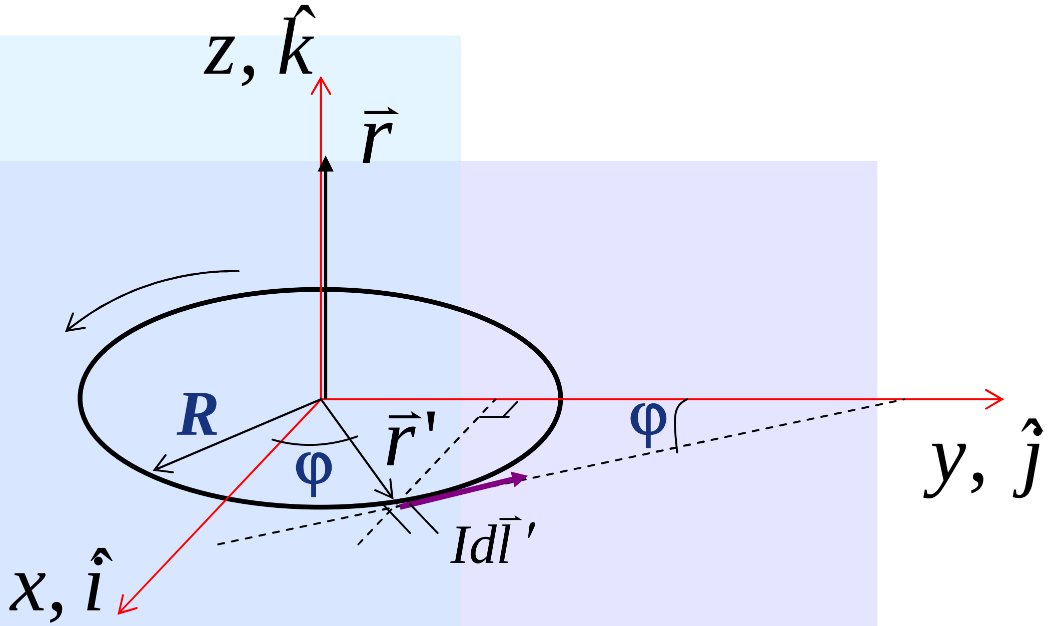
$$\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\| = \left[R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi + z^2 \right]^{1/2}$$

$$\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\| = \left[R^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

Ejemplo

Calculemos $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$



Circuito Γ'

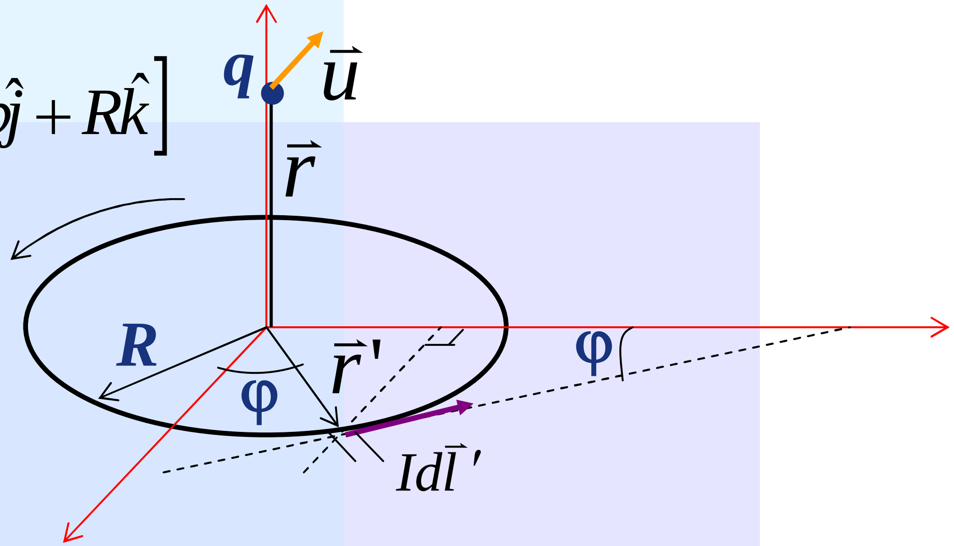
$\varphi = [0, 2\pi]$

$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{\left[R^2 + z^2\right]^{3/2}} \left(-\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j}\right) \times \left(-R\cos\varphi \hat{i} - R\sin\varphi \hat{j} + z\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IRd\varphi}{4\pi\left[R^2 + z^2\right]^{3/2}} \left[R\sin^2\varphi \hat{k} + z\sin\varphi \hat{j} + R\cos^2\varphi \hat{k} + z\cos\varphi \hat{i}\right]$$

Ejemplo

$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\left[z\cos\varphi\hat{i} + z\sin\varphi\hat{j} + R\hat{k}\right]$$



$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 2\pi}{4\pi\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

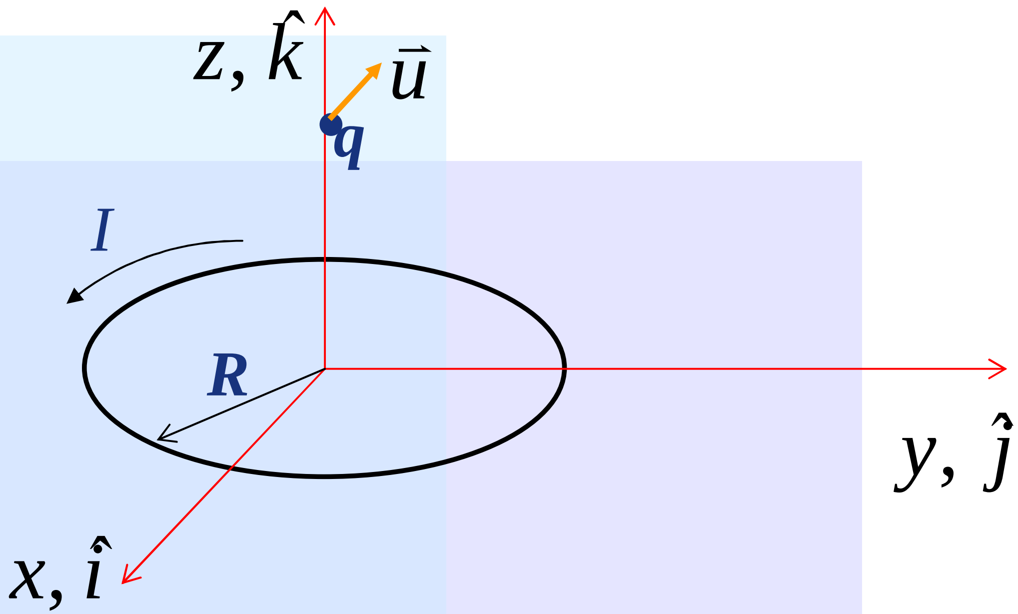
Campo sólo tiene componente según z!

$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{u} \times \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{F} = \frac{q\mu_0 I R^2}{2\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\vec{u}\times\hat{k}$$

Ejemplo: Fuerza sobre una carga

$$\vec{F} = \frac{q\mu_0 I R^2}{2\left[R^2 + z^2\right]^{3/2}} \vec{u} \times \hat{k}$$



La fuerza sobre la carga q en cada caso es:

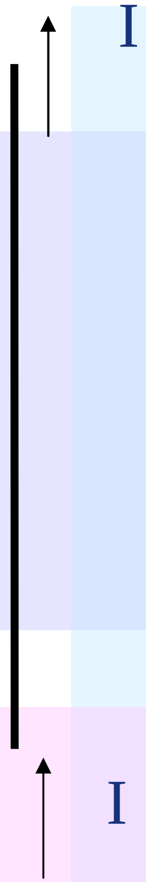
$$\vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\vec{u} = v_o \hat{k} \quad \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\vec{u} = v_o \hat{i} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{q\mu_0 I R^2}{2\left[R^2 + z^2\right]^{3/2}} v_0 \hat{j}$$

$$\vec{u} = v_o \hat{j} \Rightarrow \vec{F} = \frac{q\mu_0 I R^2}{2\left[R^2 + z^2\right]^{3/2}} v_0 \hat{i}$$

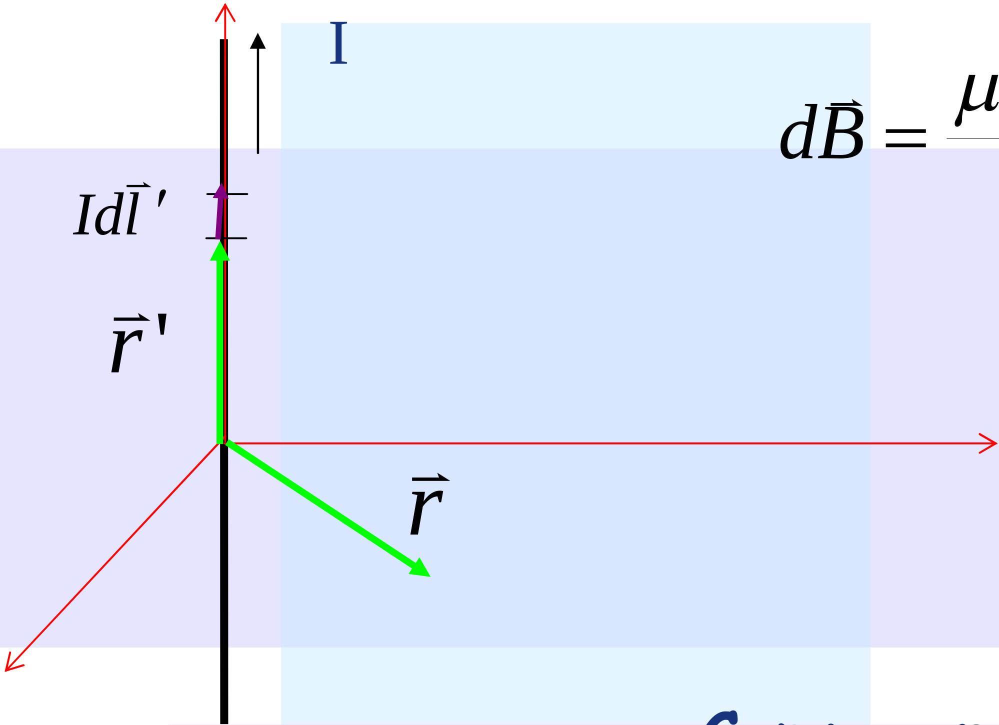
Campo Magnético Linea Infinita



$$\vec{B} = ?$$

Dado que el conductor es infinito, el campo no varía según z.

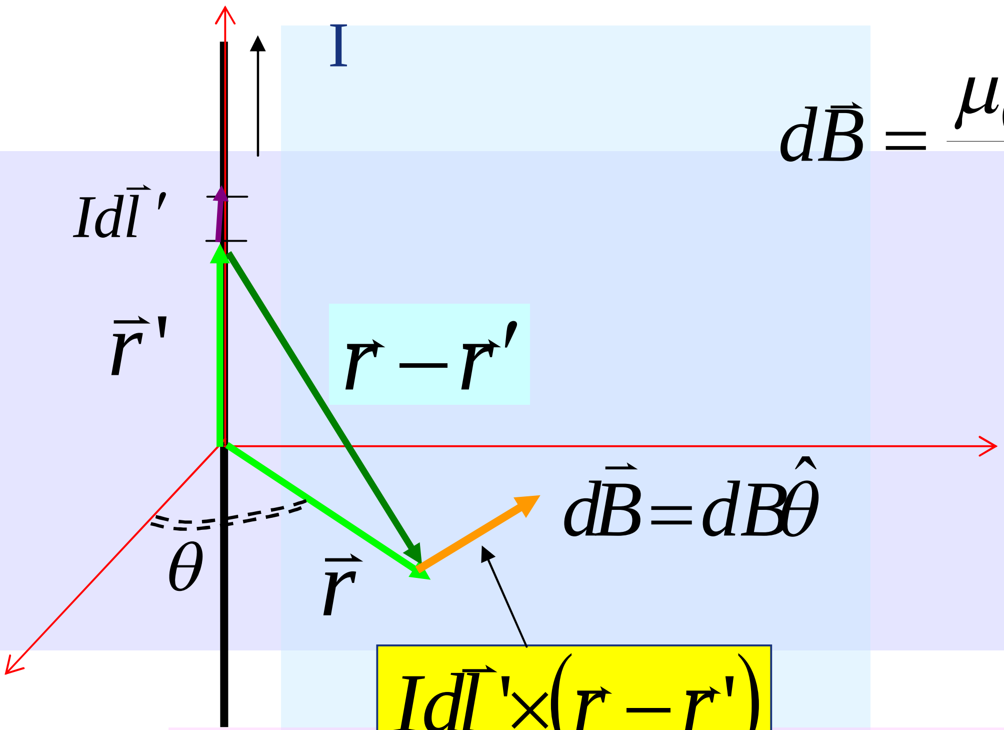
Campo Magnético Linea Infinita



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

Campo en z=0

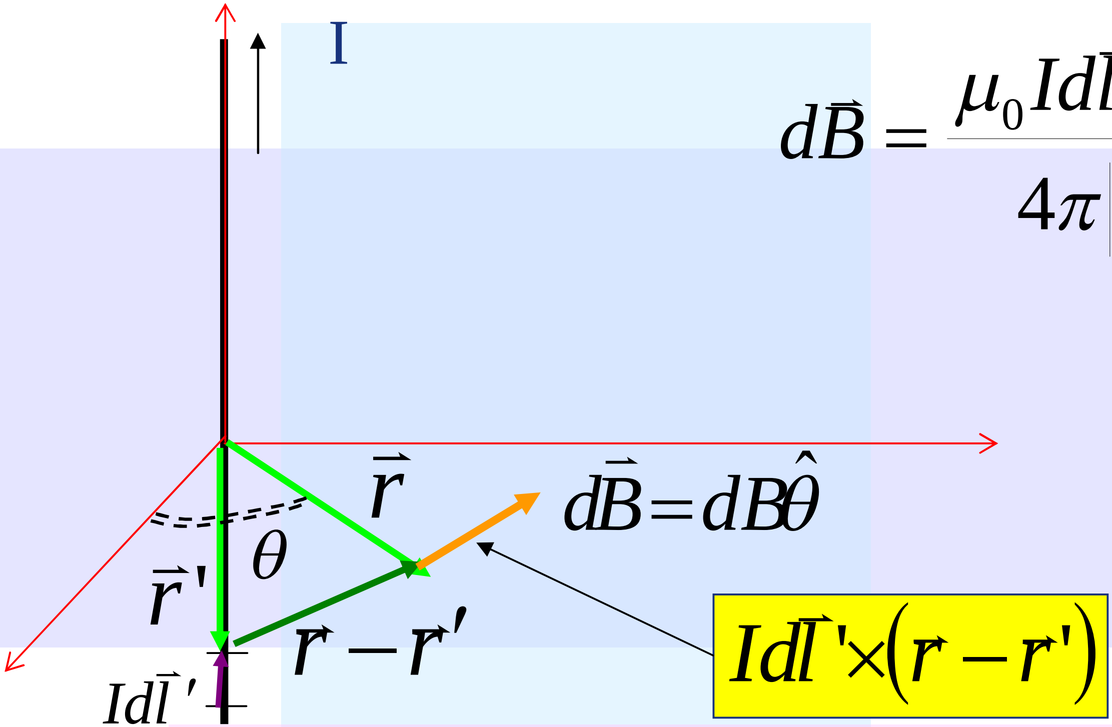
Campo Magnético Linea Infinita



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 Id\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}$$

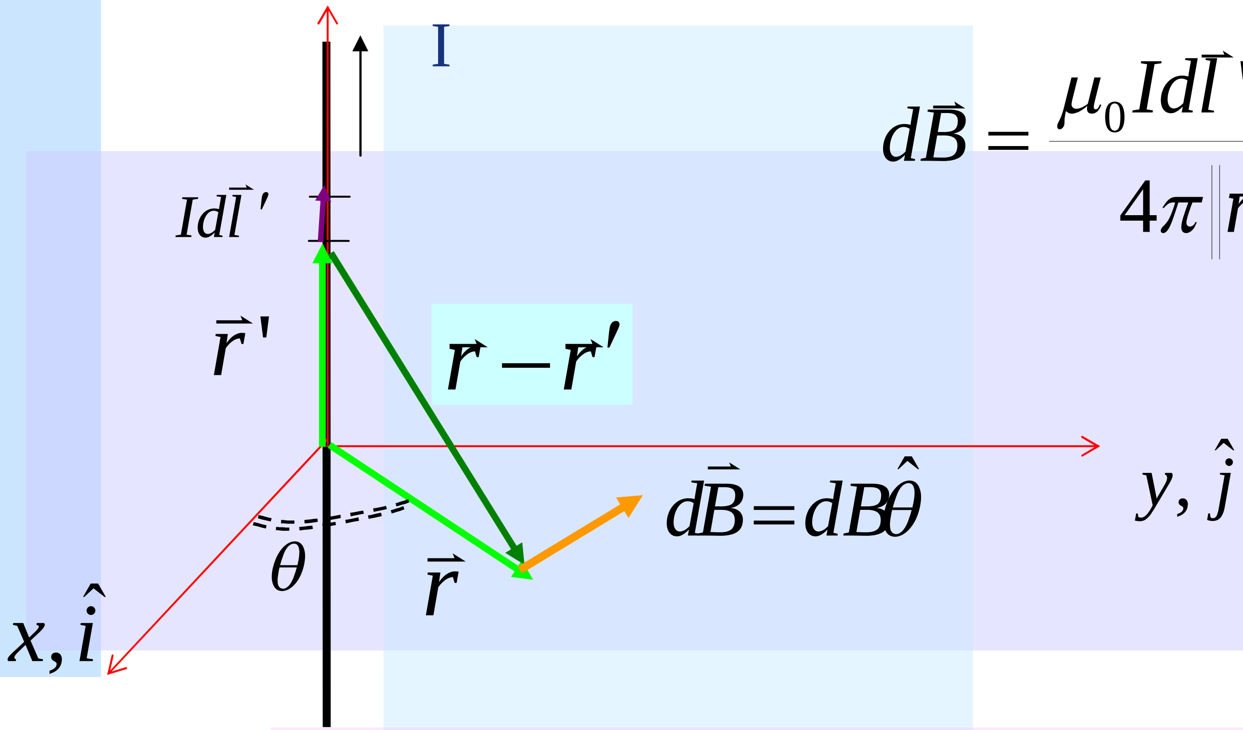
Campo Magnético Linea Infinita

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$



Notar que la contribución de todos los elementos de corriente tiene la misma dirección según $\hat{\theta}$

Campo Magnético Linea Infinita

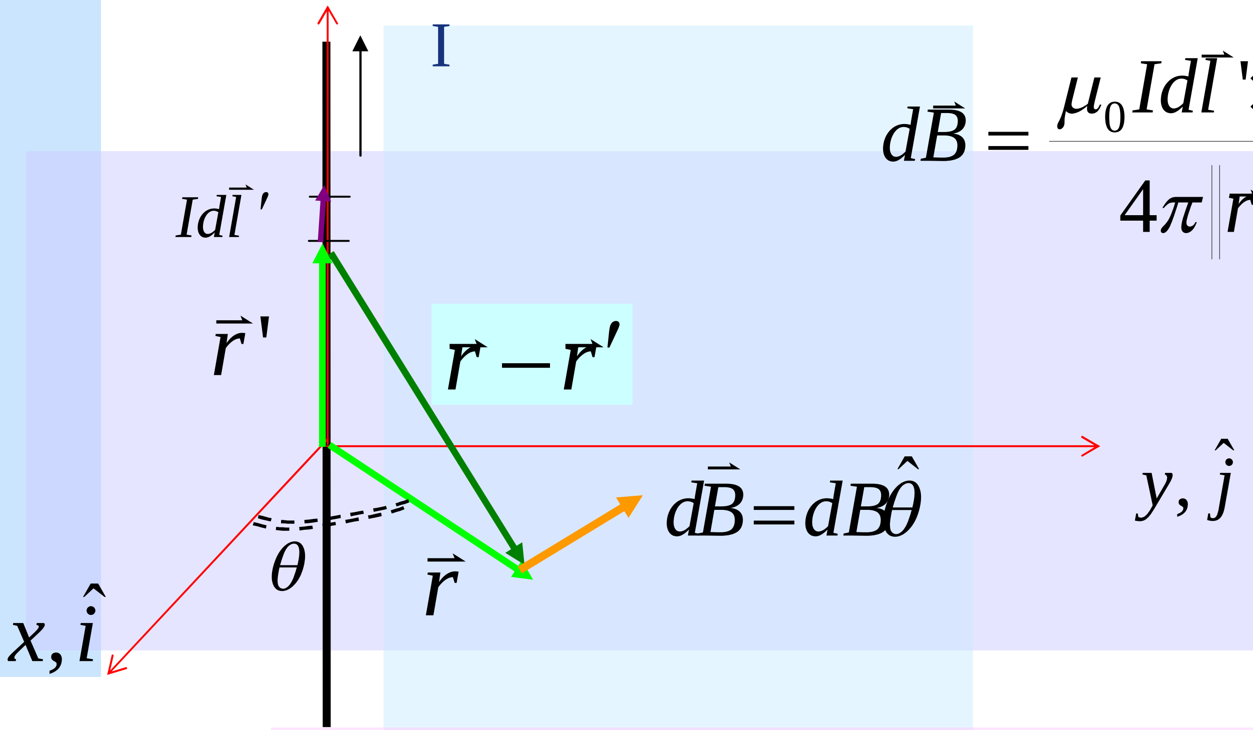


$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I d\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}\,'&=z'\hat{k}\\ \vec{r}&=r\cos\theta\,\hat{i}+r\sin\theta\,\hat{j}\\ Id\vec{l}\,'&=Idz'\hat{k}\end{aligned}\right\}\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I dz'\hat{k}\times\left(r\cos\theta\,\hat{i}+r\sin\theta\,\hat{j}-z'\hat{k}\right)}{4\pi\left[r^2+z'^2\right]^{3/2}}$$

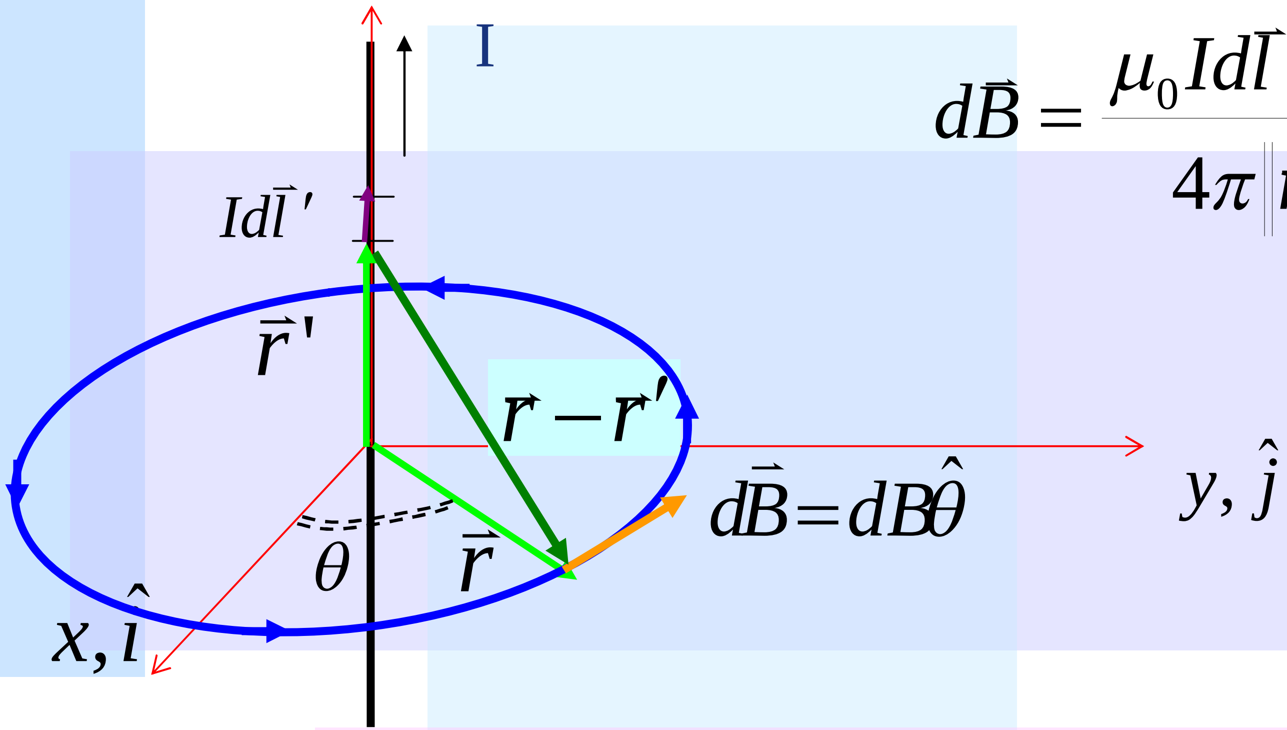
Campo Magnético Linea Infinita

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$



$$\vec{B} = \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \frac{\mu_0 I\, r \left(\cos\theta\ \hat{j} - \sin\theta\ \hat{i} \right) dz'}{4\pi \left[r^2 + z'^2 \right]^{3/2}}$$

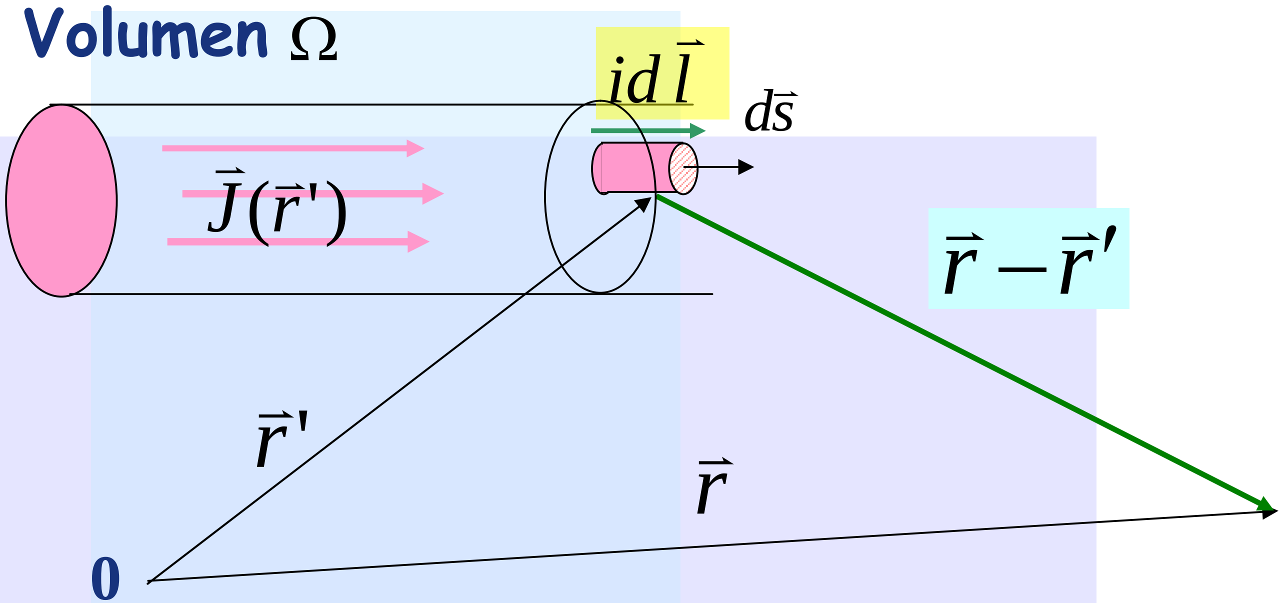
Campo Magnético Linea Infinita



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I d\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}$$

$$\therefore \quad \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Campo magnético de distribuciones de corriente



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

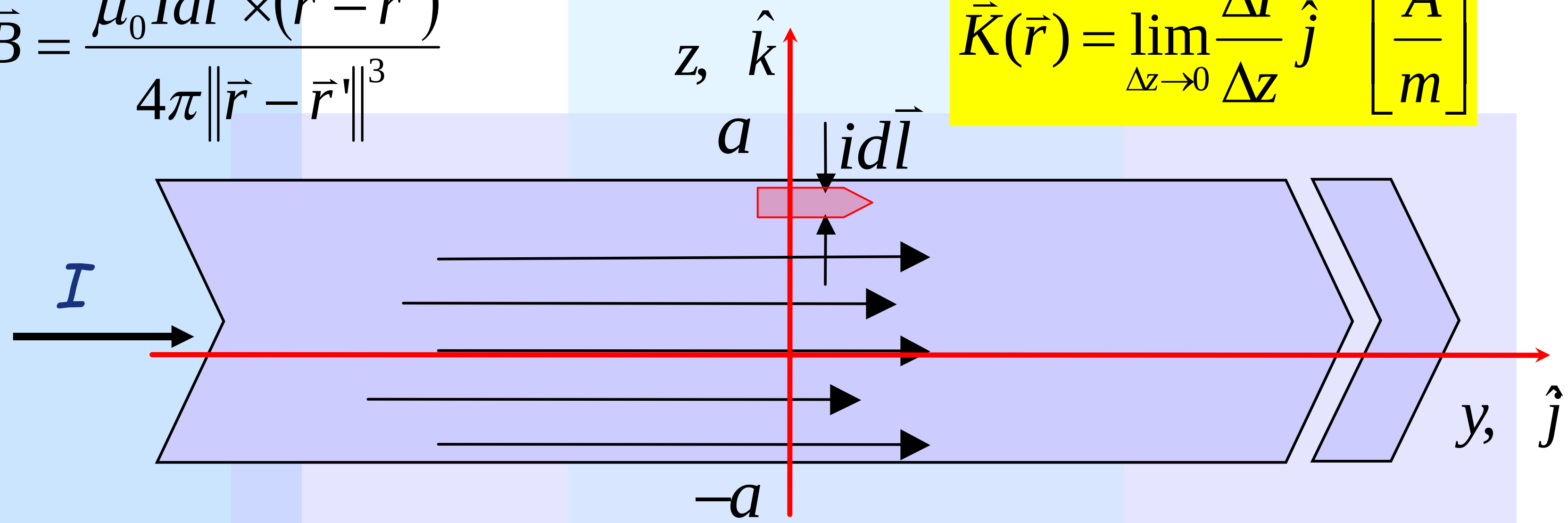
$$i d\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{J} dv'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} dv'$$

Densidad de Corriente Superficial

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

$$\vec{K}(\vec{r}) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta z} \hat{j} \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$

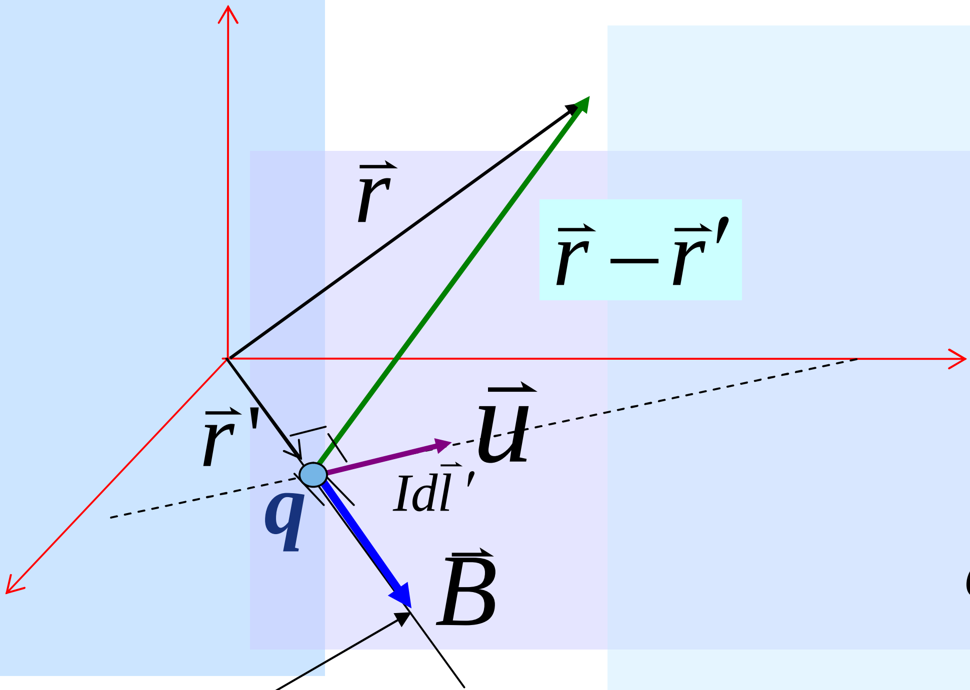


Sólo hay corriente en la superficie S del plano y-z

$$id\vec{l}\,' = (\vec{K} \cdot dz\hat{j})dy\hat{j} = (K\hat{j} \cdot \hat{j})dzdy\hat{j} = Kdzdy\hat{j} = \vec{K}ds$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} ds'$$

Campo Magnético de una Carga Puntual



$$Id\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

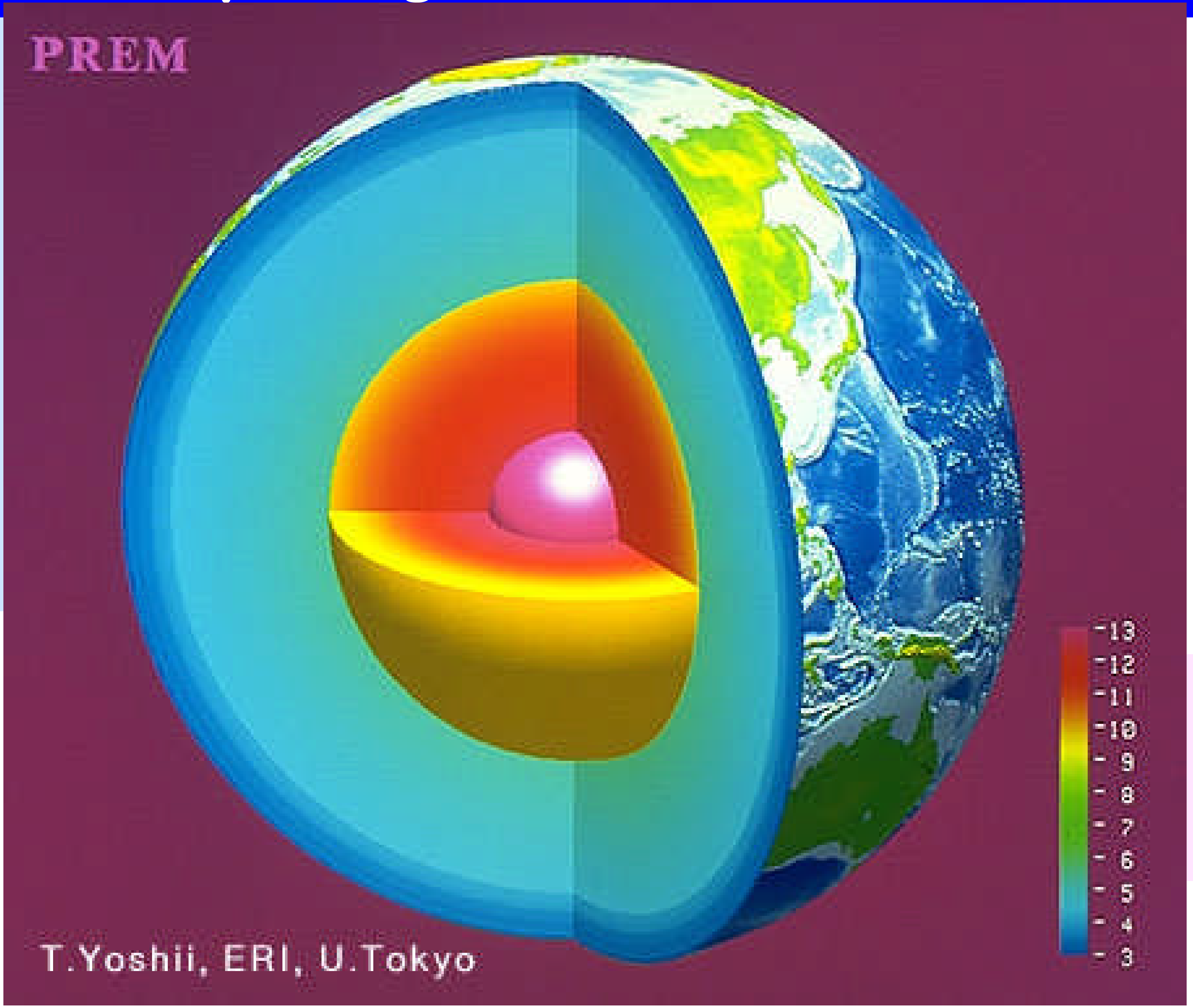
$$id\vec{l} = \frac{dq}{dt}dl\hat{u} = dq\frac{dl}{dt}\hat{u}$$

$$dq \to q,\quad \frac{dl}{dt} = \|\vec{u}\| \quad \text{y} \quad d\vec{B} \to \vec{B}$$

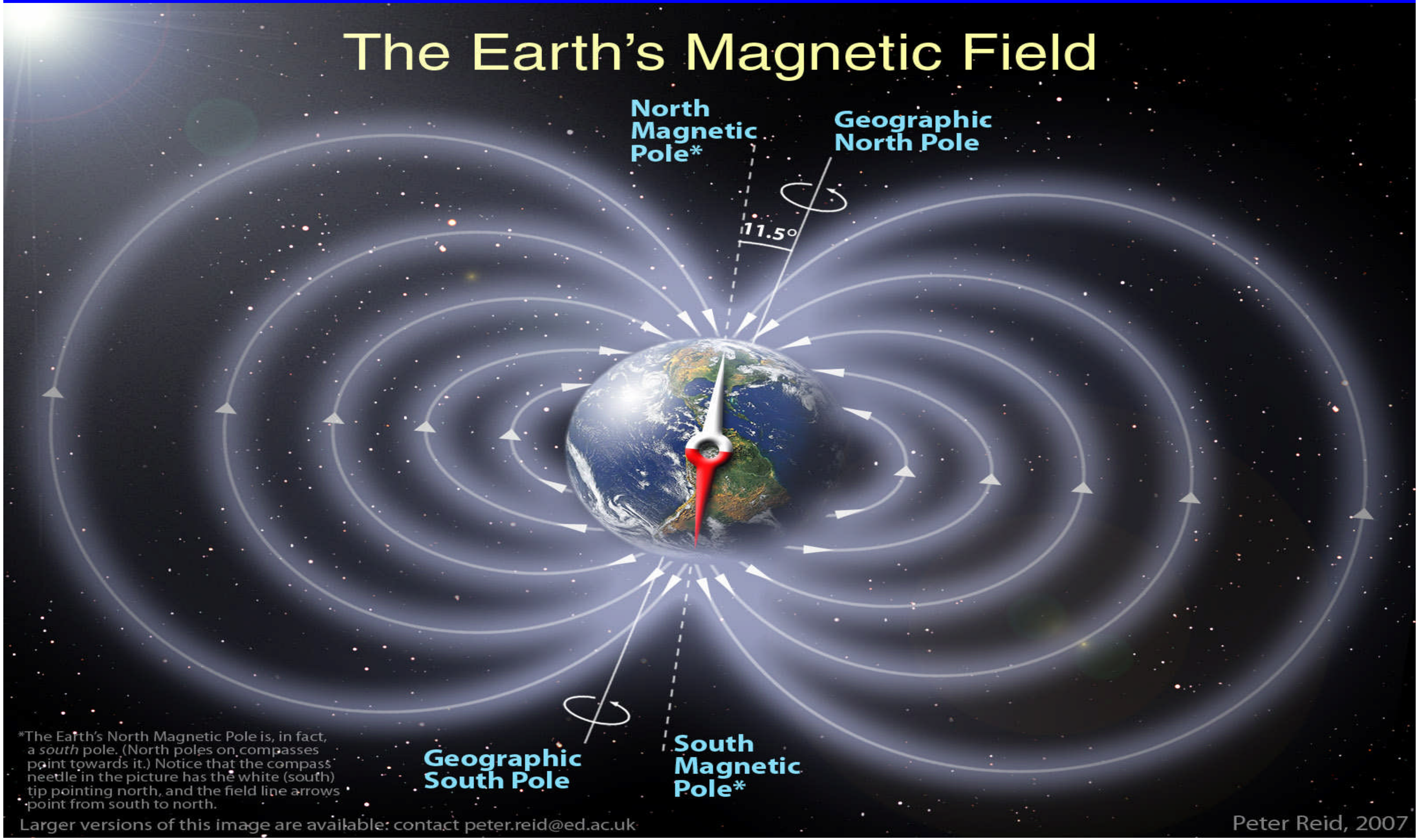
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{u} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

Campo magnético resultante perpendicular a la velocidad

Campo Magnético Terrestre

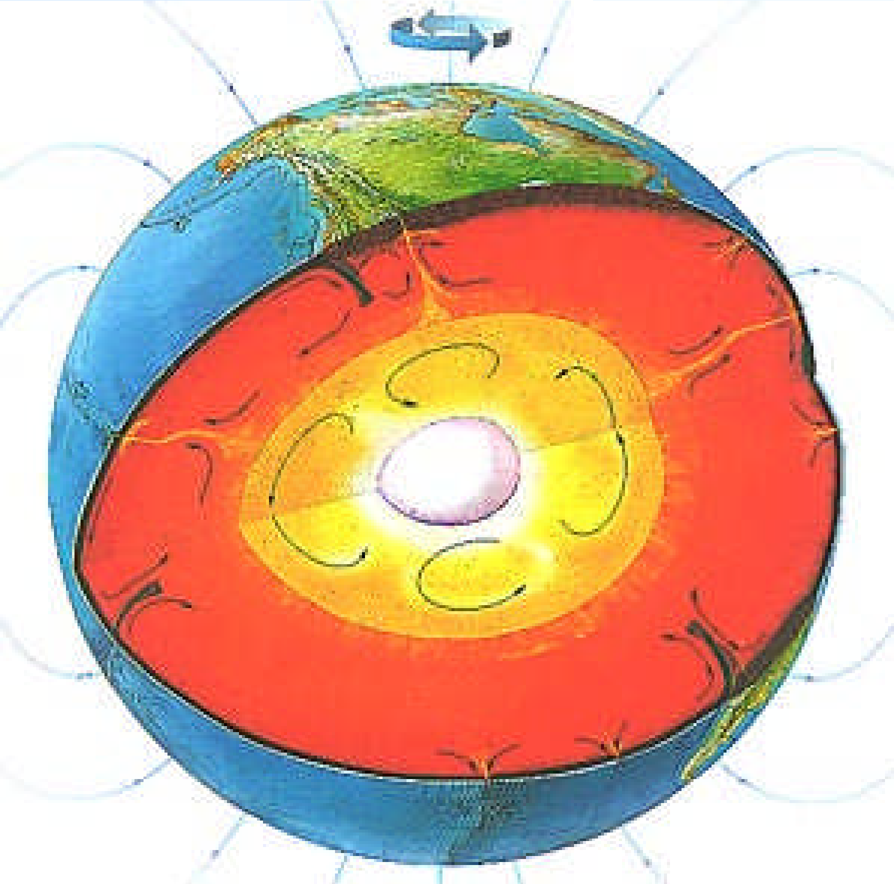


Campo Magnético Terrestre

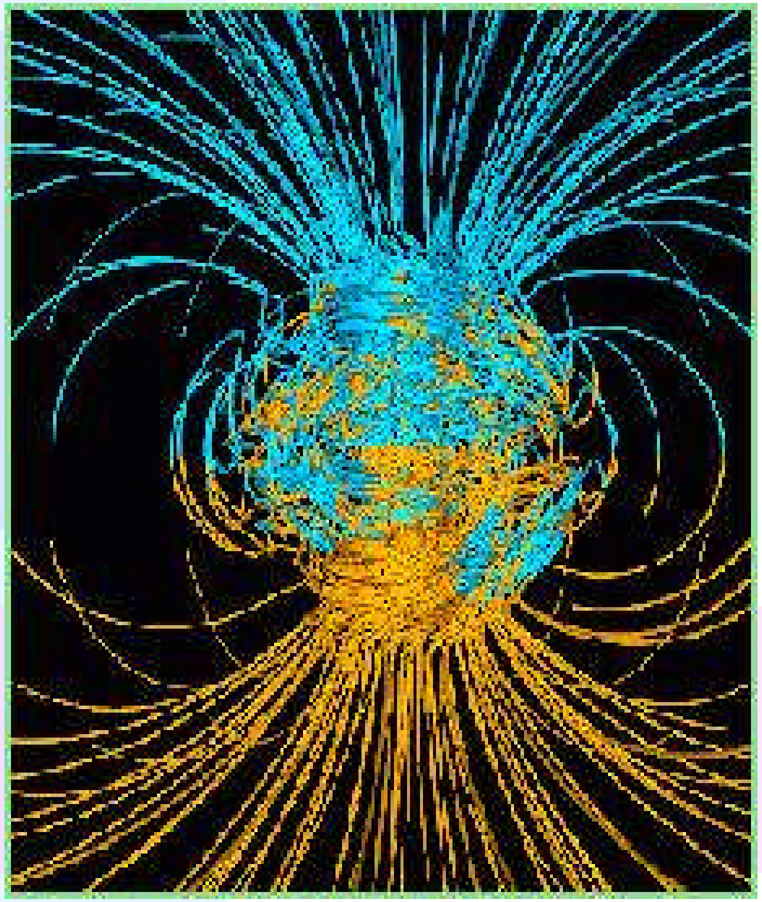


Campo Magnético Terrestre

Convección

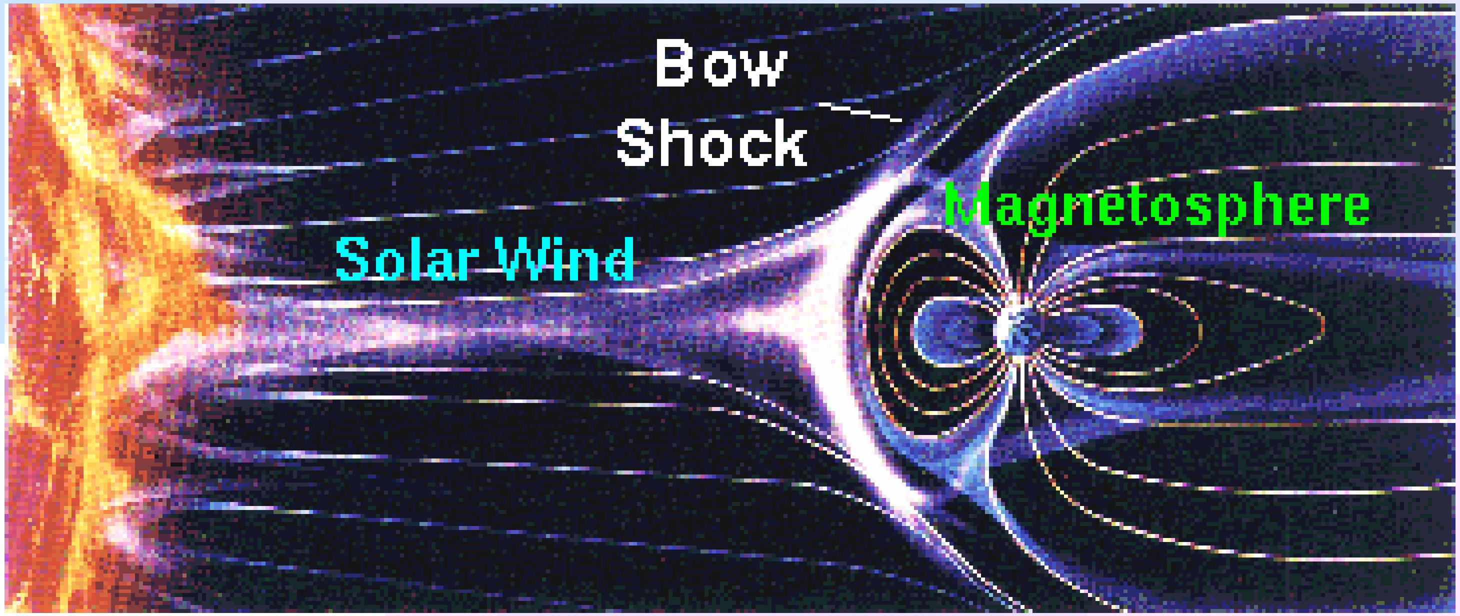


Geodínamo



Campo Magnético Terrestre

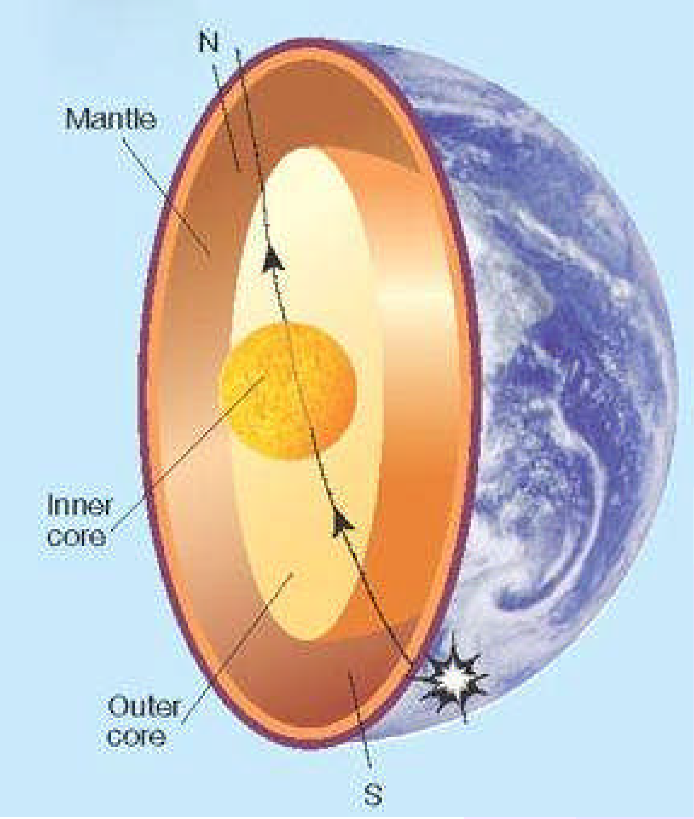
- Viento solar: *Gases ionizados que vienen del sol a 400Km/s*
- Varian con la actividad de la superficie solar



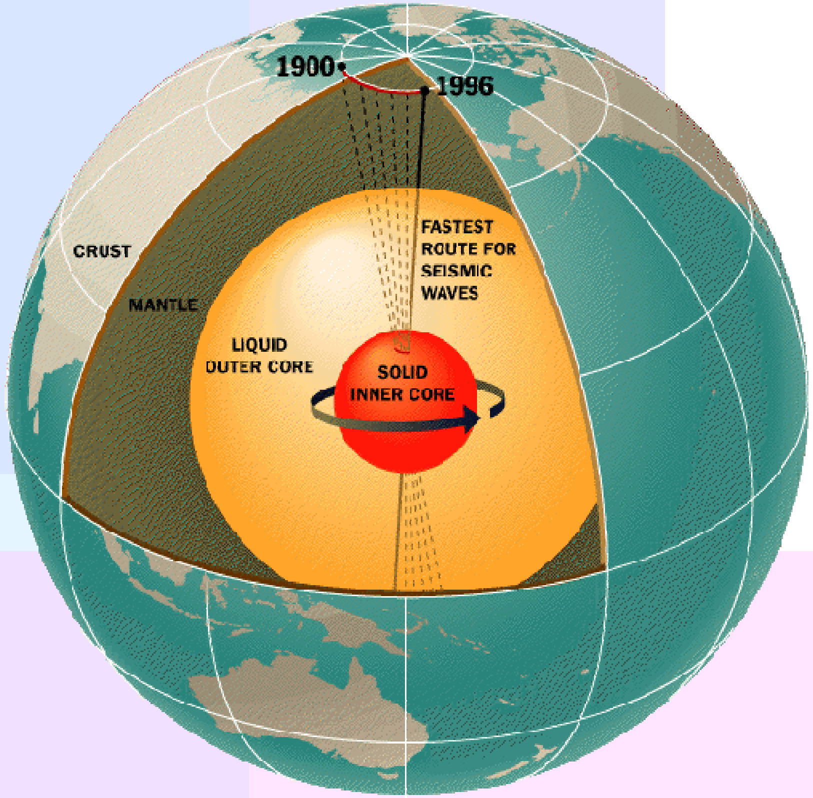
Fuente: National Geophysical Data Center, USA

Campo Magnético Terrestre

Estudio del núcleo



Anisotropía y super-rotación



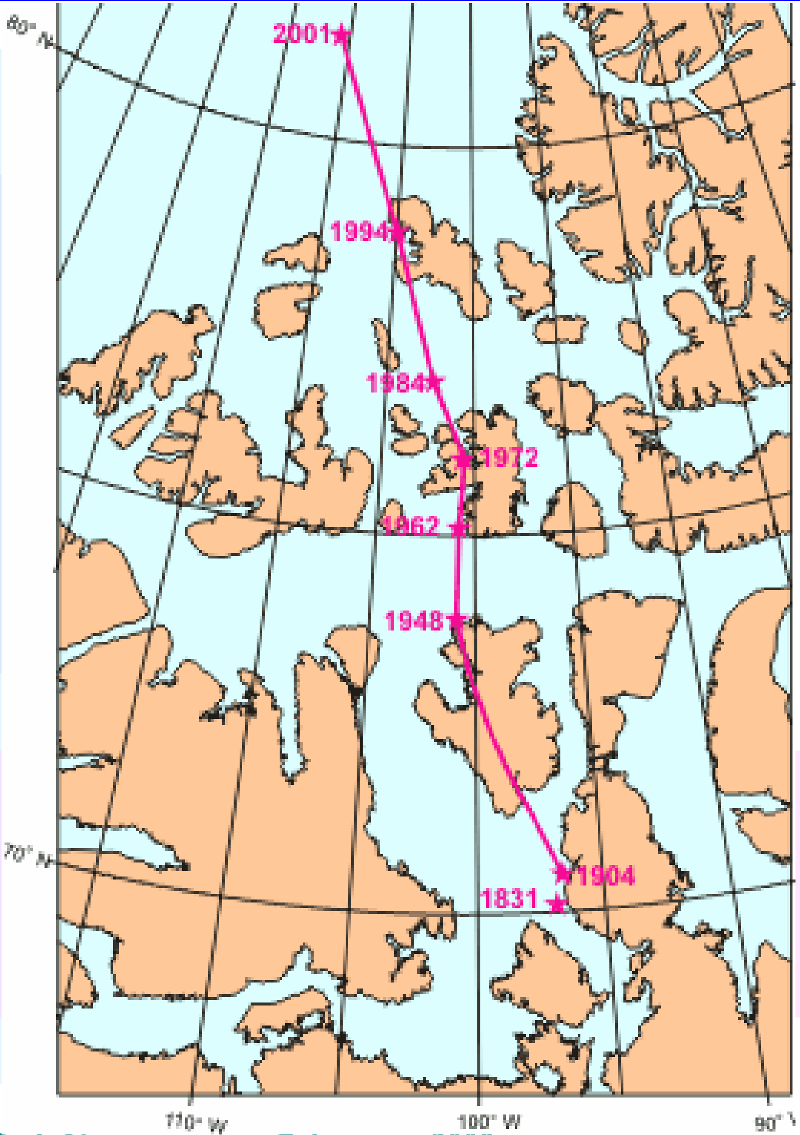
Campo Magnético Terrestre

•Movimiento del polo norte magnético en el Artico de Canadá en el periodo 1831-2001.
•Fuente: Geological Survey of Canada.

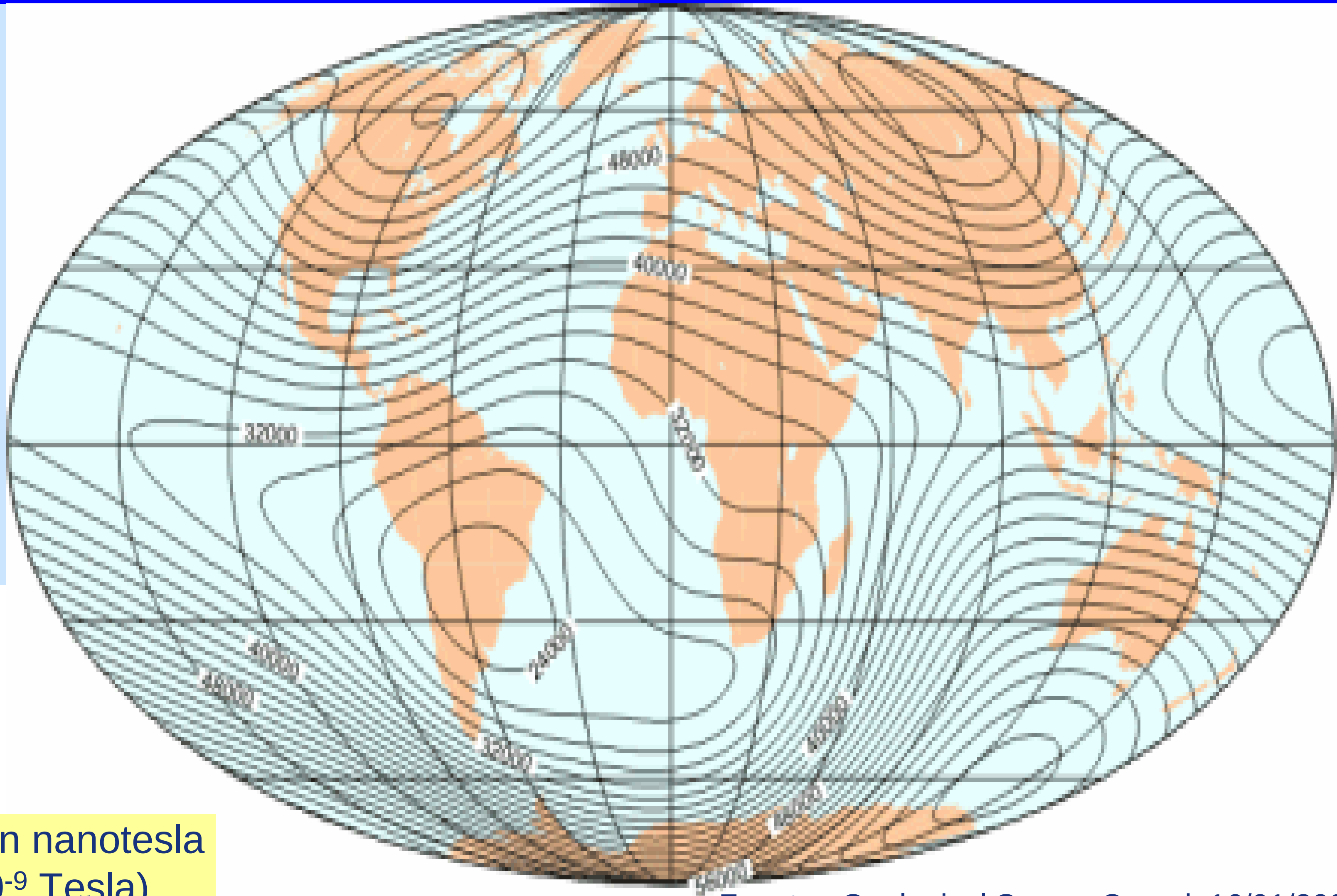
•Se mueve a 40 km cada año, approx.

•Ultimamente se mueve crecientemente mas rápido.

•La última vez que el polo magnético se cambio al otro lado de la tierra fue hace 780.000 años



Campo Magnético Terrestre



Medido en nanotesla
1 nT = 10^{-9} Tesla)

Fuente: Geological Survey Canada16/01/2008