fcfm Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

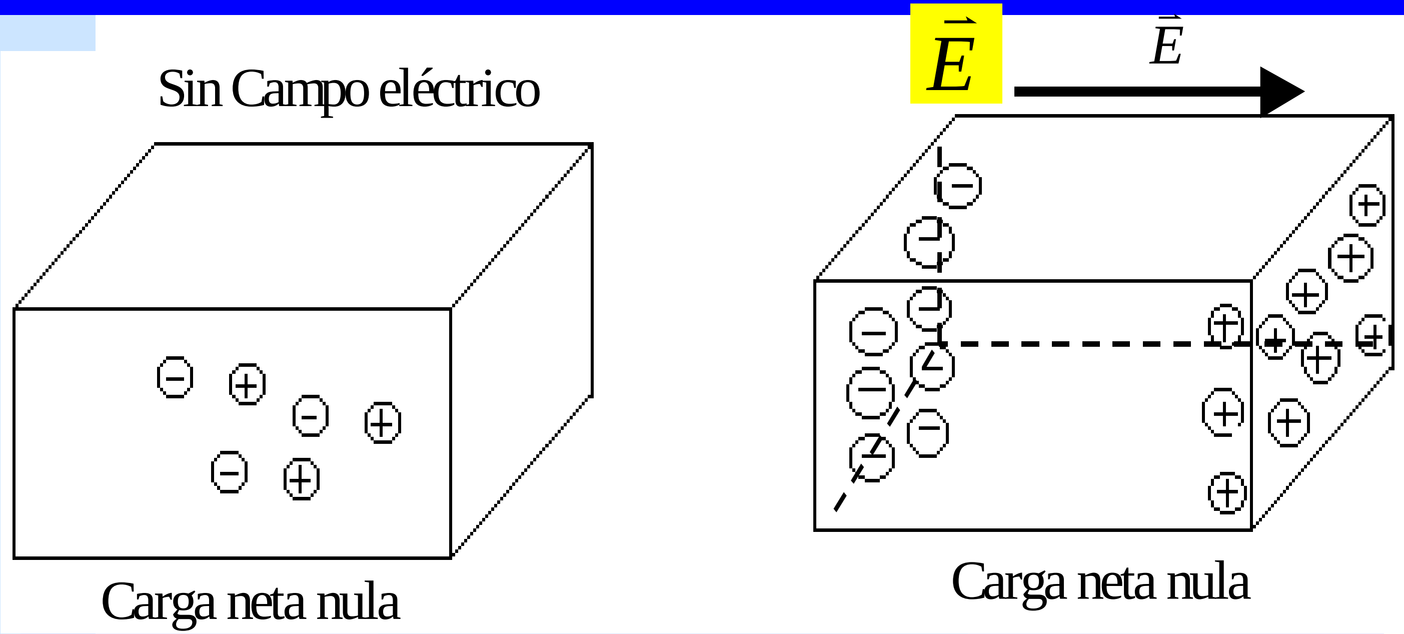
FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 10
Conductores en Electrostática-II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Modelo de conductores y propiedades
- Condensador
- Ejemplo
- Energía Electrostática
- Energía sistema de conductores
- Caso condensadores
- Fuerza eléctrica y Energçia

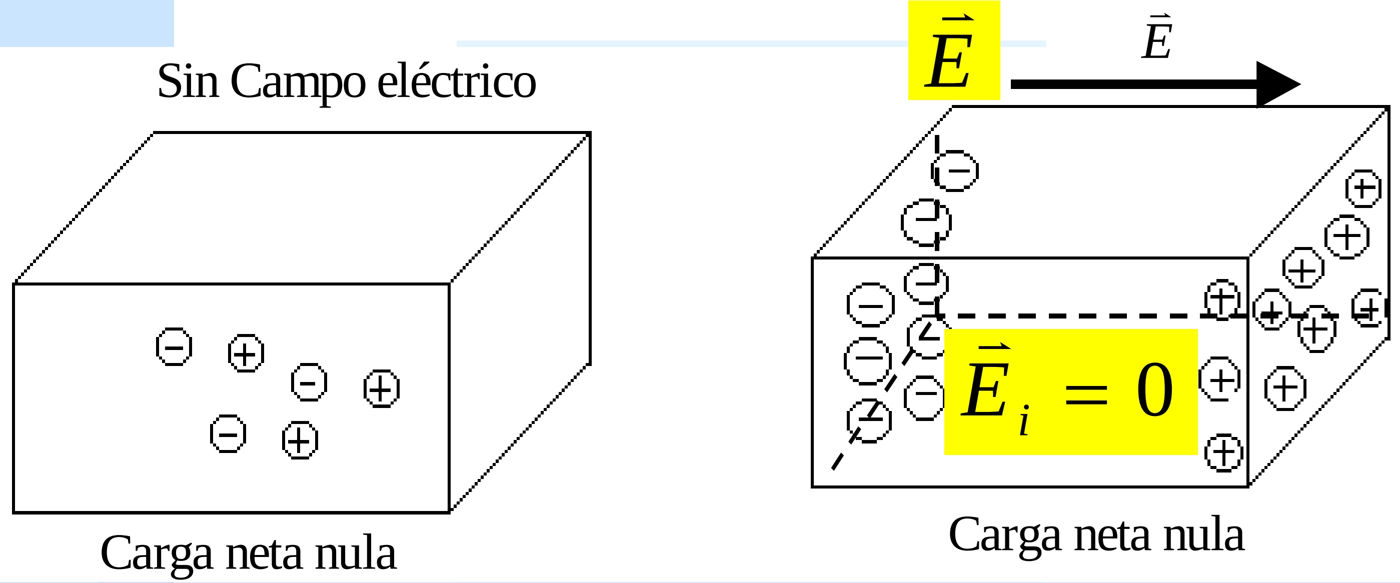
Modelo Básico de Conductores



- Abundantes cargas positivas y negativas
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

Estado de Equilibrio → **Campo eléctrico nulo en el interior**

Propiedades



Para el Estado de Equilibrio electrostático se cumple:

1. La carga sólo se redistribuye en la superficie

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$$

Propiedades

2. Toda la superficie del conductor es una superficie equipotencial

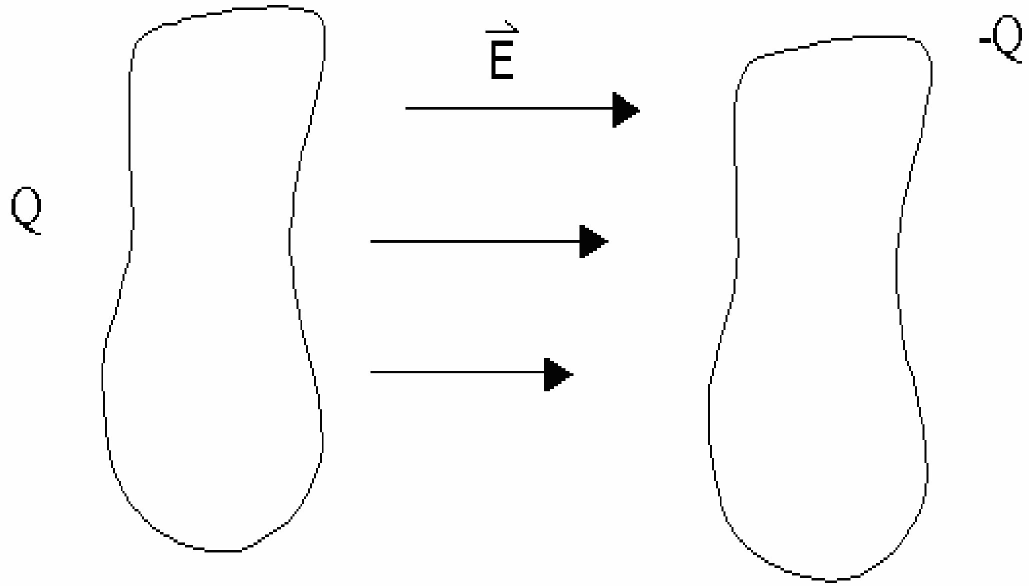
$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

No existe diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera al interior del conductor

3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor

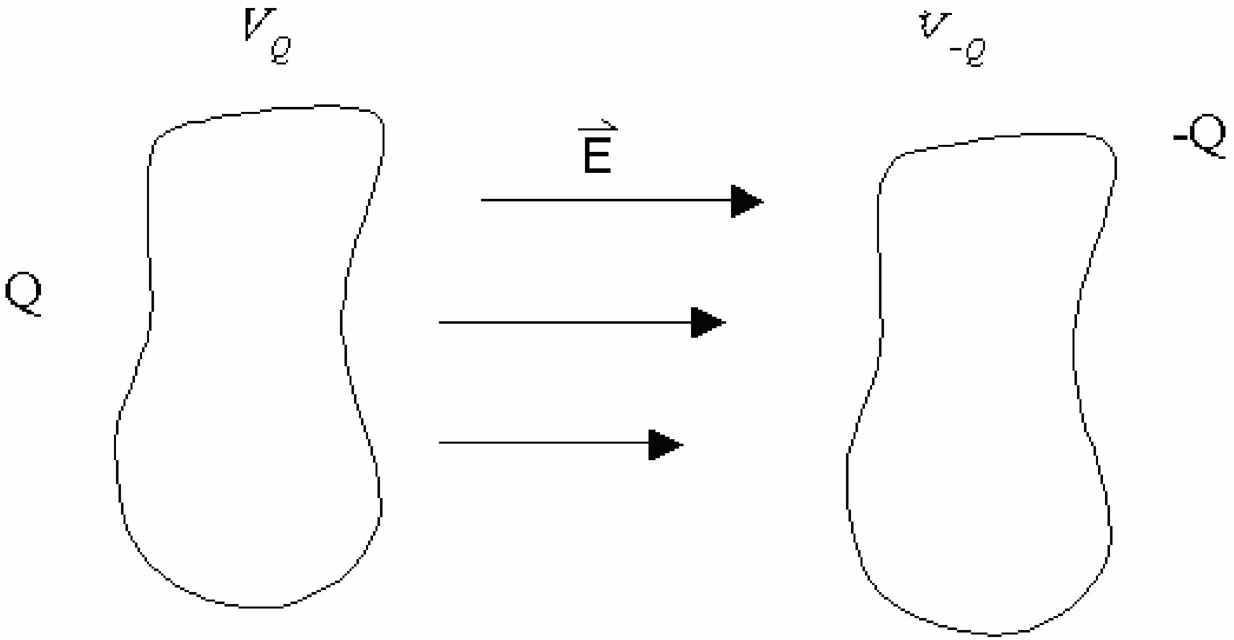
$$D_n = \varepsilon_0 E_n \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

Condensadores



Sistema de dos conductores en donde la carga de uno de ellos es de igual magnitud pero de signo contrario al otro.

Condensadores



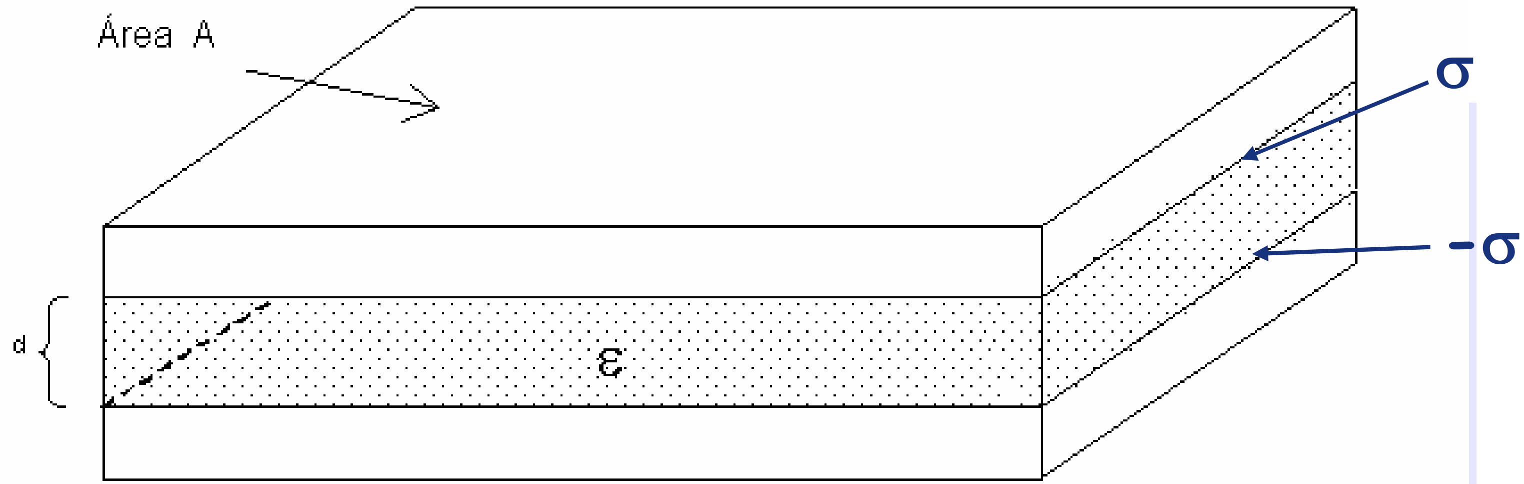
$$V_Q > V_{-Q}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_Q - V_{-Q}} > 0$$

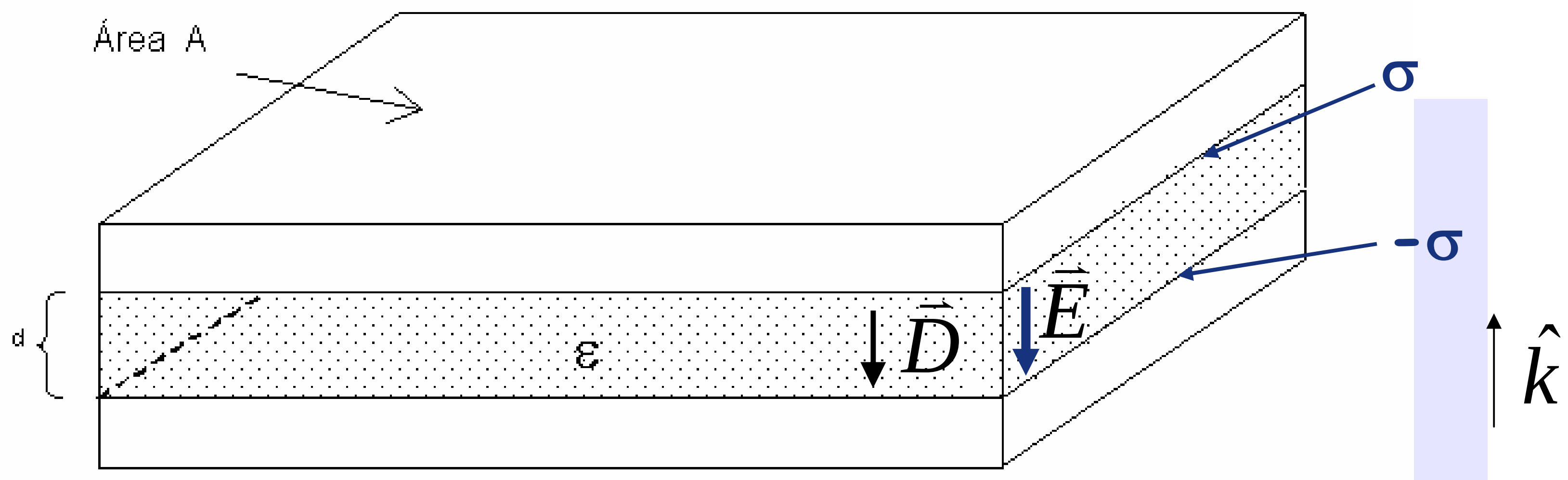
Se caracteriza a través de su capacidad C

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

Ejemplo



Ejemplo



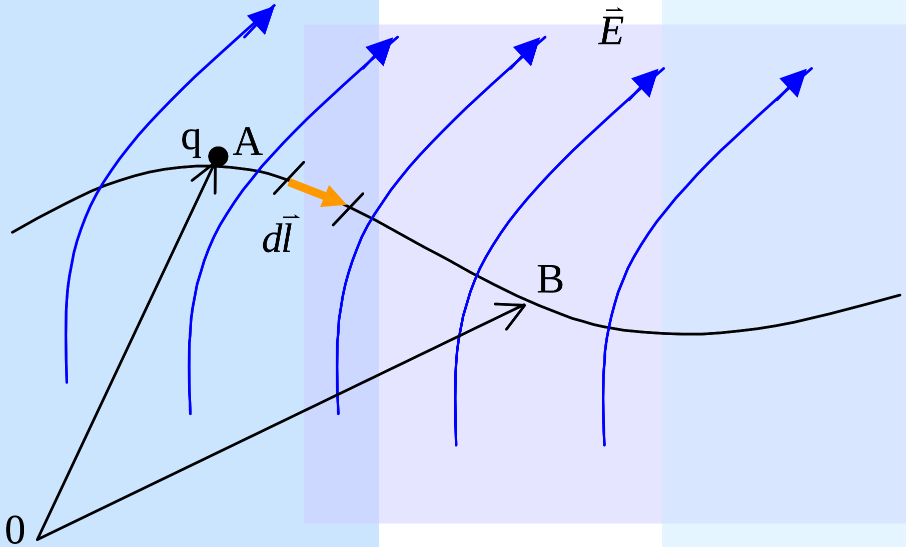
$$\vec{D} = -\sigma\,\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k} \Rightarrow \quad -\int_{-d}^{0} \vec{E} \bullet d\vec{l} = V_{\sigma} - V_{-\sigma} \quad \Rightarrow \overbrace{V_{\sigma} - V_{-\sigma}}^{\Delta V} = \frac{\sigma}{\varepsilon} d$$

$$Q = \sigma A \;\; y \;\; \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon} d, \quad luego \quad C = \frac{\sigma A}{\sigma \frac{d}{\varepsilon}} \Rightarrow C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Menor d ⇒mayor C,
Mayor A⇒ mayor C,
Mayor ε ⇒ mayor C.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Recordemos el concepto de potencial



$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{W}{q} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$W = \int_A^B dW = -q \underbrace{\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}}_{V_{AB}}$$

Notar que si B esta en el infinito y lo tomamos como referencia $V_B = 0$

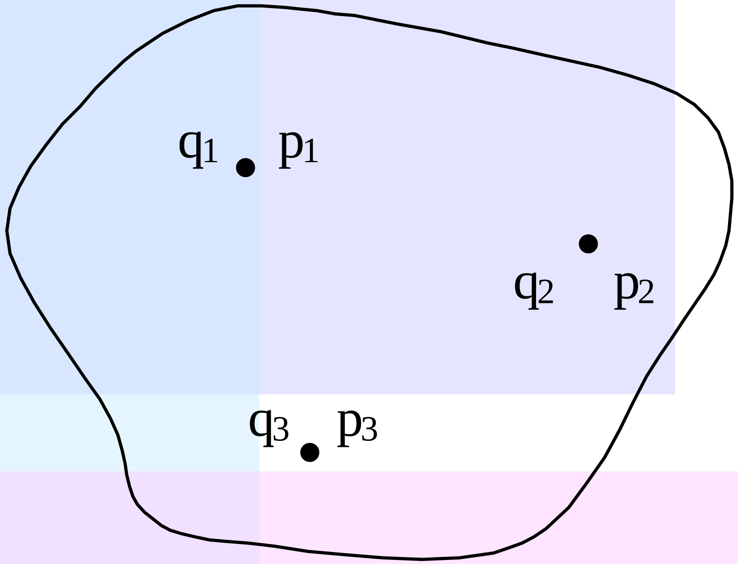
$$W = qV_A$$

Es el trabajo para traer la carga q desde el infinito al punto A.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

La energía electrostática de un sistema de partículas es el trabajo necesario para formar dicho sistema $\Rightarrow$ $W=U$.

Caso sistema de 3 cargas



Recordar que:

- El campo es conservativo
- Campos cumplen con superposición

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la primera carga no es necesario realizar trabajo

$q_1 \bullet P_1$

$$W_1 = 0$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la Segunda carga

$$W_2 = q_2 V_{21}$$

q_1 • P_1

•

q_2 P_2

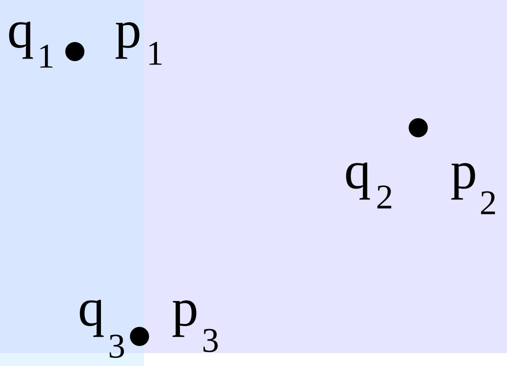
V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_2

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para traer la 3ª carga

$$W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$



V_{31} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_3

V_{32} es el potencial producido por la carga 2 en la posición P_3

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Luego el trabajo total es

$$W = 0 + W_2 + W_3 = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

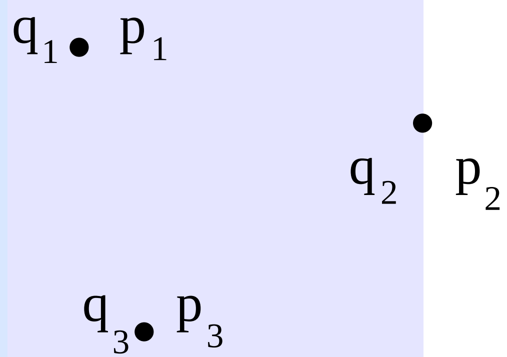
q_1 • P_1

• q_2 P_2

q_3 • P_3

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito



Si invertimos el orden, primero traemos la carga 3, luego la 2 y finalmente la 1 se tiene:

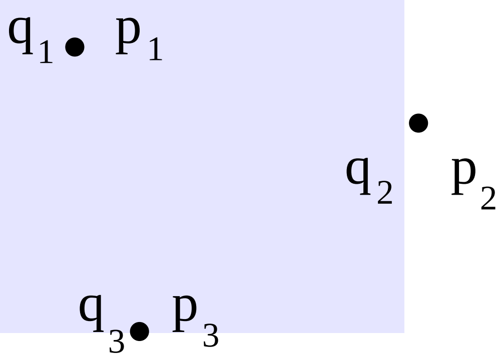
$$W' = \underbrace{0}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 3}}} + \underbrace{q_2 V_{23}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 2}}} + \underbrace{q_1 V_{13} + q_1 V_{12}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 1}}}$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

$$W = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$ y $$W' = 0 + q_2 V_{23} + q_1 V_{13} + q_1 V_{12}$$

Trabajo es el mismo independiente del orden, luego

$$W' = W$$



Sumando

$$\Rightarrow 2W = q_1 \underbrace{(V_{13} + V_{12})}_{potencial\ en\ 1} + q_2 \underbrace{(V_{21} + V_{23})}_{potencial\ en\ 2} + q_3 \underbrace{(V_{31} + V_{32})}_{potencial\ en\ 3}$$

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3\right)$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para un sistema de n cargas se obtiene

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k V_k$$ en [J] joules

para distribuciones continuas de carga se tiene
$\sum \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$, con ello

$$W = \frac{1}{2}\int V(\vec{r})\,dq$$ en [J] joules

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para una distribución específica de carga tendremos

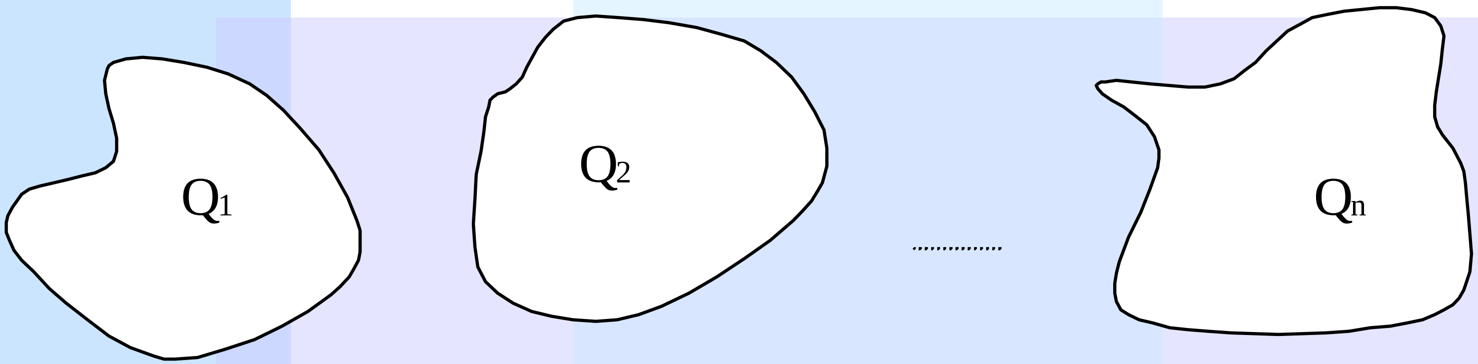
$$W = \frac{1}{2}\int \lambda(\vec{r})V(\vec{r})dr$$

$$W = \frac{1}{2}\iint \sigma(\vec{r})V(\vec{r})dS$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

Energía de un Sistema de Conductores

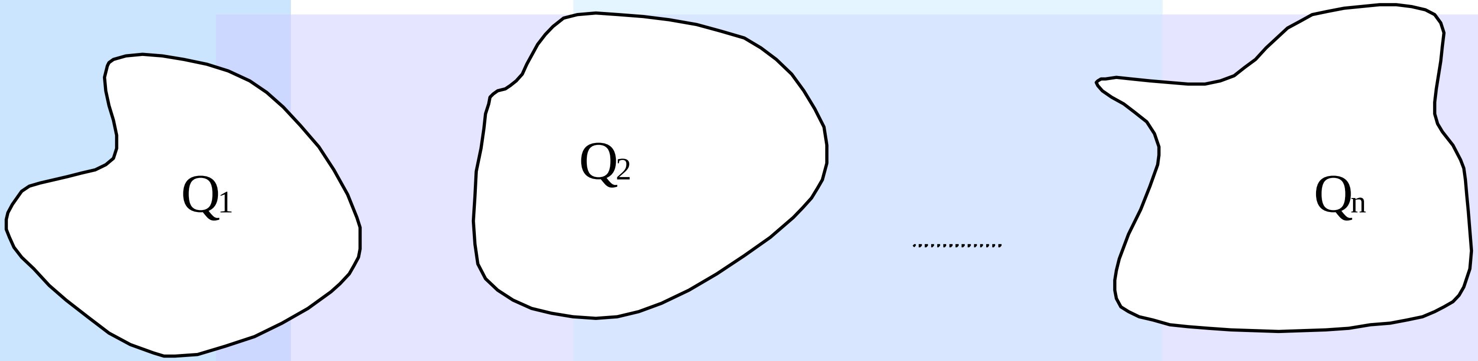
Consideremos n conductores cargados



¿Cuánta energía se gastó en formar este sistema?

Energía de un Sistema de Conductores

Solo hay carga en las superficies

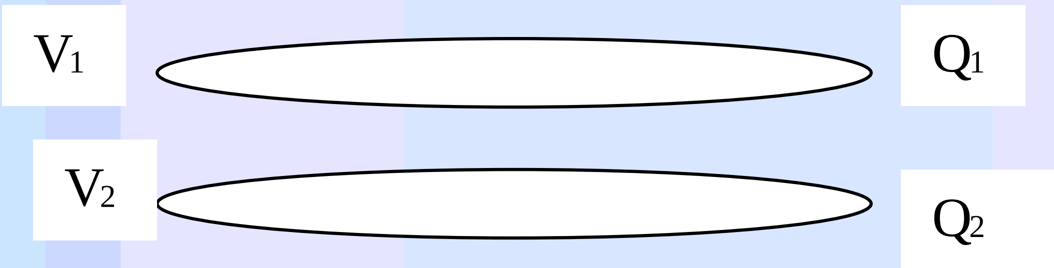


$$W = \frac{1}{2}V_1 \underbrace{\iint_{S_1} \sigma_1(\vec{r})dS}_{Q_1} + \frac{1}{2}V_2 \underbrace{\iint_{S_2} \sigma_2(\vec{r})dS}_{Q_2} + \ldots + \frac{1}{2}V_n \underbrace{\iint_{S_n} \sigma_n(\vec{r})dS}_{Q_n}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\sum V_i Q_i$$

Caso condensadores

Cada condensador tiene igual carga y de signo contrario



$$W = \frac{1}{2}\sum V_i Q_i \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 + V_2 Q_2) \Rightarrow \quad Q_2 = -Q_1 \Rightarrow W = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)Q_1$$

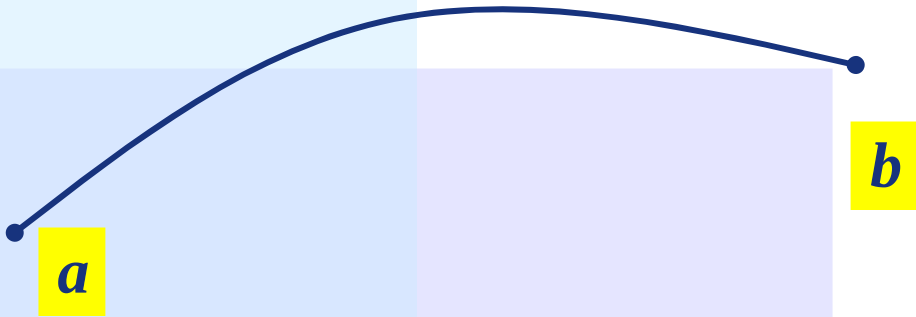
pero $Q=C\Delta V$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{ó} \quad W = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Trabajo entre dos puntos

$$W = -\int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{l}$$



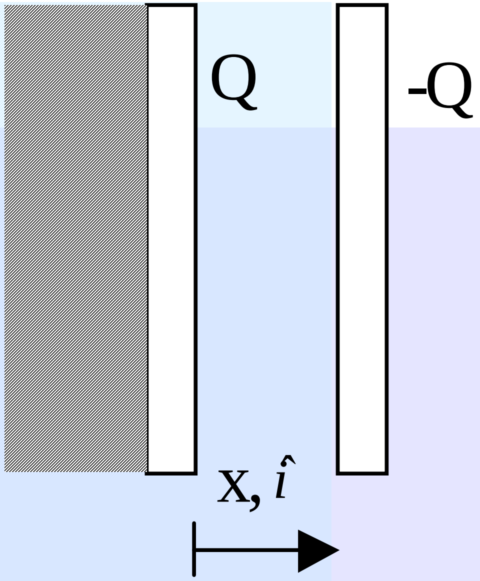
$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla W$$

Y el trabajo es igual al cambio de la energía eléctrica del sistema

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo: Condensador de placas planas

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



No se mueve

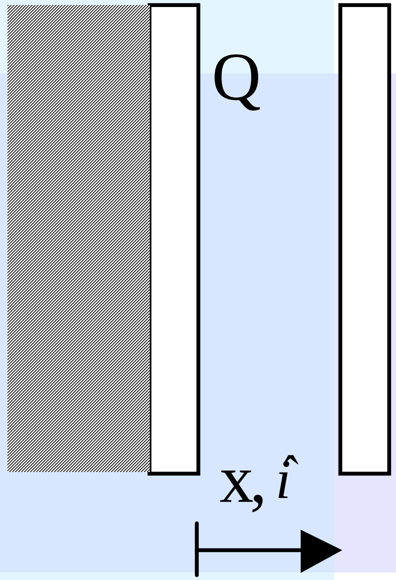
Al producirse el movimiento de atracción, la carga neta se mantiene constante (Q=constante)

Fuerza Eléctrica y Energía

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

La capacidad es función de la distancia x

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$



$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} x$$

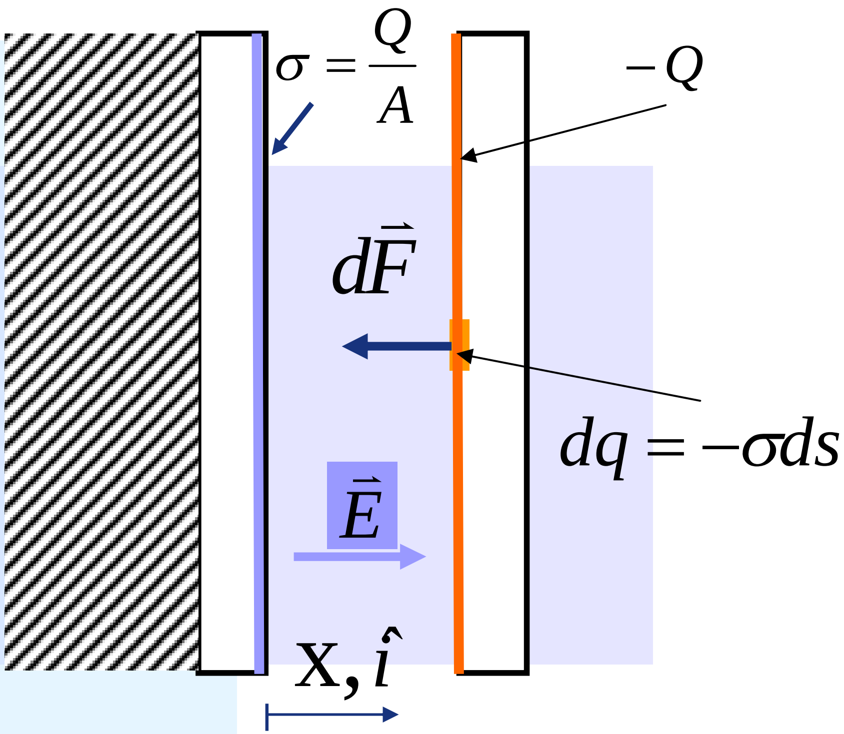
$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x}\hat{i} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

Fuerza es independiente de la distancia x

Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Fuerza producida por el campo de una placa sobre las cargas de la otra



Fuerza Eléctrica y Energía

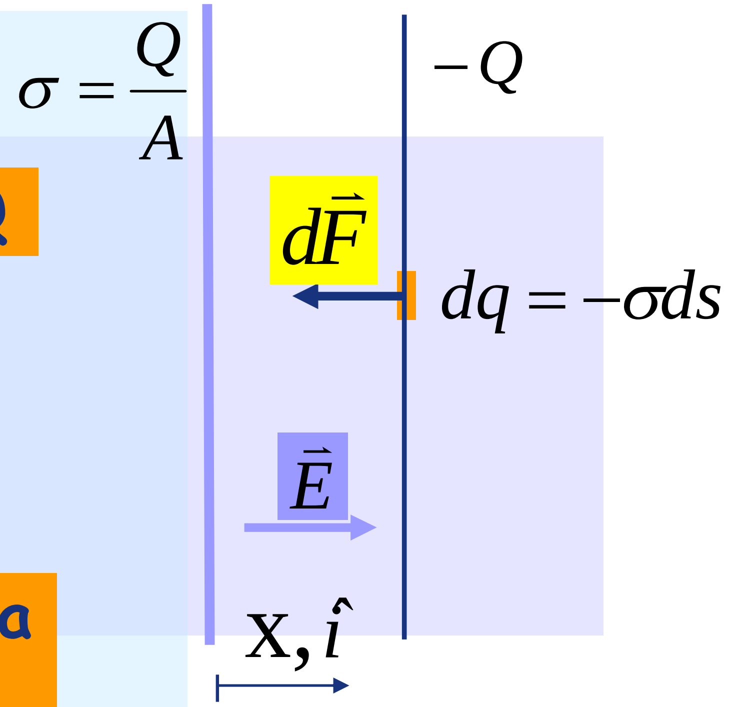
Método alternativo

Campo producido por placa con Q

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

Fuerza sobre elemento *dq* de otra placa con -Q

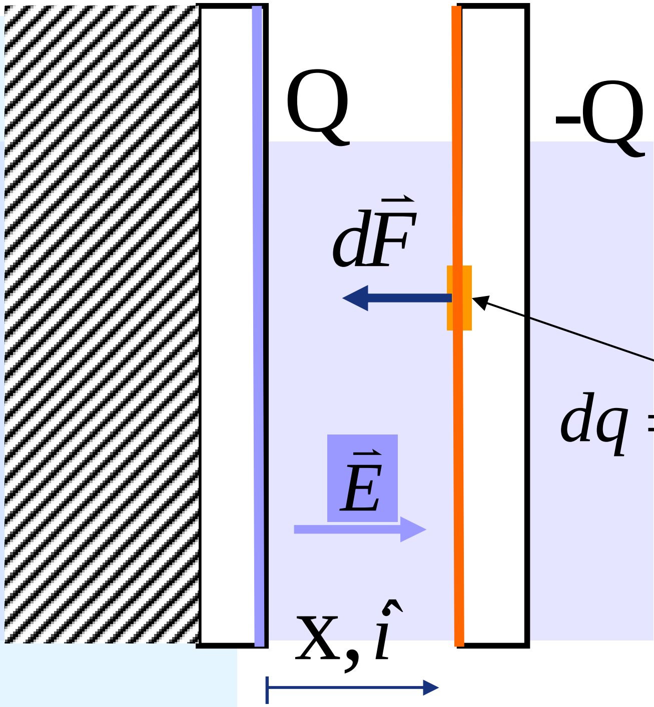
$$d\vec{F} = \vec{E}dq$$



Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Fuerza producida por campo entre las placas



$$d\vec{F} = \vec{E}dq \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\iint_A \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}\sigma ds = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}A\hat{i} \qquad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{(\sigma A)^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

$$\therefore \vec{F} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

Fuerza es independiente de la distancia x