Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

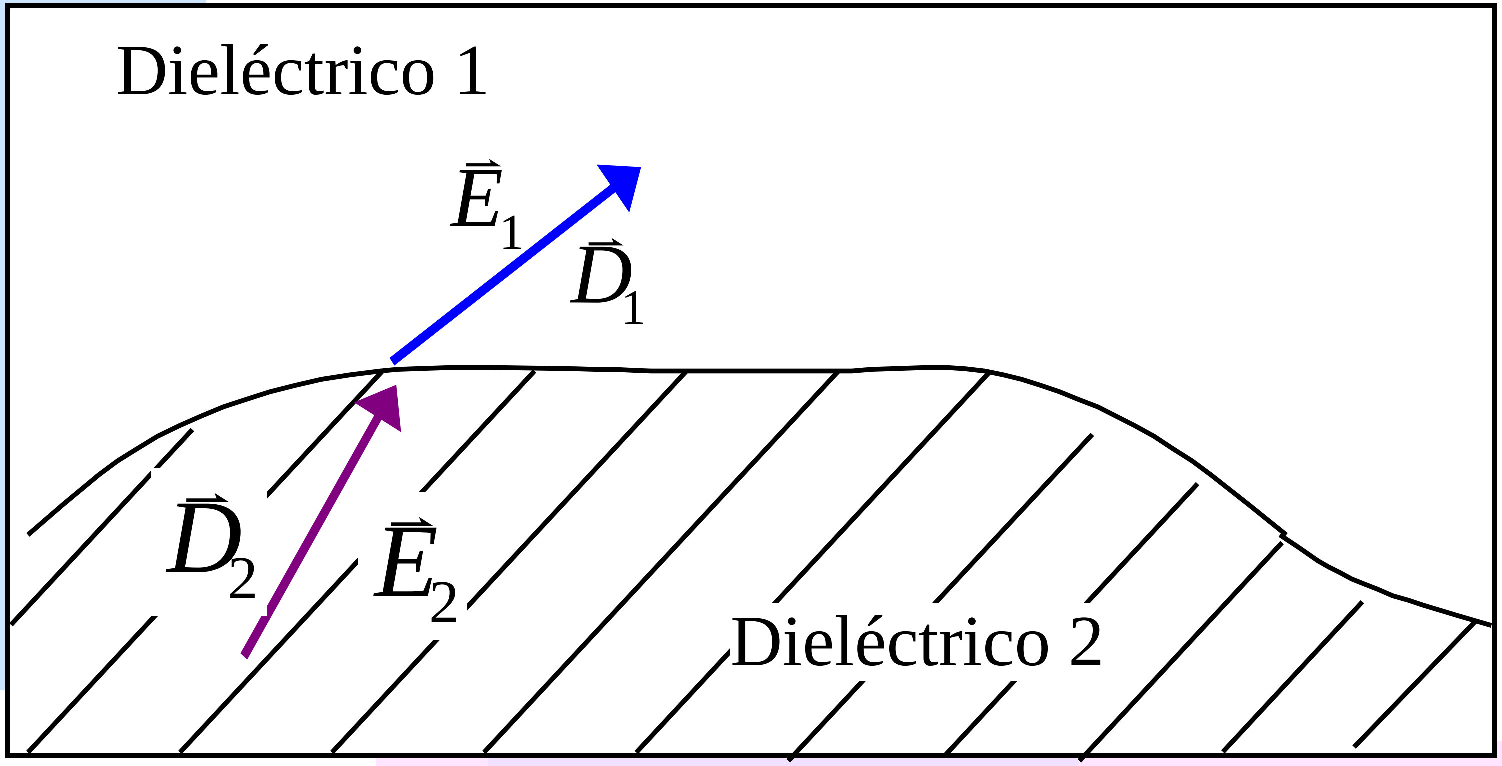
FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 8
Medios Materiales III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

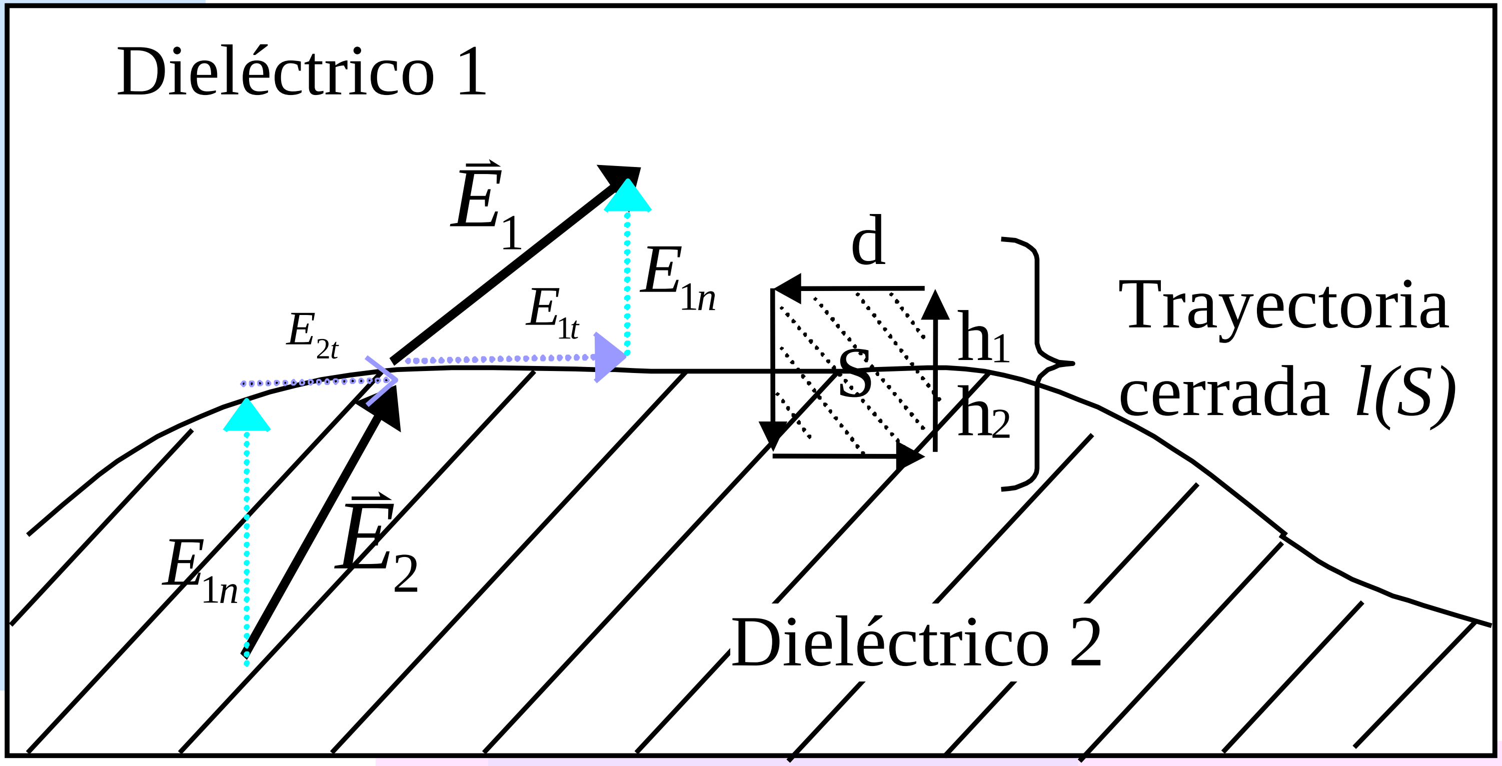
- Condiciones de borde para el campo eléctrico
- Ejemplo
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría

Condiciones de borde



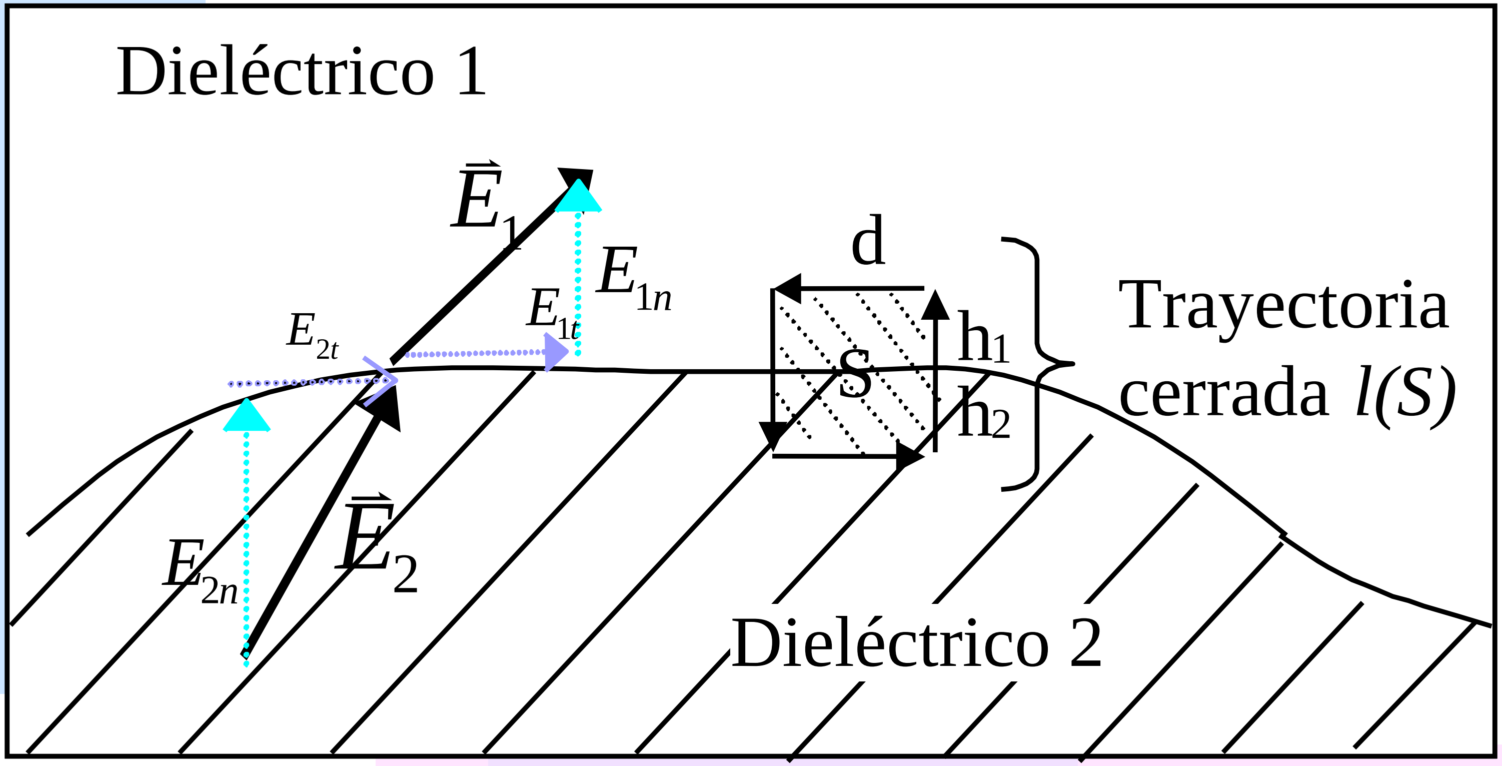
Usaremos dos ecuaciones $\nabla \times \vec{E} = 0$ **y** $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Condiciones de borde para el campo eléctrico

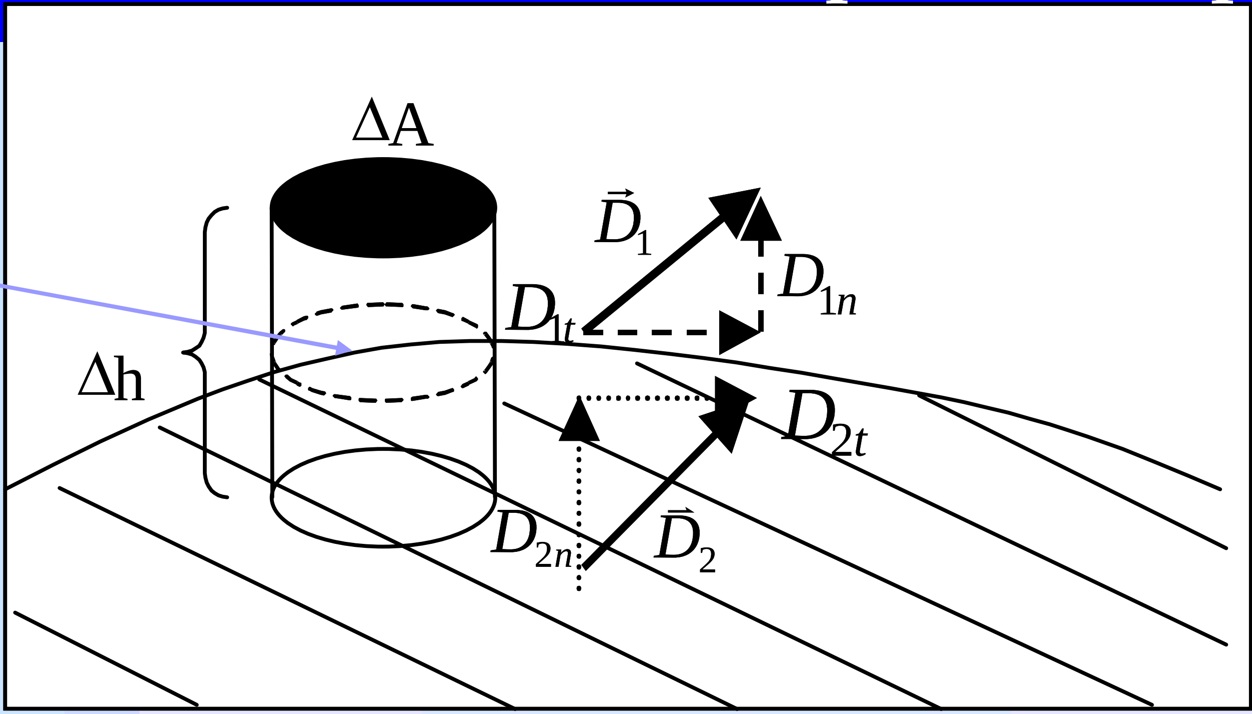


$$\oint_{l(S)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

$$h_1 \to 0, \quad h_2 \to 0 \Rightarrow -E_{1t}d + E_{2t}d = 0$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t} \qquad \therefore \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Condiciones de borde para el campo eléctrico



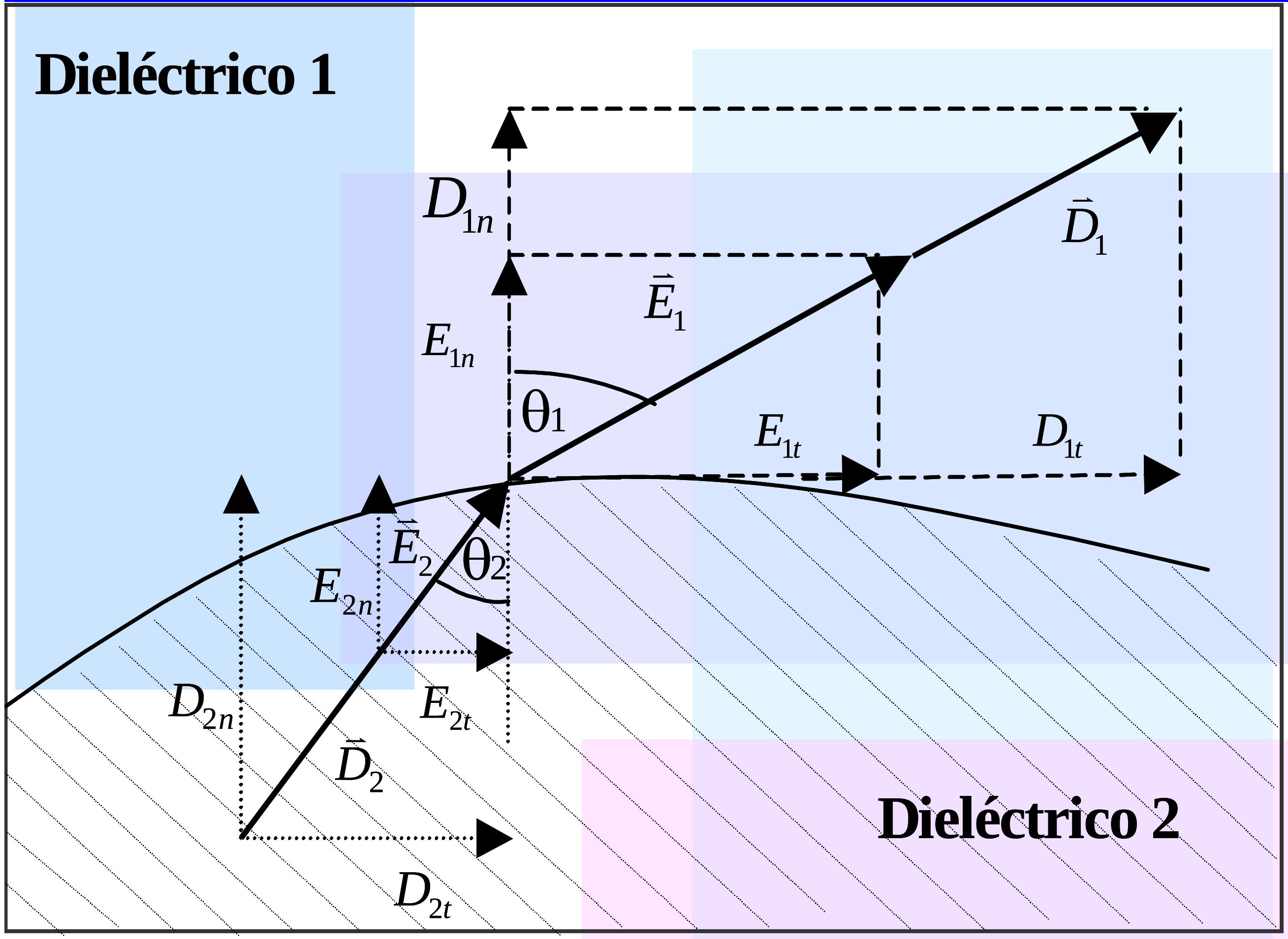
$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}\text{, y } Q_{libre} = \sigma_l \Delta A \Rightarrow D_{1n}\Delta A - D_{2n}\Delta A + \iint_{manto} \vec{D}\cdot dS = \sigma_l \Delta A$$

$$\Delta h \to 0 \Rightarrow \iint_{manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l$$

$$\text{si } \sigma_l = 0 \quad \begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \end{cases}$$

Refracción del campo eléctrico



$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

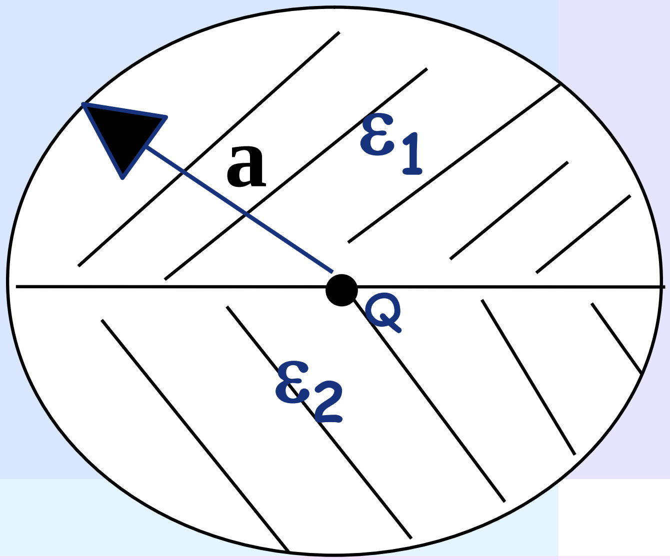
$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

Consideraciones sobre Simetría

I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Calcular E y D dentro de la esfera de radio a



Consideraciones sobre Simetría

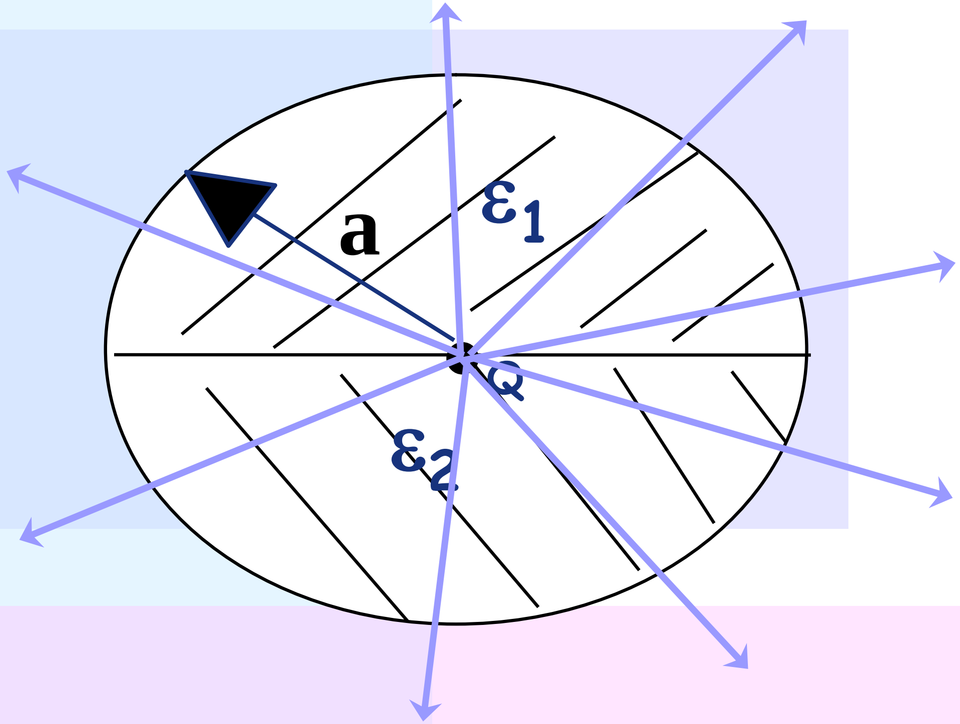
I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Supuesto:

Campos son radiales

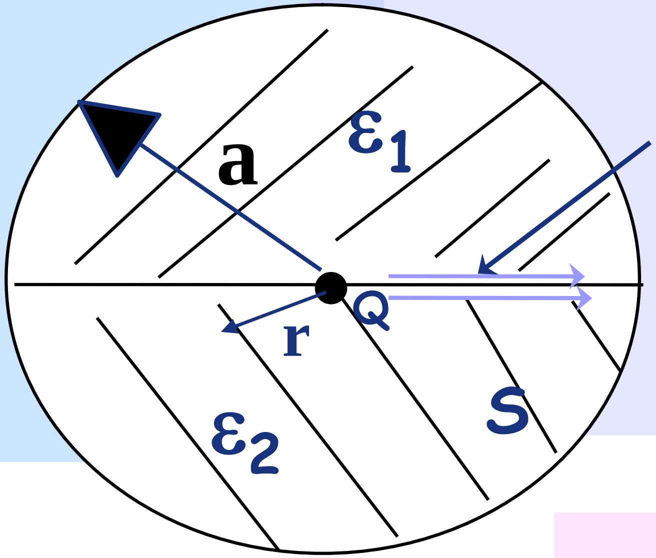
$$\vec{D}_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = D_2(r)\hat{r},$$

$$\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad \vec{E}_2 = E_2(r)\hat{r},$$



Consideraciones sobre Simetría

I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

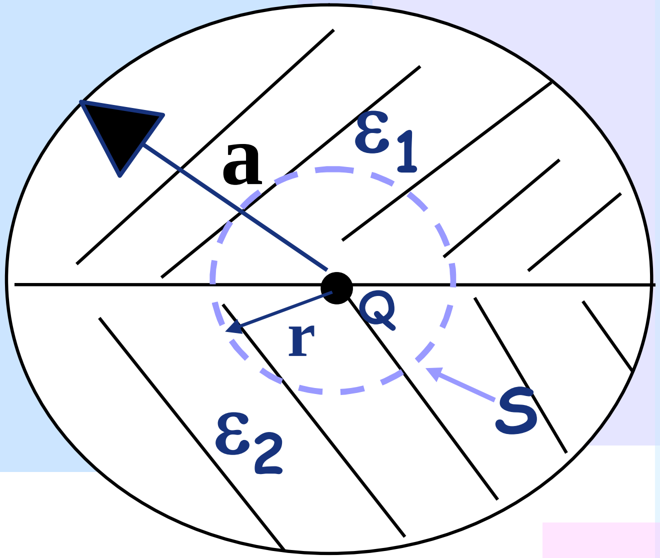


Condición de Borde

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \dfrac{D_1(r)}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_2(r)}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

Consideraciones sobre Simetría

I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro



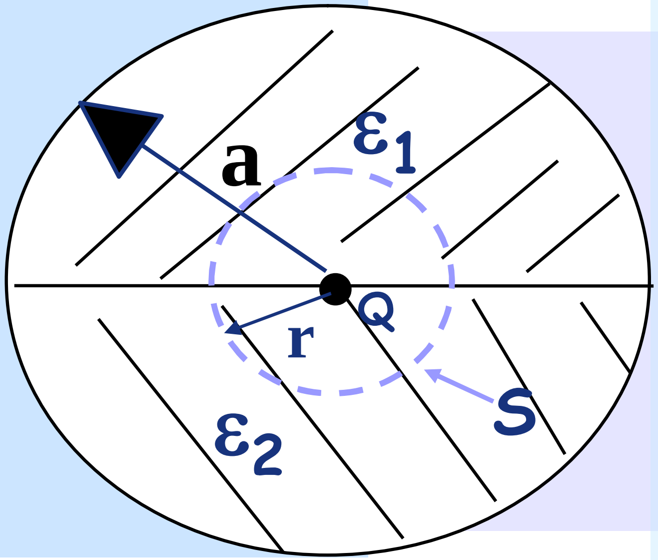
y aplicando la Ley de gauss

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre} \quad \Rightarrow$$

$$\iint_{ZONAI} \vec{D}_1 \bullet d\vec{s} + \iint_{ZONAII} \vec{D}_2 \bullet d\vec{s} = Q \quad \Rightarrow$$

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$

Consideraciones sobre Simetría



$$\left.\begin{aligned} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 &= Q \\ \varepsilon_1 D_2 &= \varepsilon_1 D_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2) r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2) r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2) r^2}\hat{r}$$

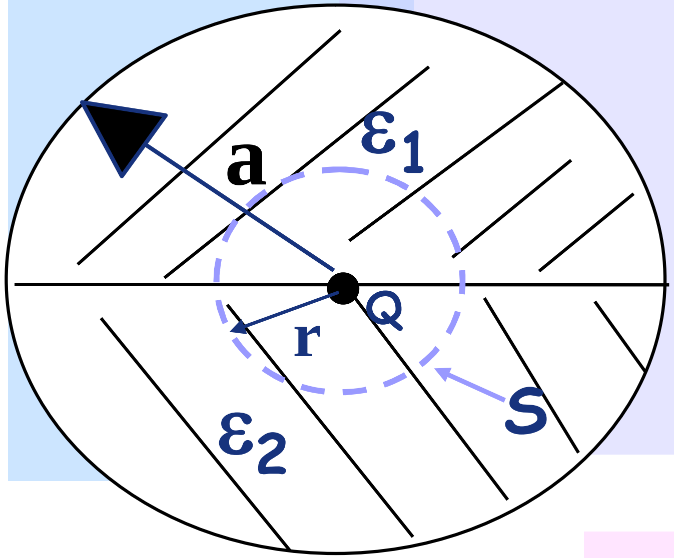
$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2) r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P}_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2) r^2}\hat{r}$$

Consideraciones sobre Simetría

$$\rho_P = -\nabla \bullet \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot P_\theta\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\phi}{\partial\phi}$$

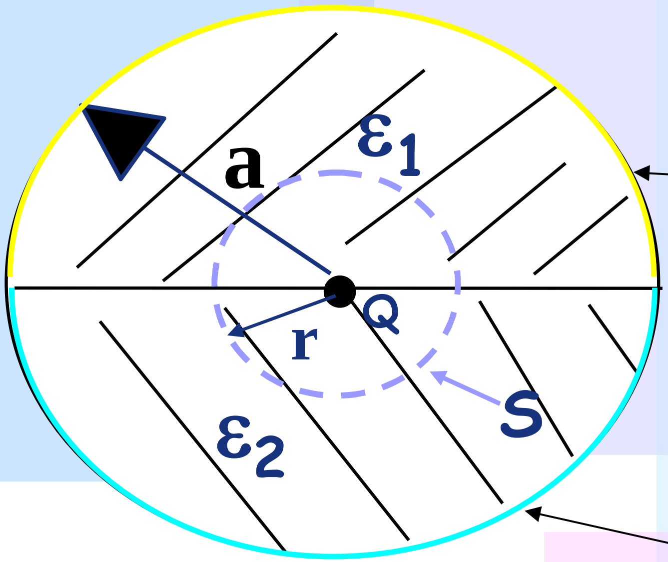


$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_P = -\nabla \bullet \vec{P} = 0$$

$$\sigma_{Pi} = \vec{P} \bullet \hat{n} = \left.\frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\right|_{r=a} \hat{r} \bullet \hat{r} = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

Consideraciones sobre Simetría



$$\vec{P}_i = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

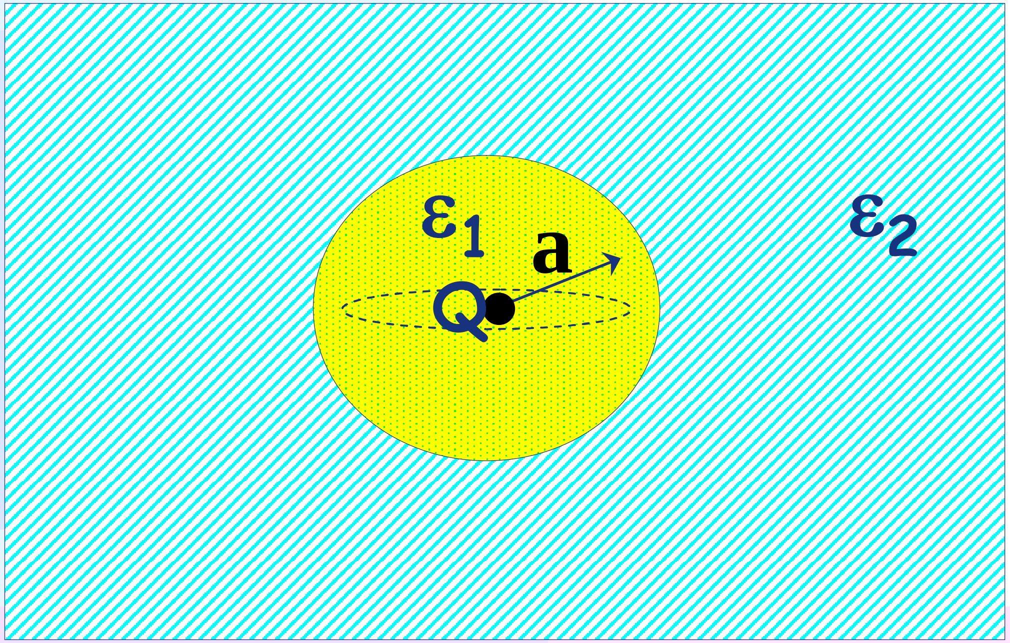
$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Calcular E y D en todo el espacio



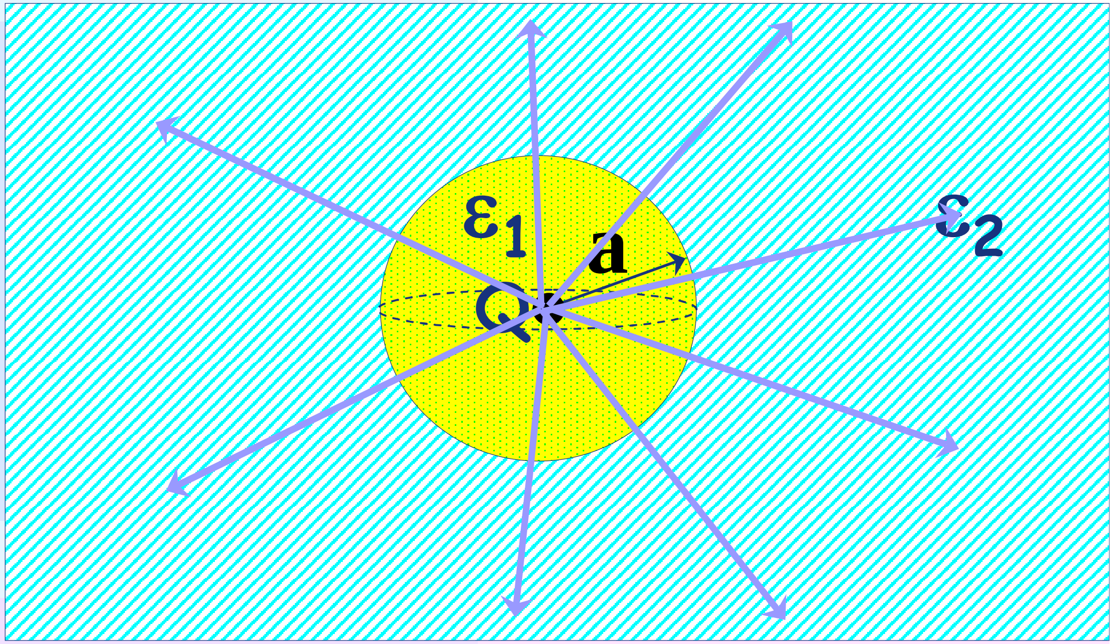
Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Campos son radiales

$$\vec{D}_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = D_2(r)\hat{r},$$

$$\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad \vec{E}_2 = E_2(r)\hat{r},$$



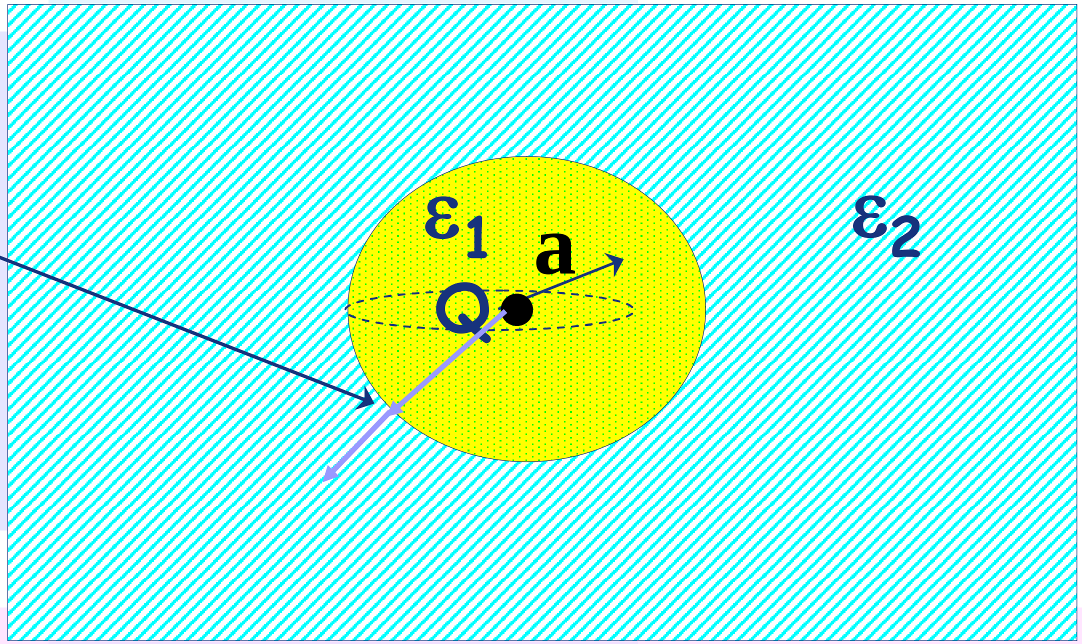
Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Condición de Borde en $r = a$

$$\vec{D}_1(r=a)=\vec{D}_2(r=a)$$

NO hay carga libre en la interfaz

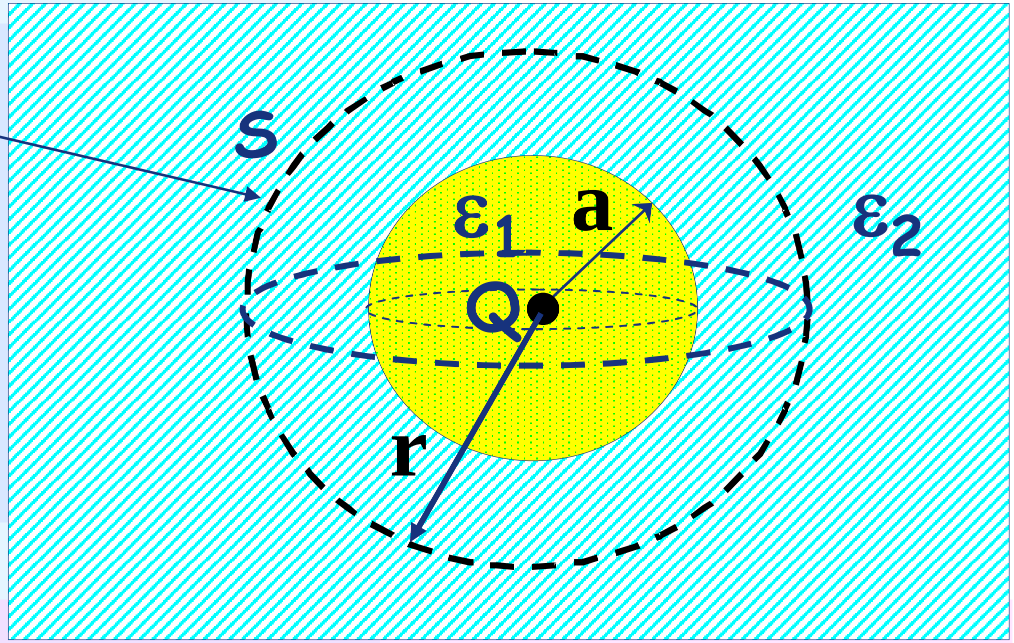


Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Aplicando la ley de Gauss en S

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

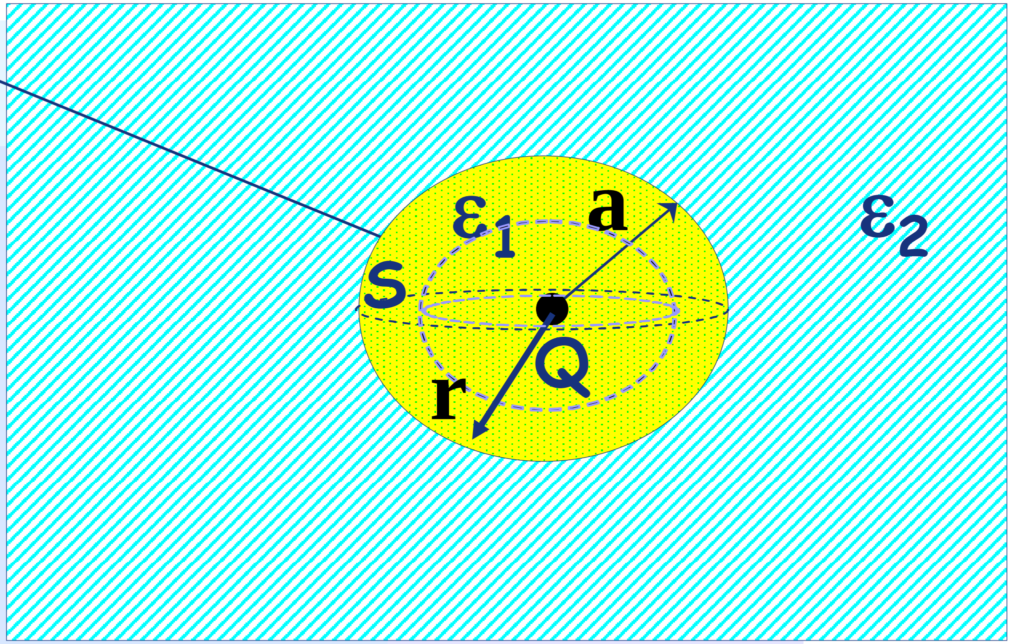


$$\Rightarrow 4\pi r^2 D(\vec{r}) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{r}$$

Consideraciones sobre Simetría

Aplicando la ley de Gauss en S



$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

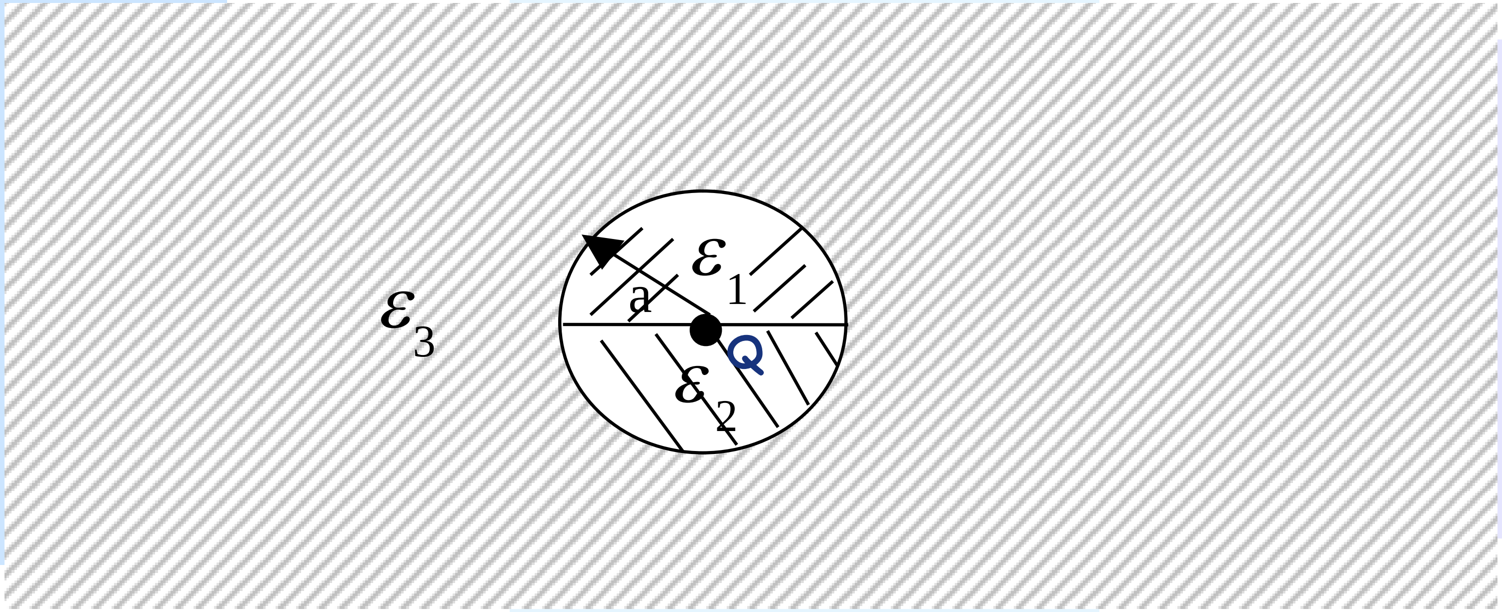
$$\Rightarrow 4\pi r^2 D(\vec{r}) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{r}$$

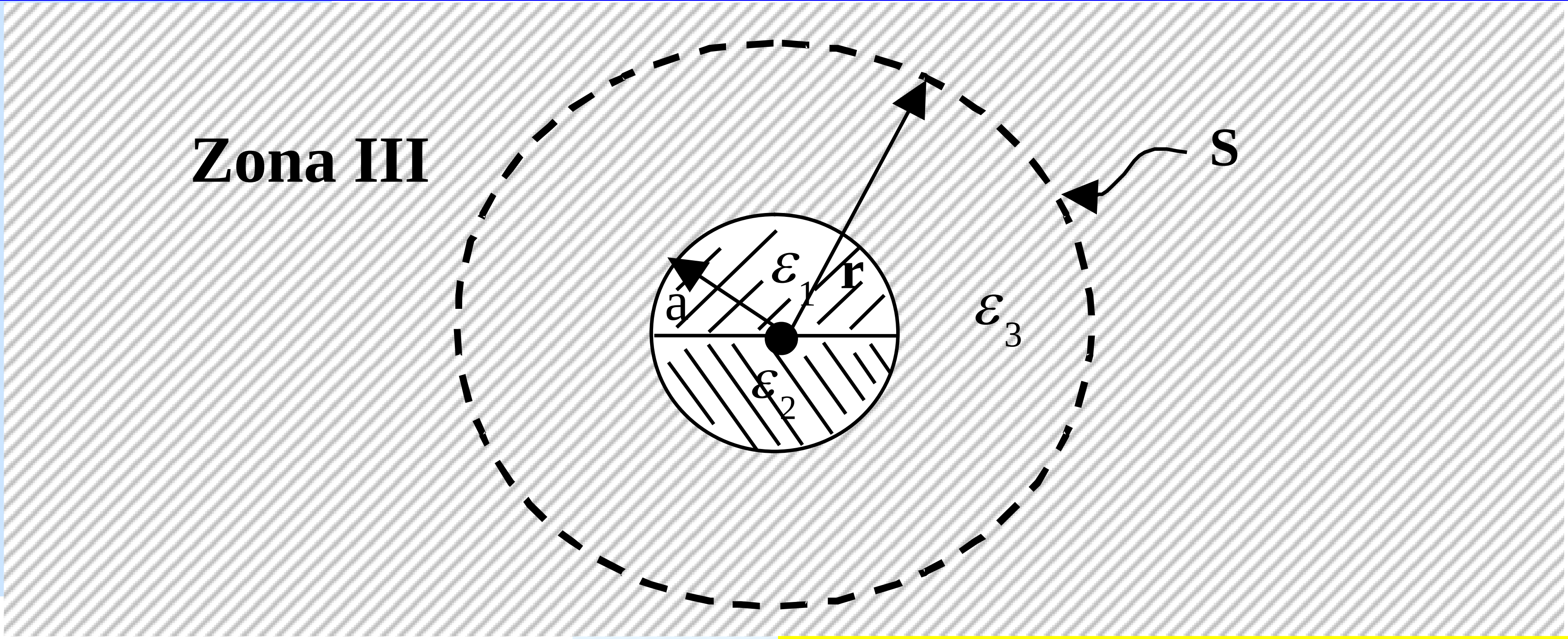
Notar que $D_1 = D_2$ en todo el espacio

Consideraciones sobre Simetría

III. Caso tres medios con carga puntual Q en el centro

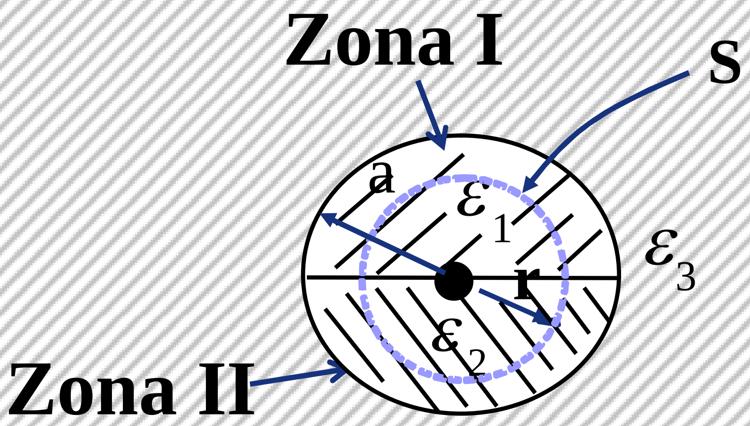


Consideraciones sobre Simetría



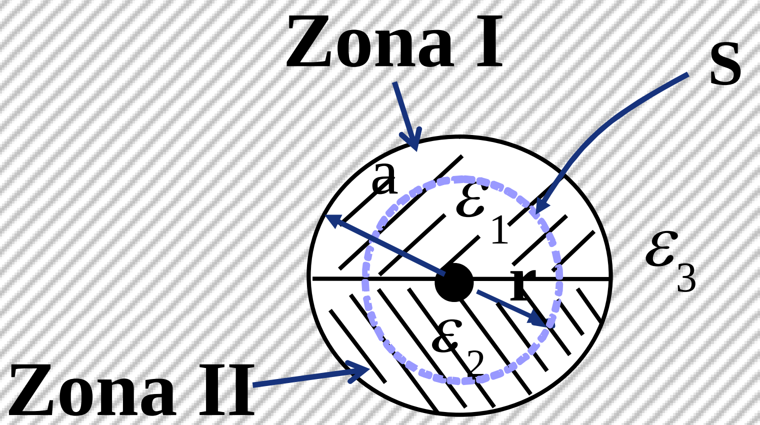
$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre} \Rightarrow 4\pi r^2 D(r) = Q \Rightarrow \vec{D}_3(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_3(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_3 r^2}\hat{r}$$

Consideraciones sobre Simetría



Para 0<*r*<a tenemos dos medios. En la superficie de separación la componente tangencial del campo es la misma

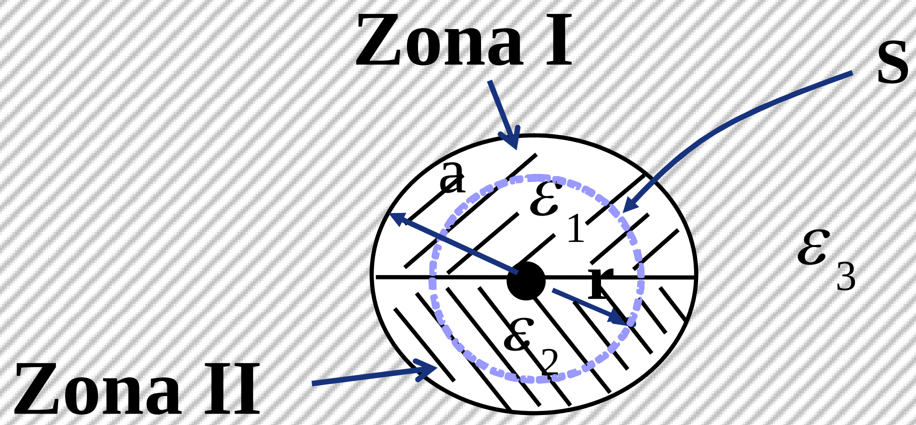
Consideraciones sobre Simetría



Luego dado que los campos son radiales, se debe cumplir:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \dfrac{D_1(r)}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_2(r)}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

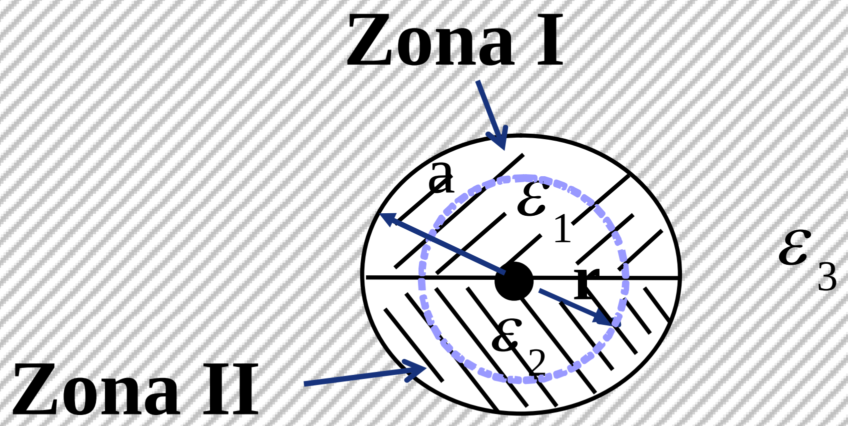
Consideraciones sobre Simetría



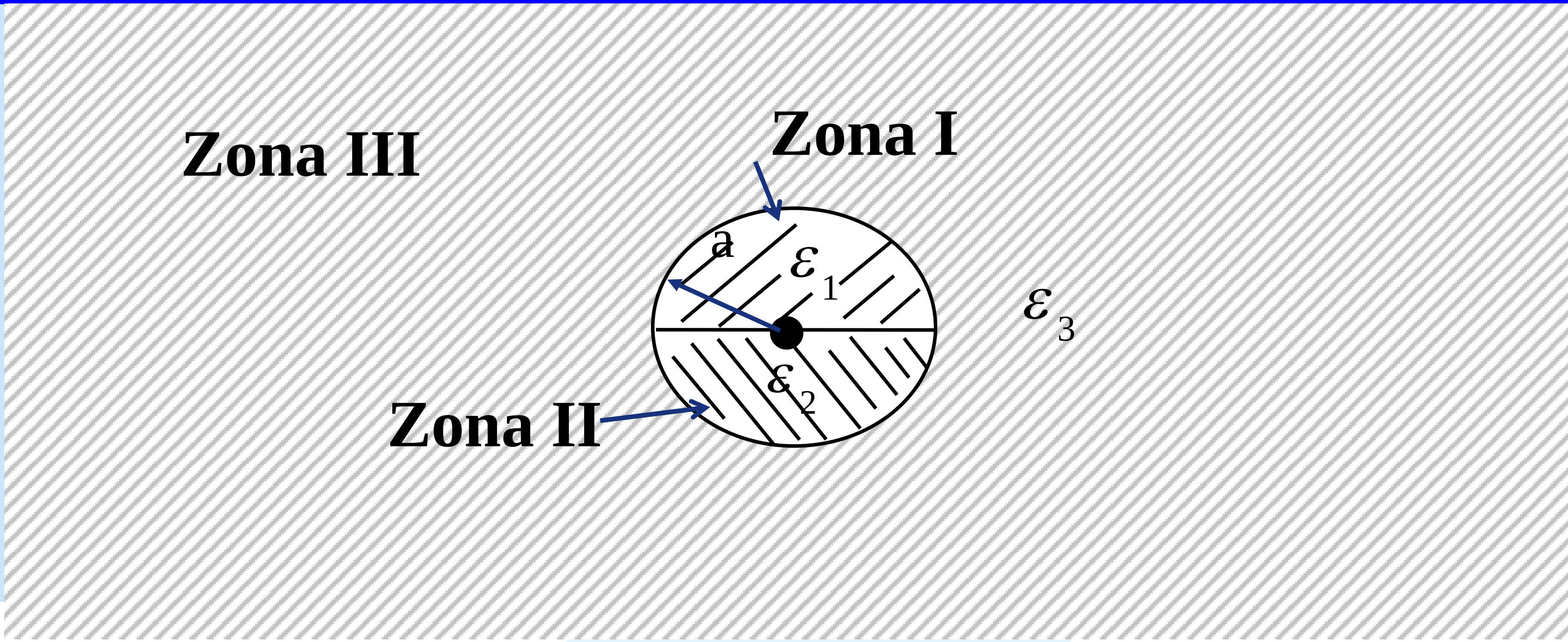
Aplicando la Ley de Gauss:

$$\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre} \Rightarrow \iint_{ZONA\,I} \vec{D}_1 \bullet d\vec{s} + \iint_{ZONA\,II} \vec{D}_2 \bullet d\vec{s} = Q \Rightarrow D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$

Consideraciones sobre Simetría

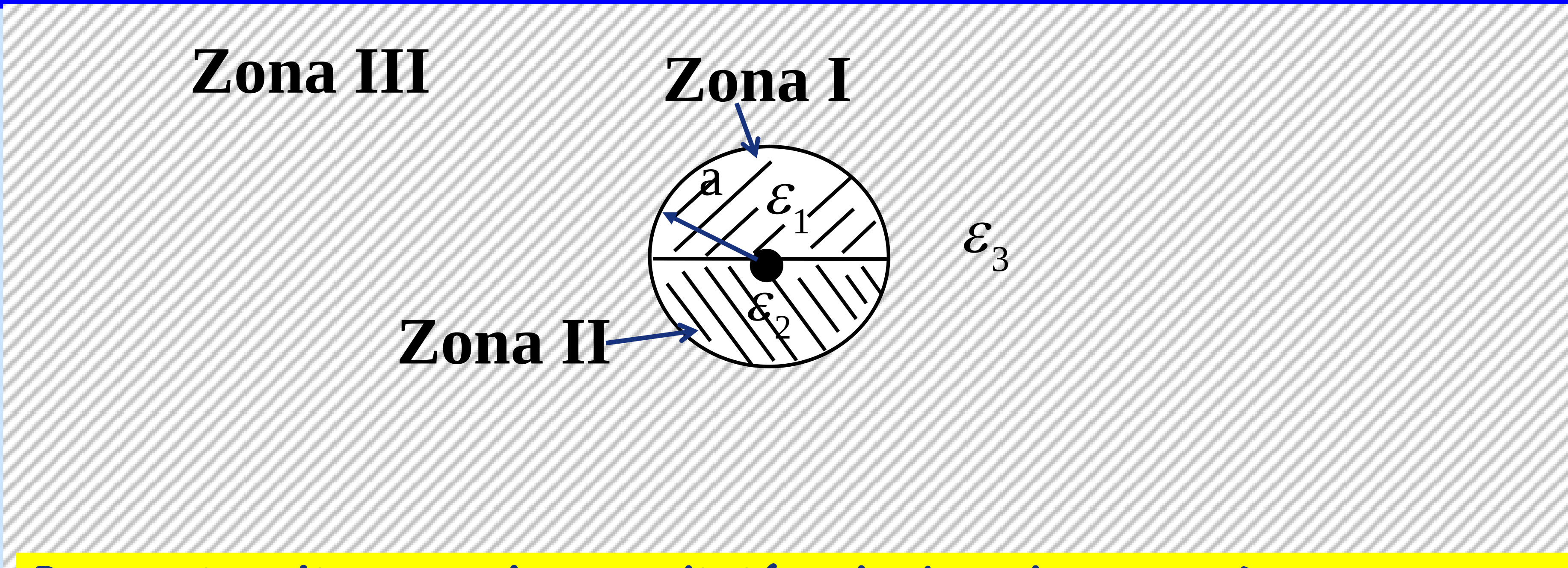


$$\left.\begin{array}{l} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q \\ \varepsilon_1 D_2 = \varepsilon_1 D_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$



En resumen: $\vec{D}_1 = \dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = \dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_3 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$

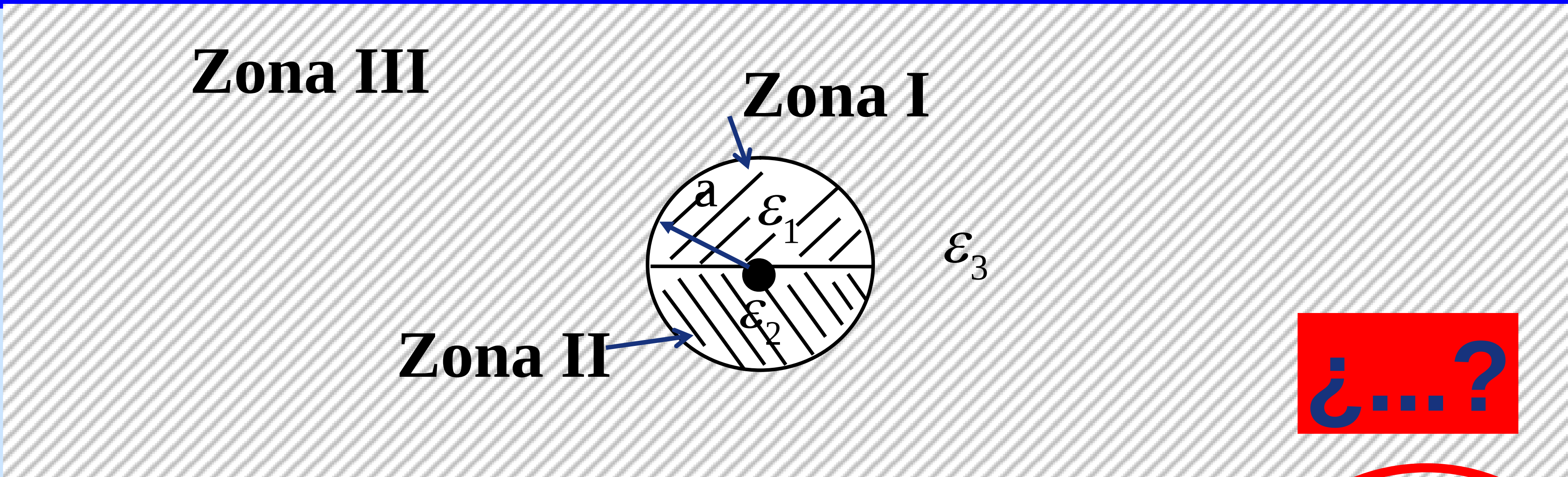
Notar que si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$



Pero si aplicamos la condición de borde para D en r=a:

$$\vec{D}_1(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_1=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$\vec{D}_2(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_2=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

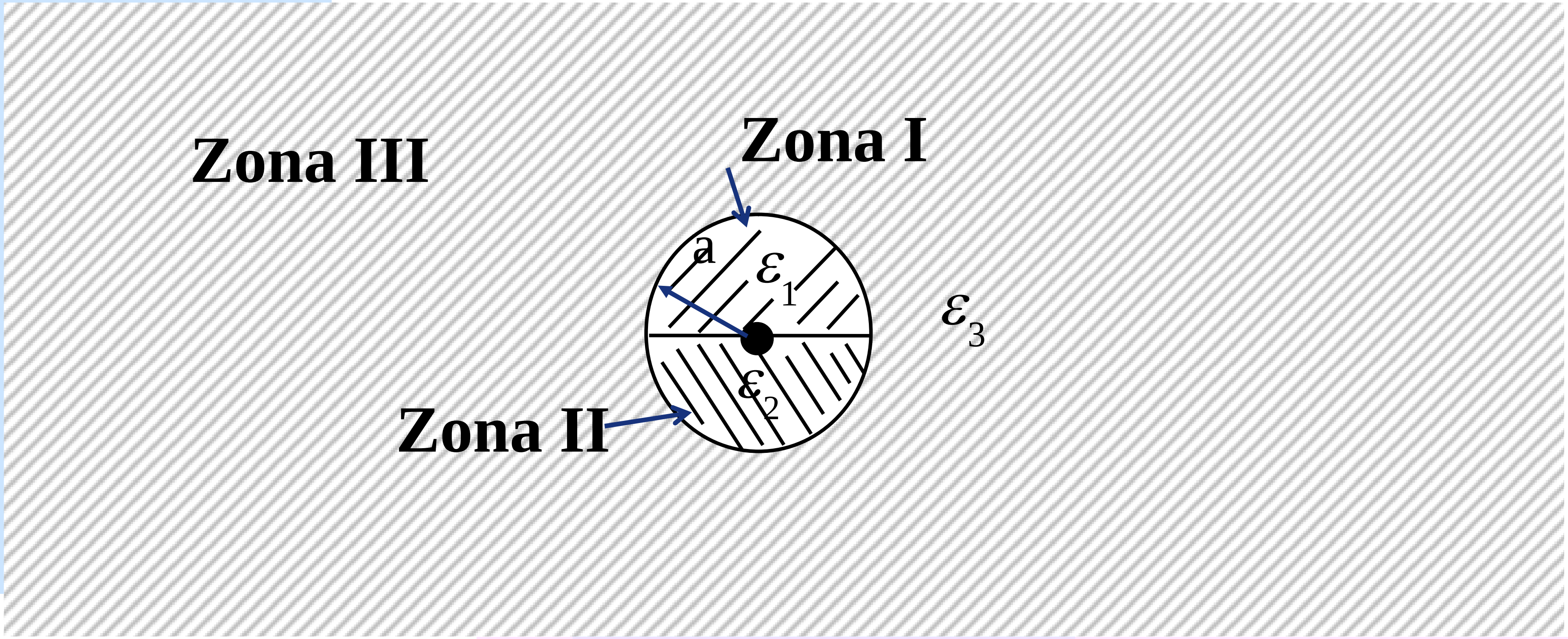


Pero si aplicamos la condición de borde para D en r=a:

$$\vec{D}_1(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_1=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

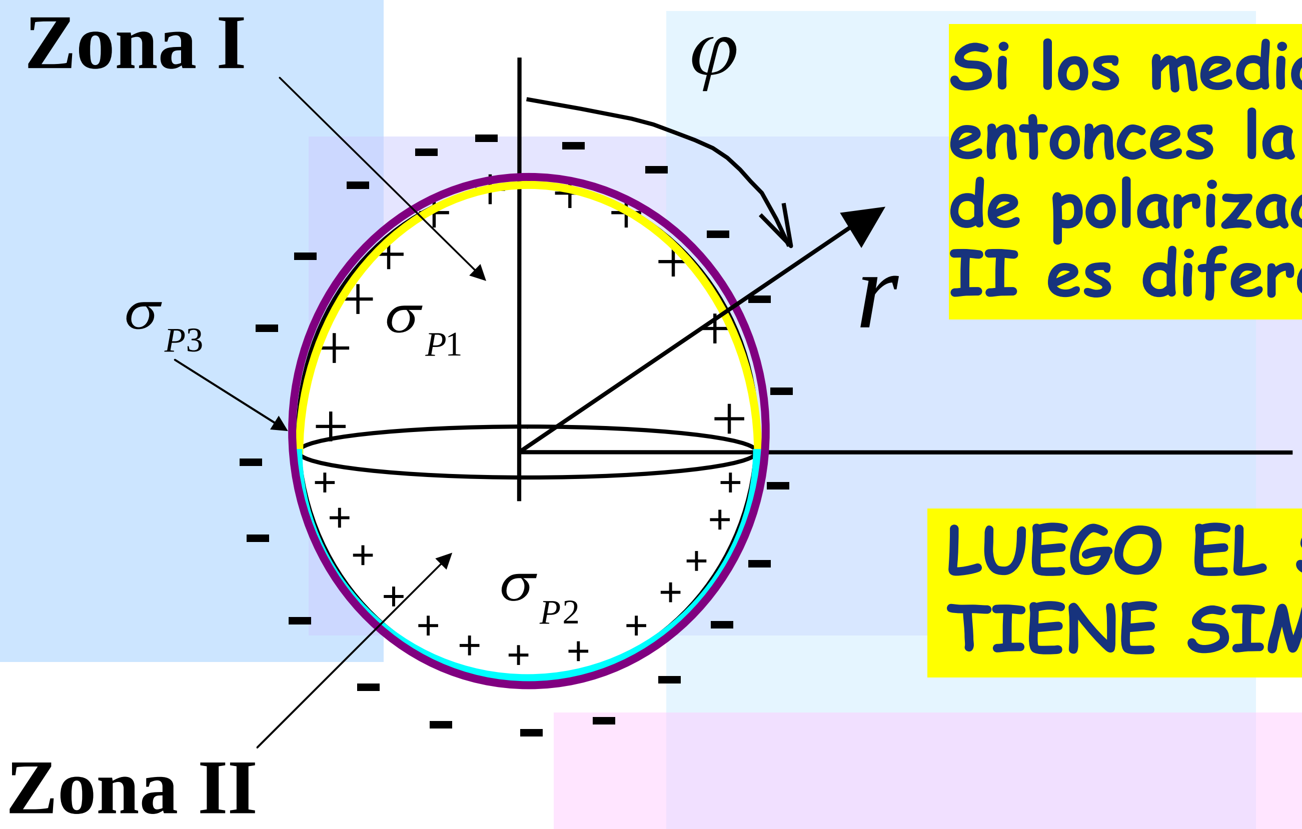
$$\vec{D}_2(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_2=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

Consideraciones sobre Simetría



Al aplicar simetría no debemos olvidar que estamos simplificando un problema más complejo!

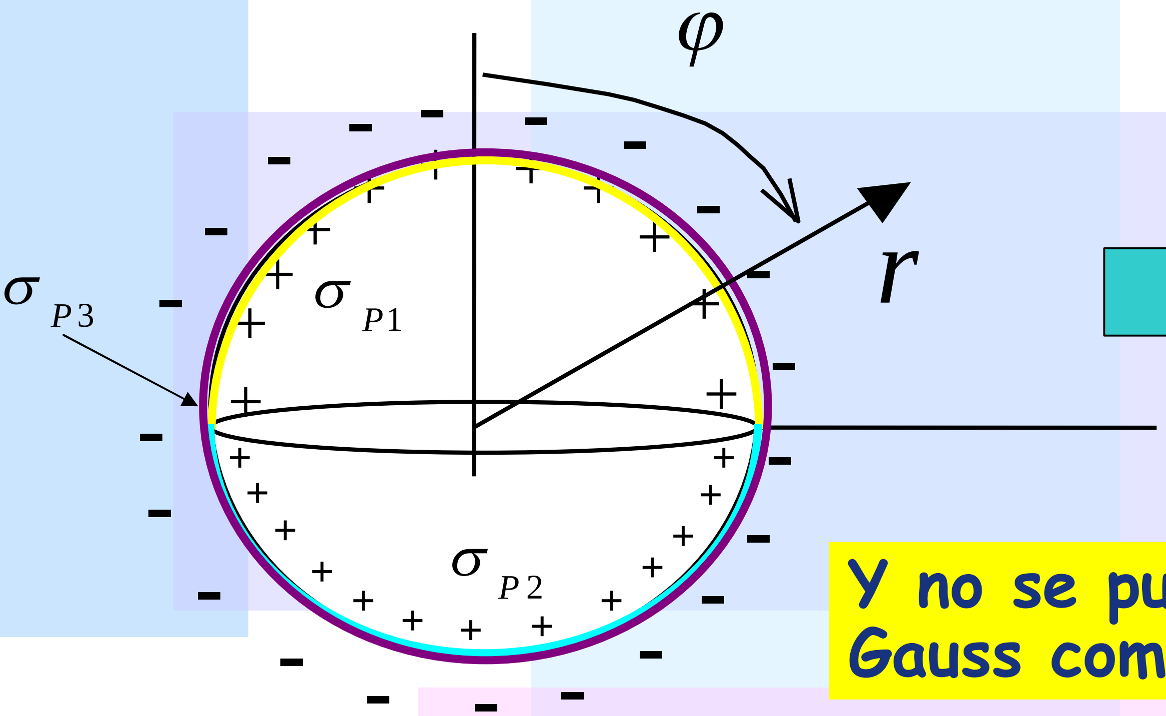
Consideraciones sobre Simetría



Si los medios son diferentes, entonces la carga superficial de polarización en zonas I y II es diferente

LUEGO EL SISTEMA NO TIENE SIMETRIA SEGÚN φ

Consideraciones sobre Simetría

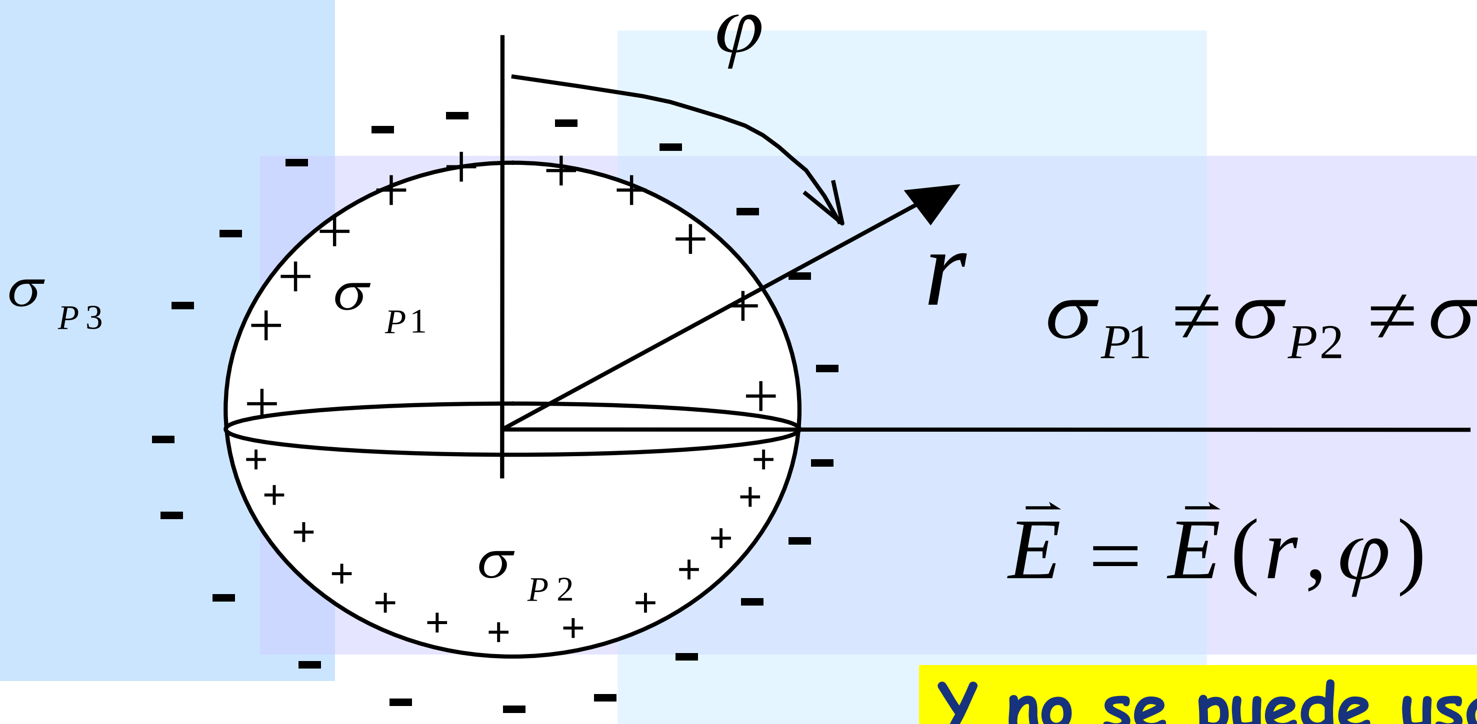


$$\sigma_{P1} \neq \sigma_{P2} \neq \sigma_{P3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}(r, \varphi)$$

Y no se puede usar Ley de Gauss como lo hicimos !

Consideraciones sobre Simetría



$$\sigma_{P1} \neq \sigma_{P2} \neq \sigma_{P3}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi)$$

Y no se puede usar Ley de Gauss como lo hicimos !