



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO

Clase 7

Medios Materiales II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



INDICE

- Generalización de la 1^a ecuación de Maxwell
- Constante dieléctrica
- Clasificación de materiales dieléctricos
- Ruptura dieléctrica
- Condiciones de borde para el campo eléctrico
- Ejemplo
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría

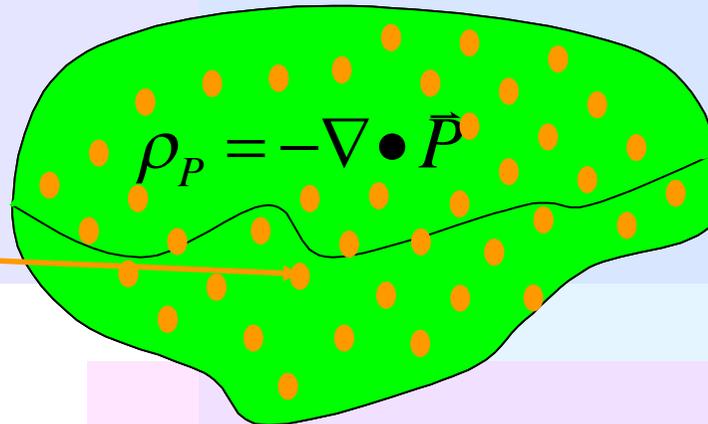


Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

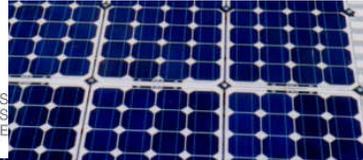
La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$

ρ_{total} corresponde a la carga total que es fuente de campo eléctrico

$\rho_{polarización}$



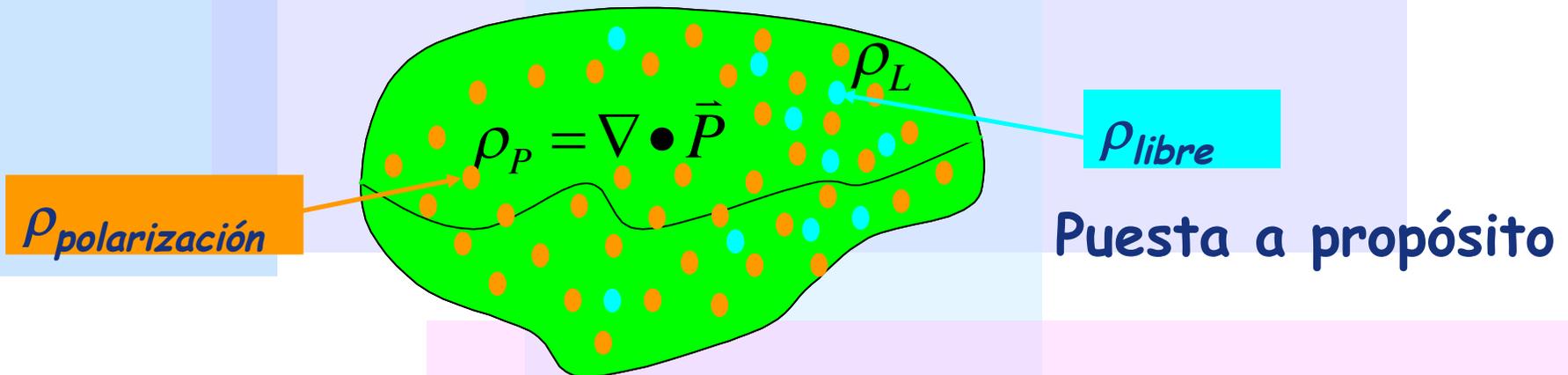
En el caso más general ρ_{total} estará compuesta de carga libre y carga de polarización



Generalización de la 1ª Ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$

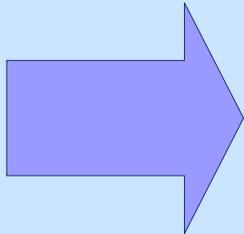
$$\rho_{total} = \rho_{Polarización} + \rho_{libre} \Rightarrow \rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}$$





Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

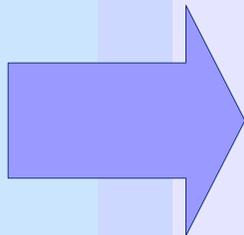
$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} - \rho_P \quad \text{pero} \quad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$



$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.18)$$

$$\rho_L = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (2.19)$$

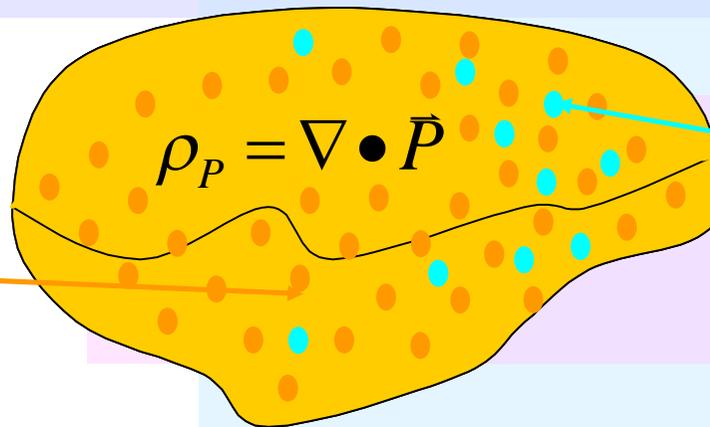
definiendo $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
Vector de desplazamiento



$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1ª ecuación de Maxwell

$\rho_{polarización}$



ρ_{libre}

Puesta a propósito



Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1ª ecuación de Maxwell

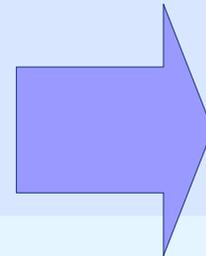
donde

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Vector de desplazamiento

Integrando en un volumen Ω

$$\iiint_{\Omega} \rho_L dv = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv$$



$$Q_L = \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

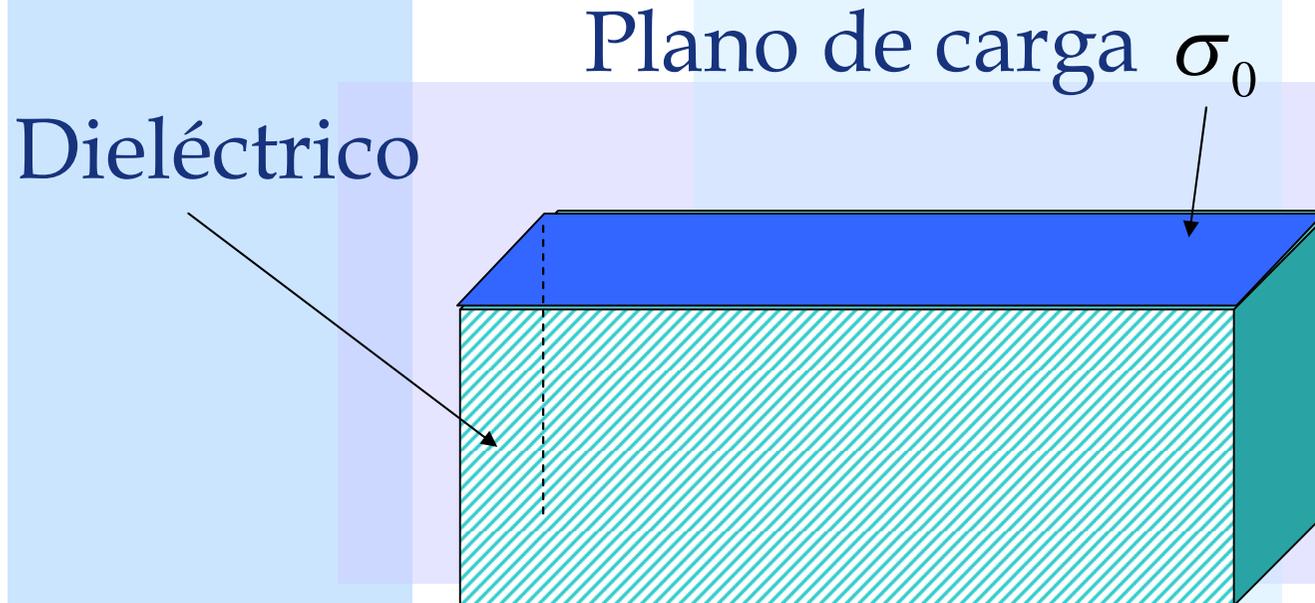
Q_L

$$\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Ley de Gauss en la materia



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico



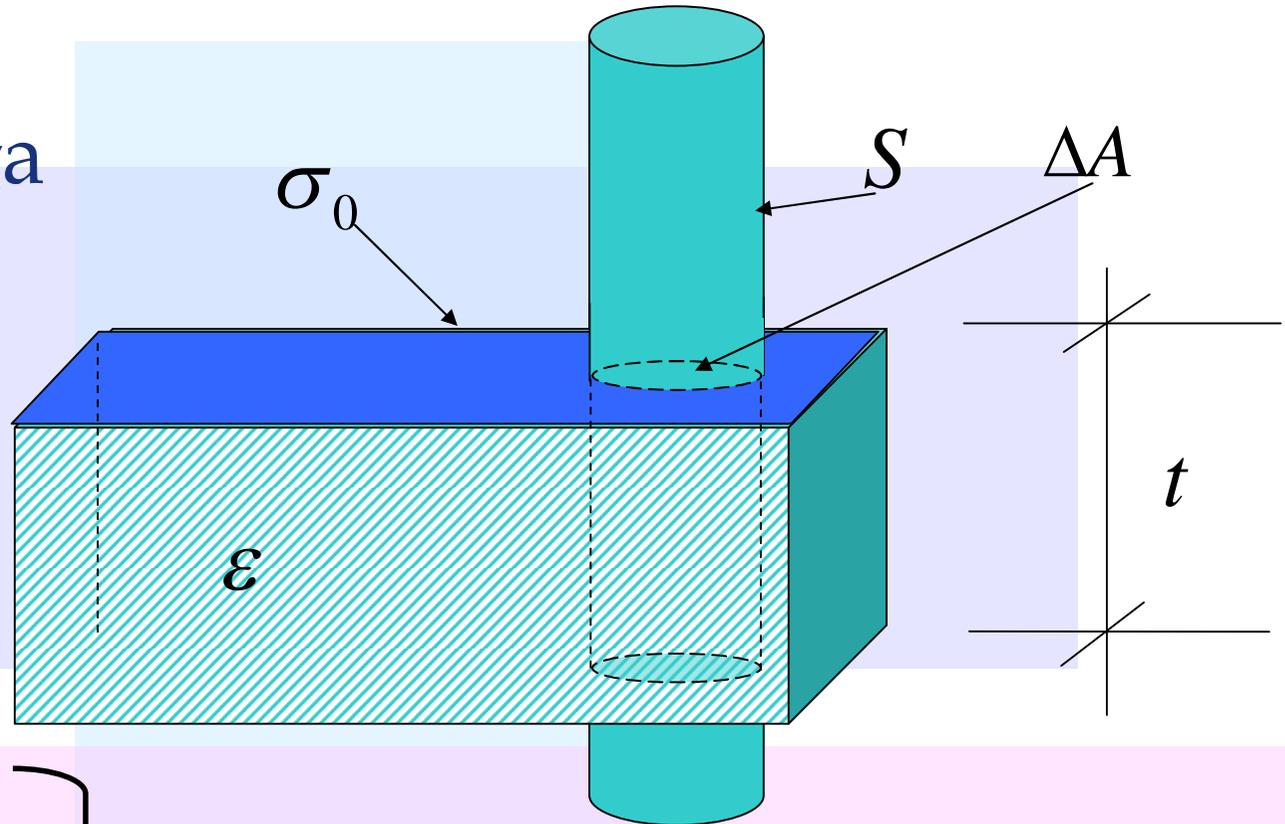
Se sabe además que la relación entre campos eléctricos y de desplazamiento es lineal $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Plano de carga
(infinito)

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_T$$



$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\Delta A D_n$$

$$D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$

Fuentes de D son
sólo cargas libres



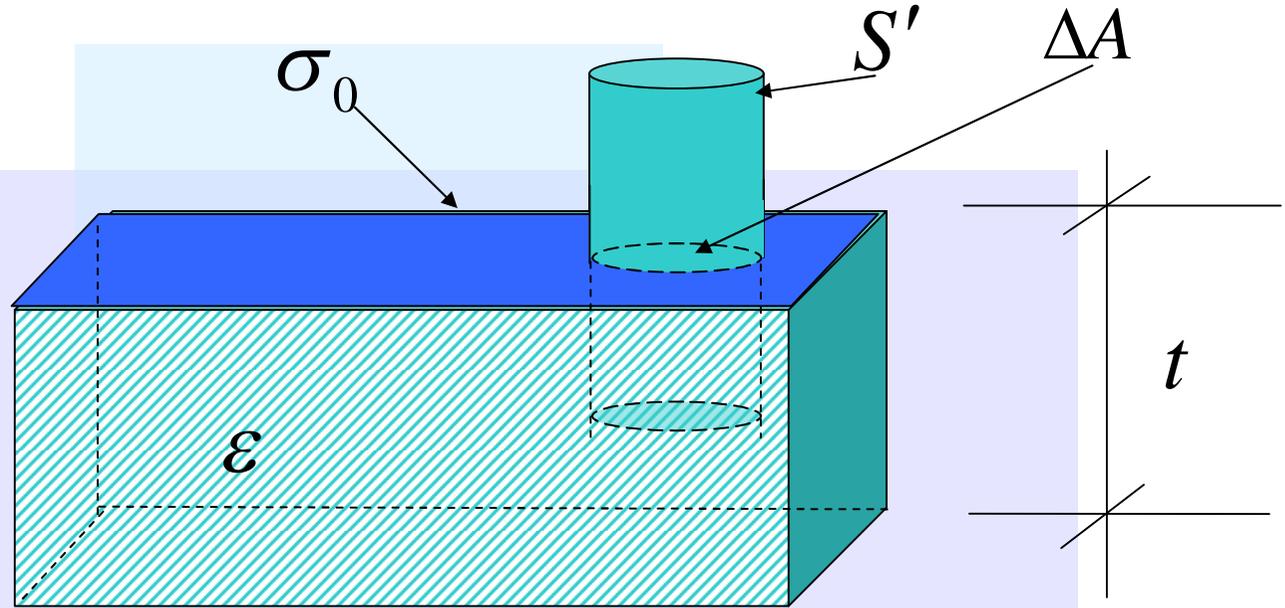
Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

$$\oiint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_T$$

$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oiint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\Delta A D_n$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$



$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2} \hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Fuentes de D son sólo cargas libres



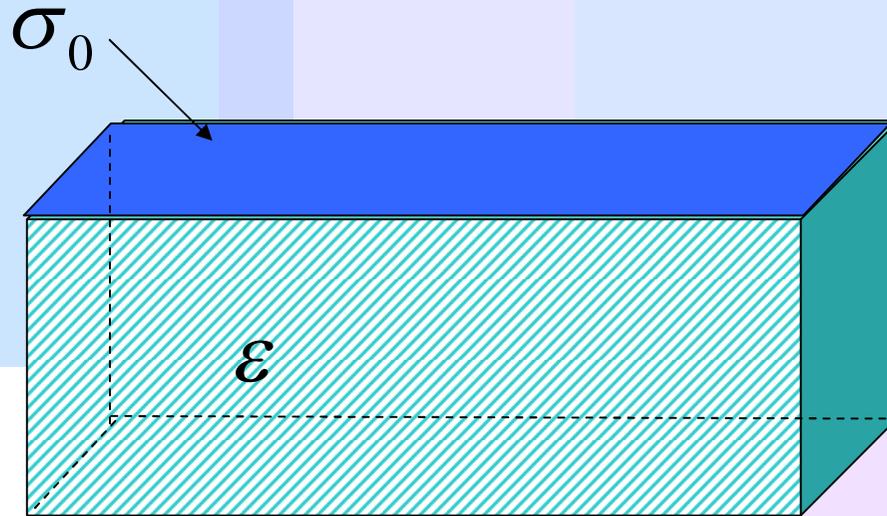
Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Al interior del medio material

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k}$$

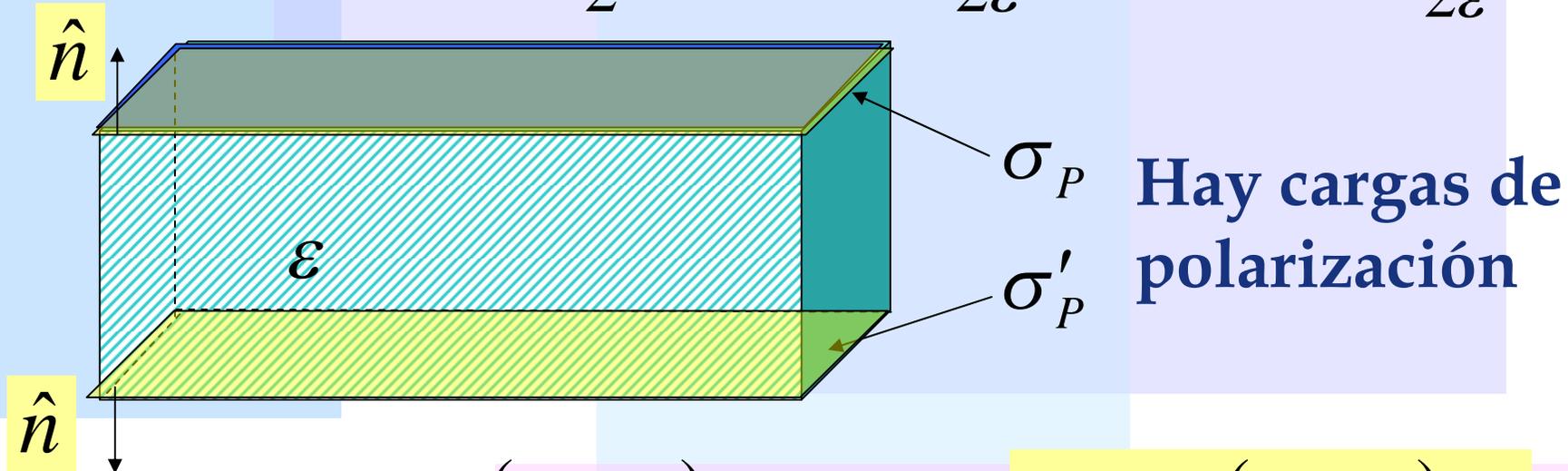




Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Al interior del medio material

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon} \hat{k} \Rightarrow \vec{P} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k}$$



$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k} \cdot \hat{k} \Rightarrow \sigma_P = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0$$

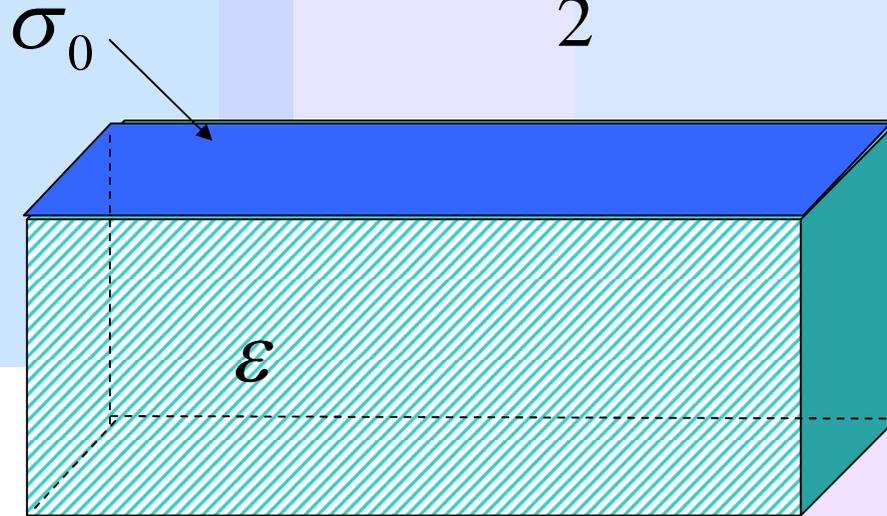
$$\sigma'_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k} \cdot -\hat{k} \Rightarrow \sigma'_P = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0$$



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad \vec{P} = 0 \quad \text{Zona 1}$$

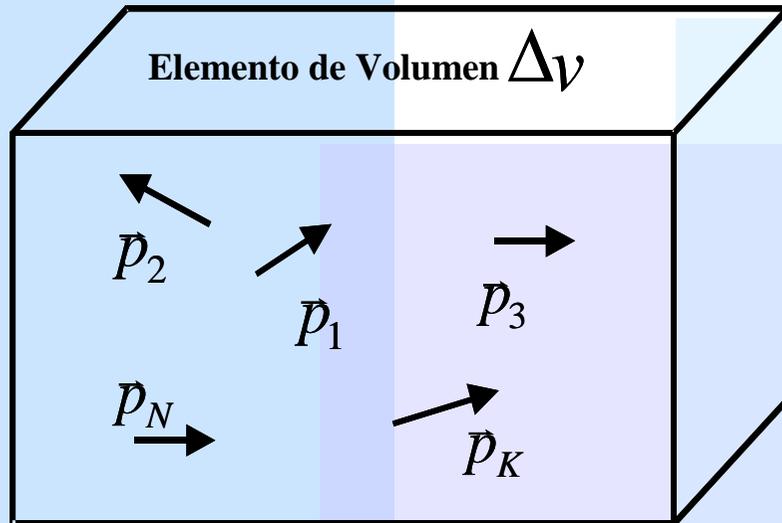


$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon} \hat{k}$$
$$\vec{P} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k} \quad \text{Zona 2}$$

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad \vec{P} = 0 \quad \text{Zona 3}$$



Polarización de medios materiales



$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^N \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

La polarización en medios materiales varía con la intensidad del campo eléctrico aplicado

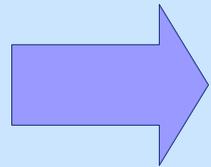
$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material

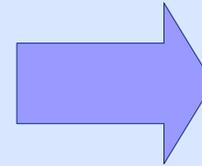


Constante dieléctrica

Teniamos que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pero $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$



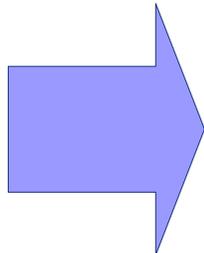
$$\vec{D} = \epsilon_0 (I + \chi_e) \vec{E}$$

Se define

$\epsilon_r = (I + \chi_e)$ Permeabilidad dieléctrica relativa

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

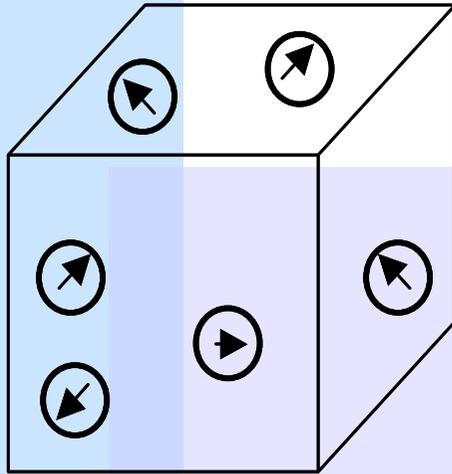
Constante dieléctrica del material



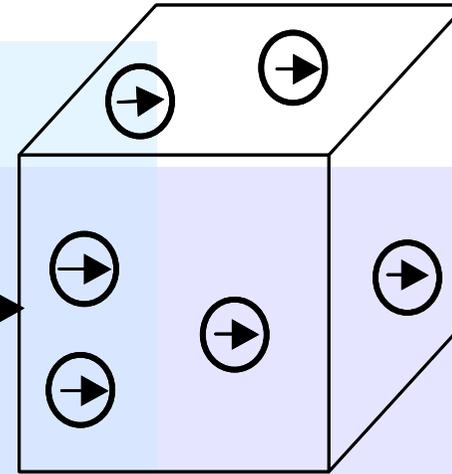
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



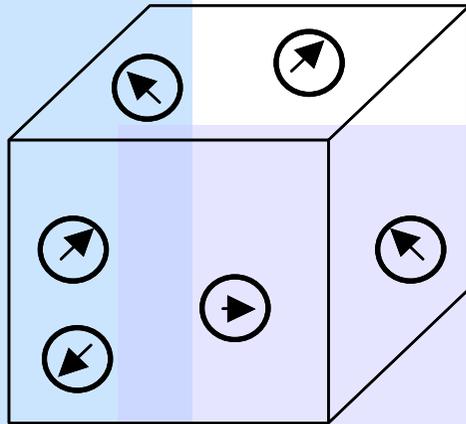
Situación con campo aplicado

i) Material lineal, isótropo y homogéneo

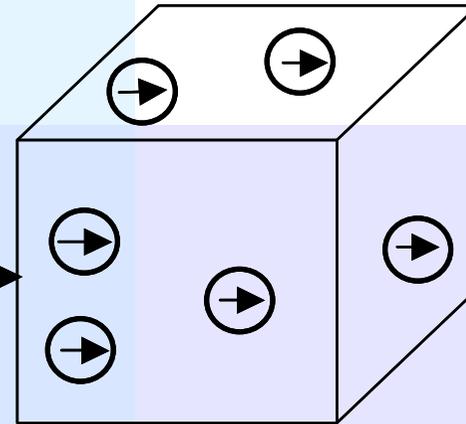
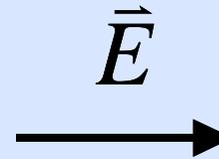
$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$ y \vec{D}, \vec{P} y \vec{E} son paralelos, ϵ es constante



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



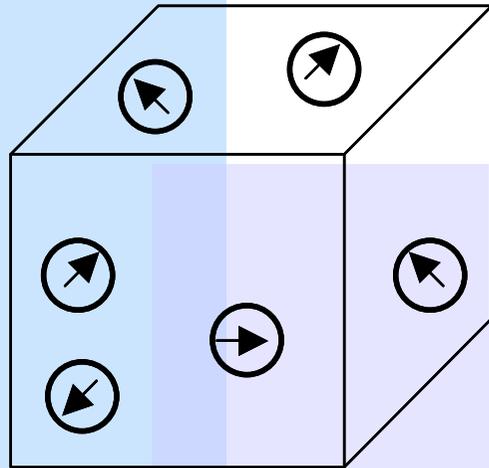
Situación con campo aplicado

ii) Material lineal, isótropo y no homogéneo

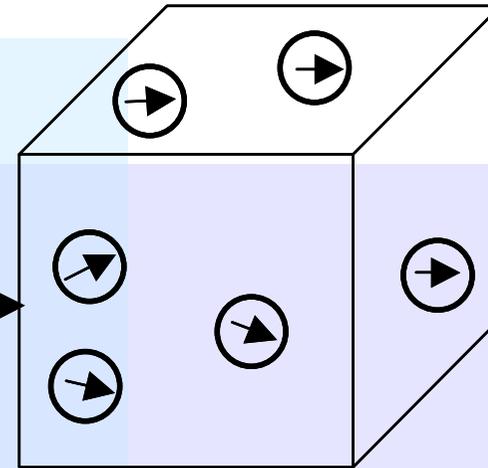
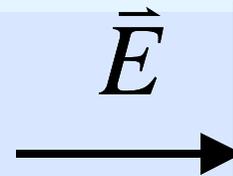
$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$ y \vec{D}, \vec{P} y \vec{E} son paralelos, $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$ no es constante



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



Situación con campo aplicado

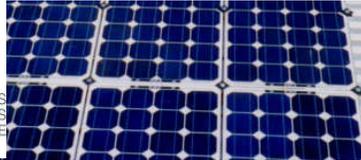
iii) Material lineal, anisótropo y no homogéneo

$$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$$

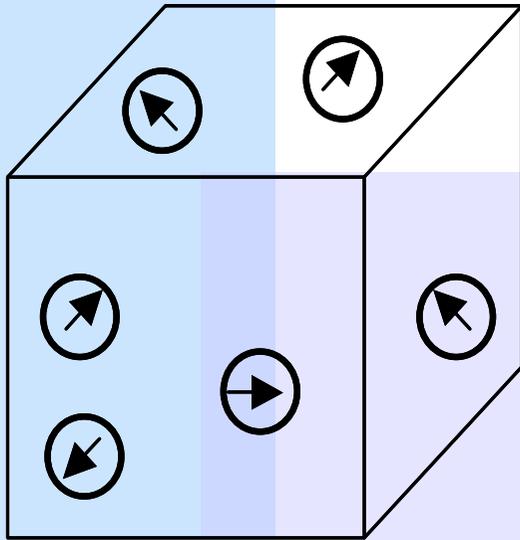
y \vec{D}, \vec{P} y \vec{E}

No son paralelos.

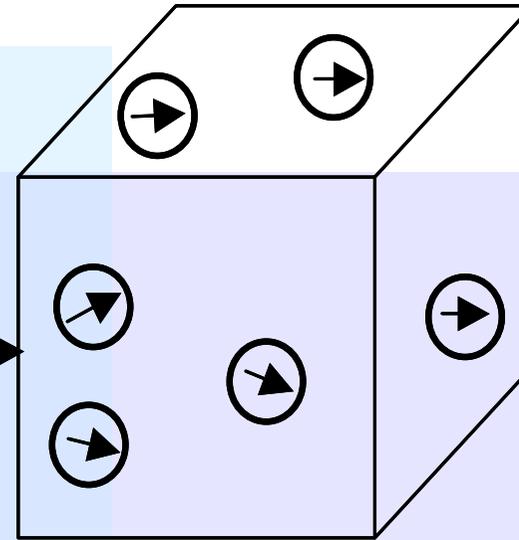
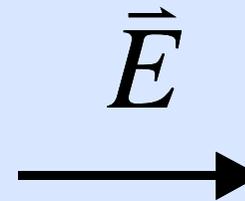
$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$$



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



Situación con campo aplicado

iv) Material no lineal, anisótropo y no homogéneo

$$\|\vec{P}\| \neq \alpha \|\vec{E}\| \quad \text{y} \quad \vec{D}, \vec{P} \text{ y } \vec{E} \text{ No son paralelos, } \vec{D} = [\epsilon] \vec{E}, \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$$



Polarización de medios materiales

$$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\| \Rightarrow \text{Materiales lineales}$$

$$\vec{P} = \alpha(\vec{r})\vec{E} \Rightarrow \text{Materiales isótropos } \vec{P} // \vec{E}$$

Si α es constante \Rightarrow Material homogéneo

$$\text{En general tendremos } \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material



Constante dieléctrica

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, la expresión más general es

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$$

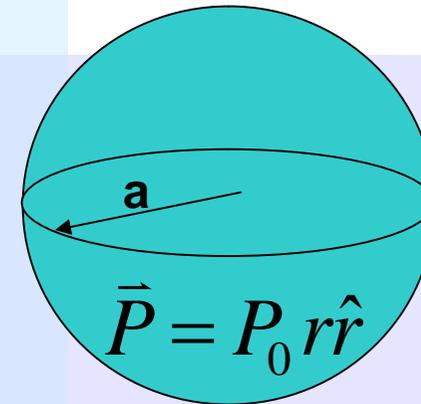


Propuesto

Se tiene esfera dieléctrica con

$$\vec{P} = P_0 r \hat{r} \quad \gamma \quad \epsilon = \epsilon(\vec{r})$$

Calcular $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ y cargas de polarización



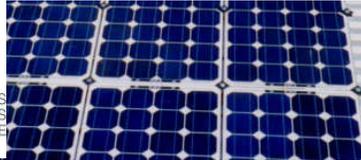
Hint

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot P_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi}$$

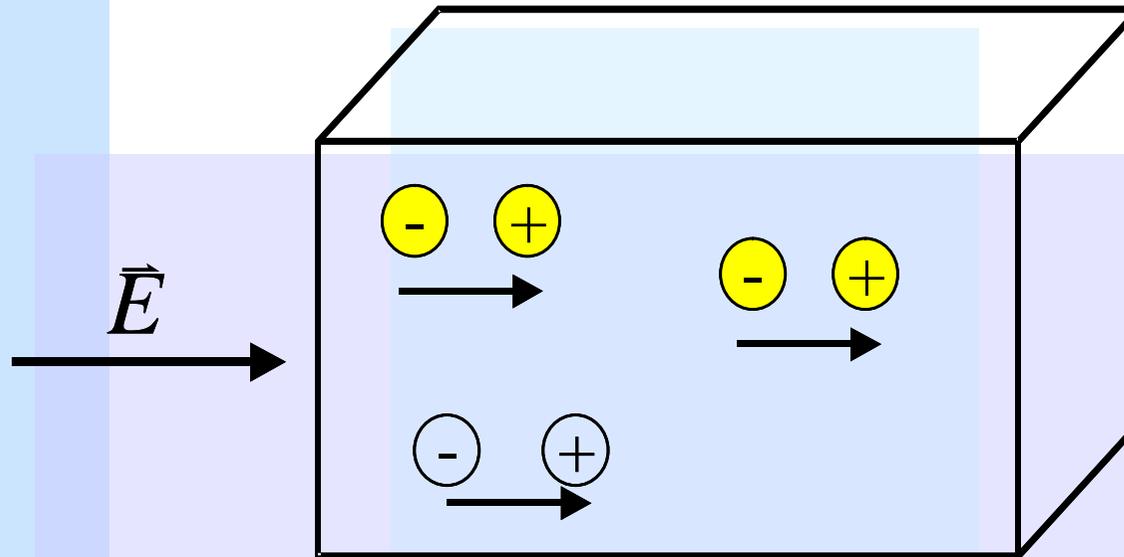


fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

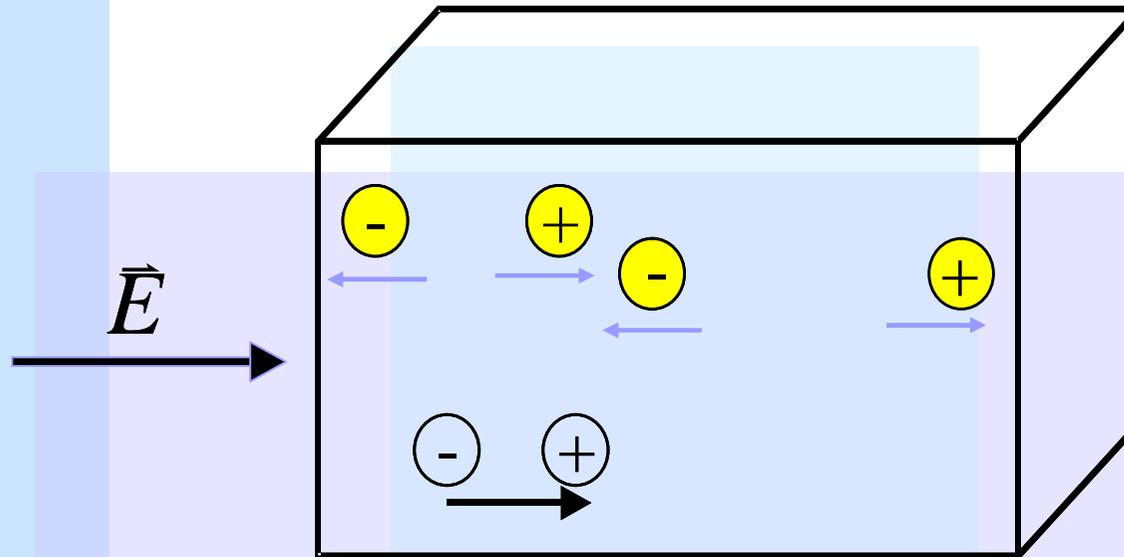


Ruptura dieléctrica





Ruptura dieléctrica



El mínimo valor del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura se denomina "fuerza dieléctrica"



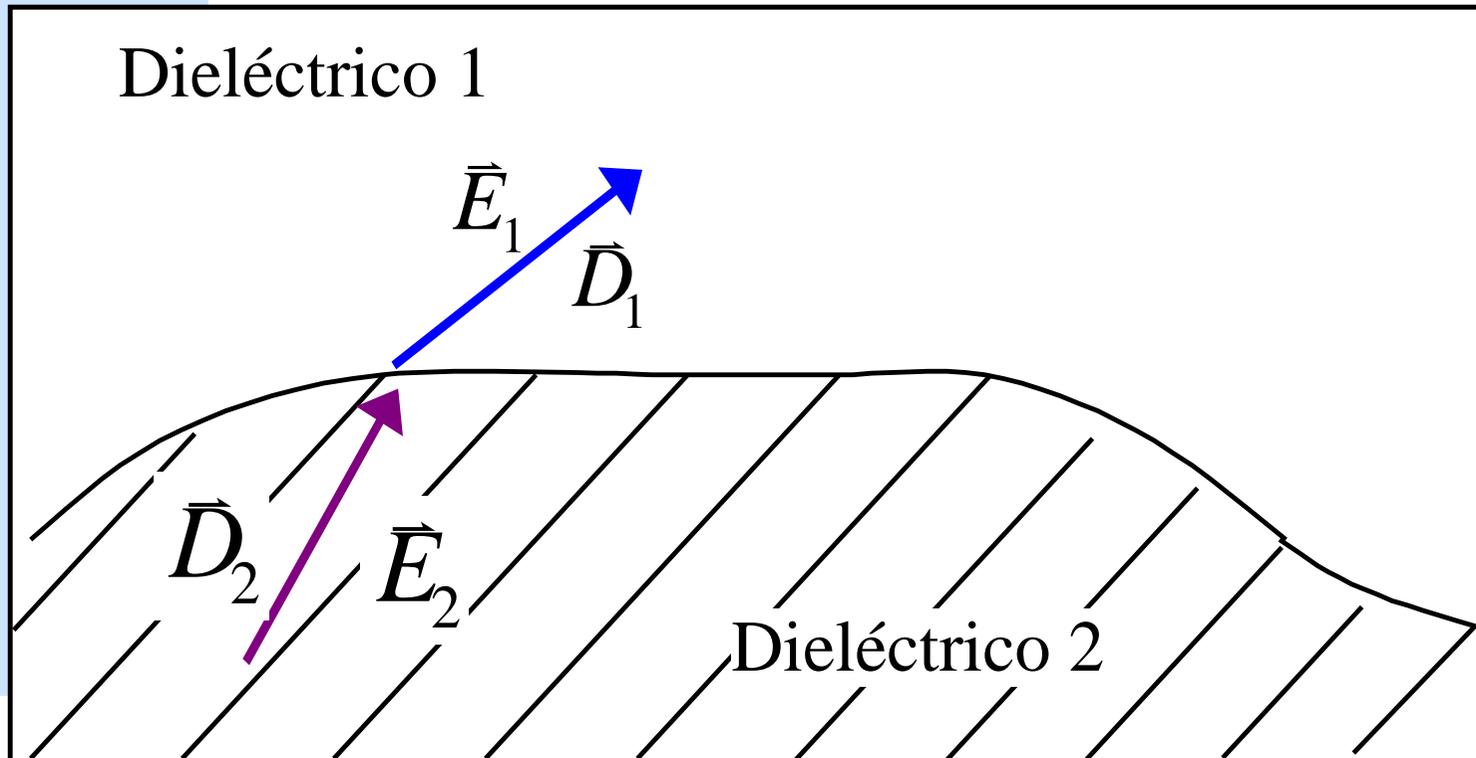
Constante dieléctrica y fuerza dieléctrica

Material	Constante Dieléctrica ϵ_r (adimensional)	Fuerza E (V/m)
Titanato de Bario	1200	7.5×10^6
Agua (mar)	80	
Agua destilada	81	
Nylon	8	
Papel	7	12×10^6
Vidrio	5 - 10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelana	6	
Bakelita	5	20×10^6
Cuarzo (fusionado)	5	30×10^6
Goma (dura)	3.1	25×10^6
Madera	2.5 - 8.0	
Polyestireno	2.55	
Polypropileno	2.25	
Parafina	2.2	30×10^6
Petroleo	2.1	12×10^6
Aire (a 1 atmósfera)	1	3×10^6

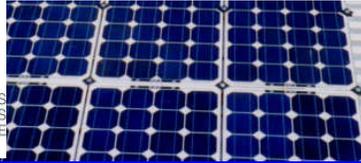
(*) Estos valores pueden variar en otras Tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la permitividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.



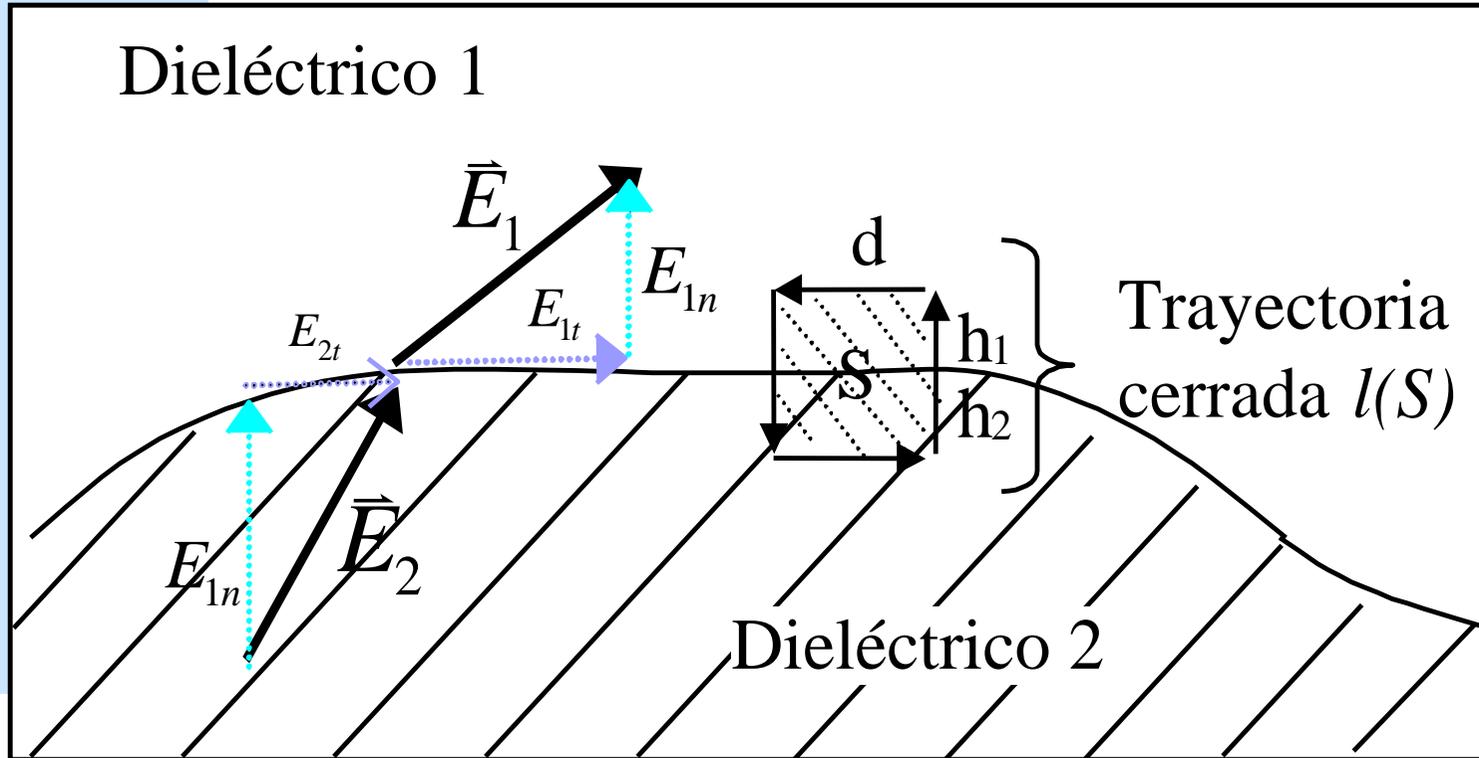
Condiciones de borde



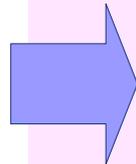
Usaremos dos ecuaciones $\nabla \times \vec{E} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$



Condiciones de borde para el campo eléctrico



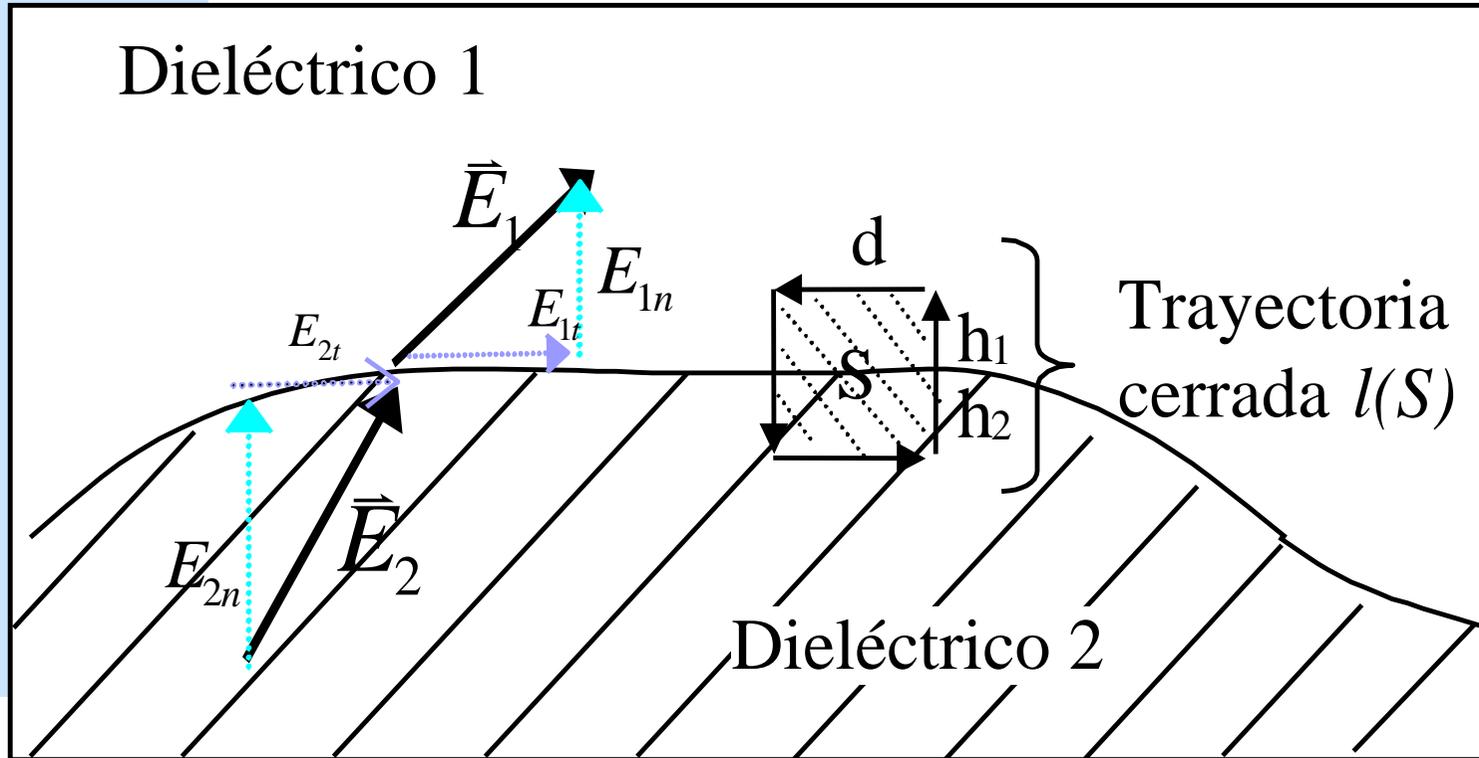
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$



$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

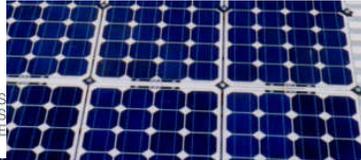


Condiciones de borde para el campo eléctrico

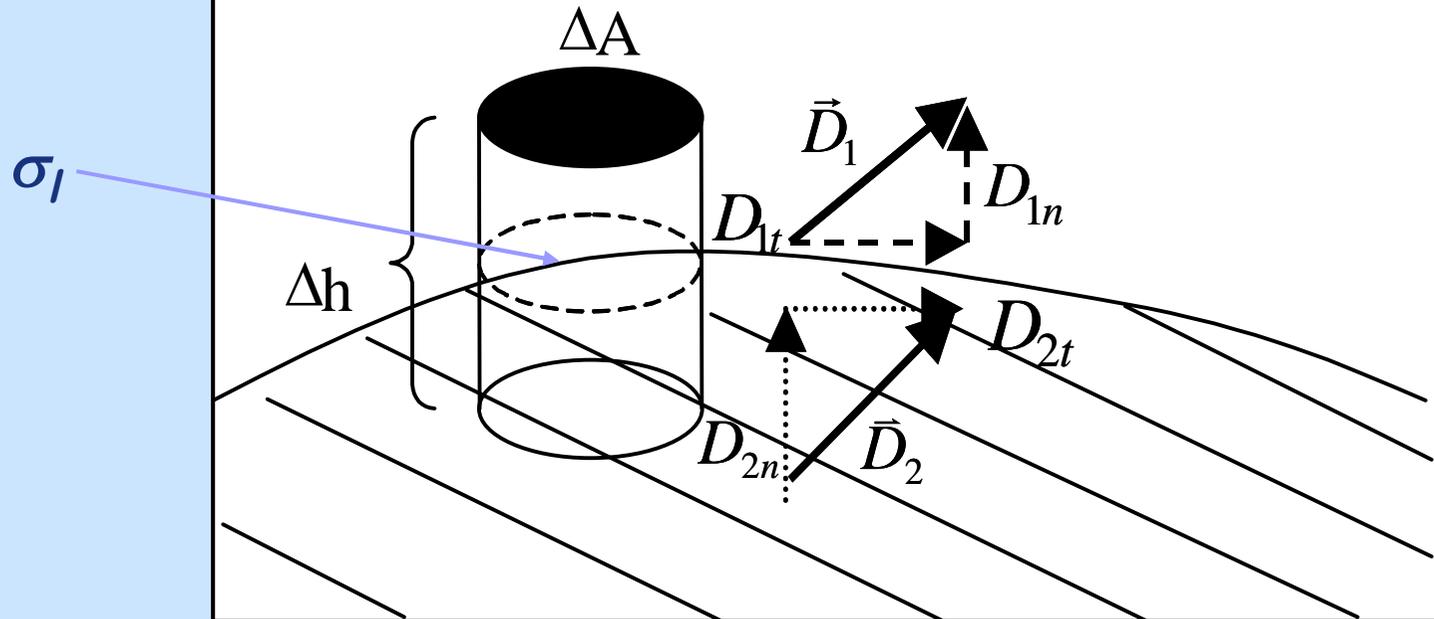


$$\oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

$$l(S) \quad h_1 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 0 \Rightarrow -E_{1t}d + E_{2t}d = 0 \quad \therefore E_{1t} = E_{2t} \quad \therefore \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$



Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \quad \gamma \quad Q_{\text{libre}} = \sigma_l \Delta A \quad \Rightarrow \quad D_{1n} \Delta A - D_{2n} \Delta A + \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_l \Delta A$$

$$\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l$$

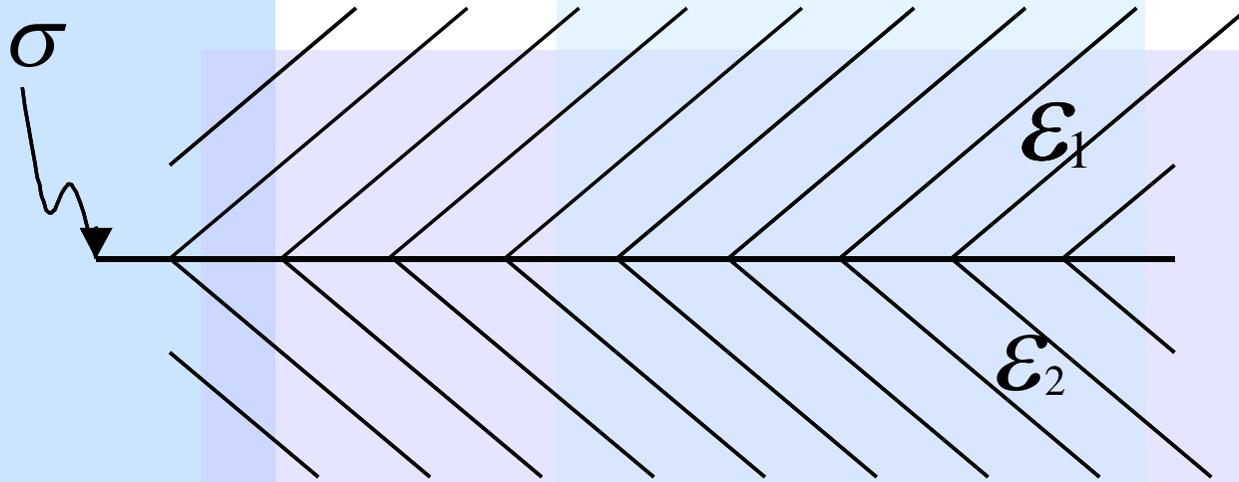
si $\sigma_l = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{1n} = D_{2n} \\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \end{array} \right.$$



Ejemplo

Ejemplo

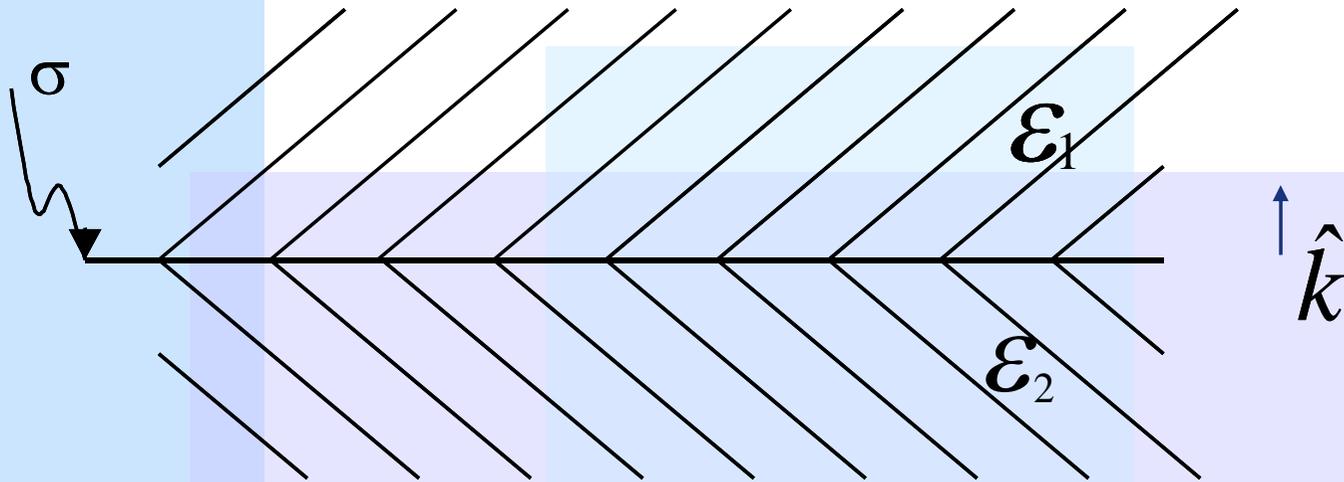


ϵ_1, ϵ_2 constantes

\vec{E}, \vec{D} en todo el espacio?



Ejemplo



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{D}$$

además

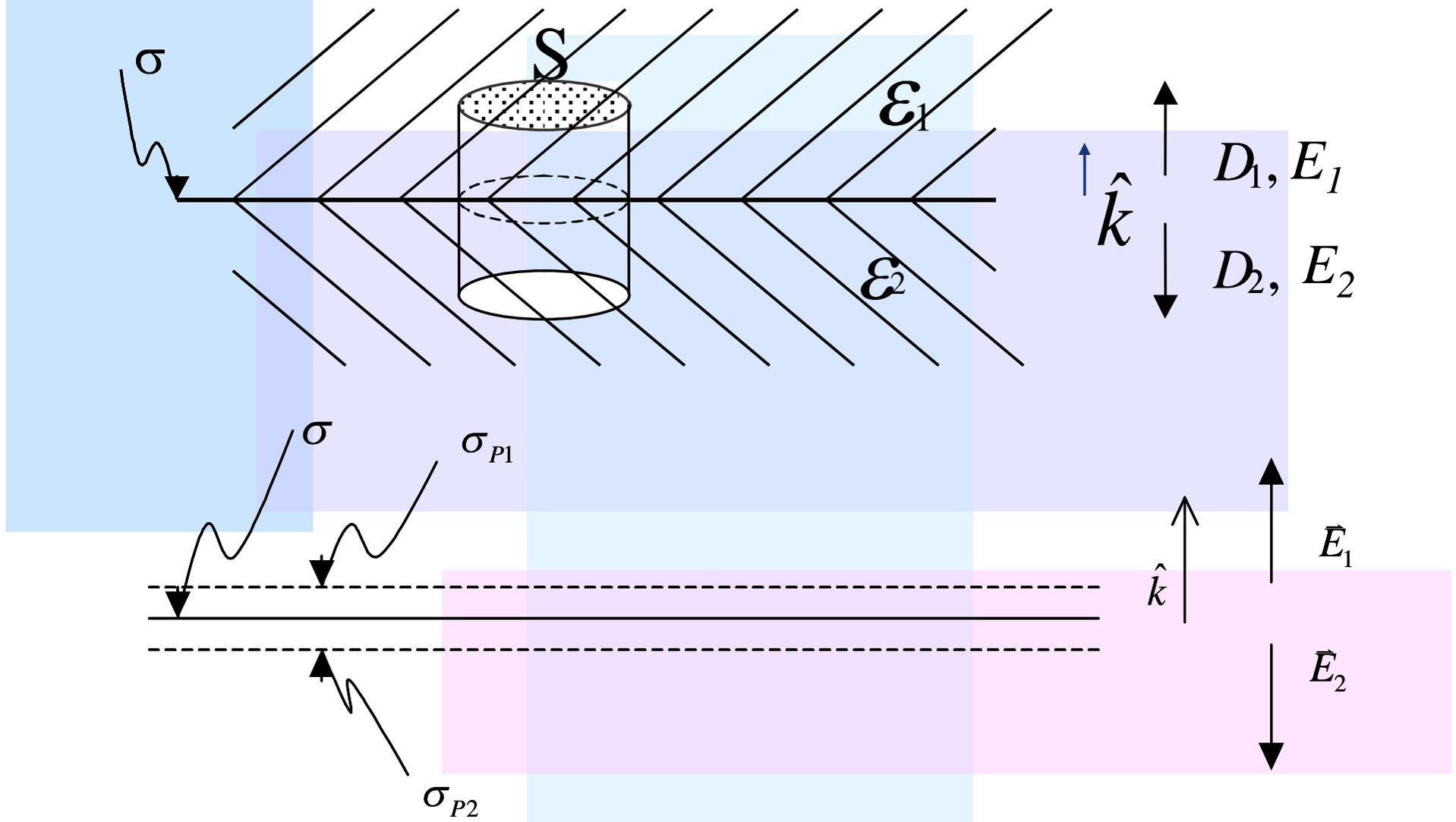
$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D} = 0$$

Fuentes de \vec{D} son sólo cargas libres σ , luego $\vec{D} = D_i \hat{k}$ con D_i constante

$$\vec{D} = D \hat{k}, \quad \vec{E} = E \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{P} = P \hat{k}$$



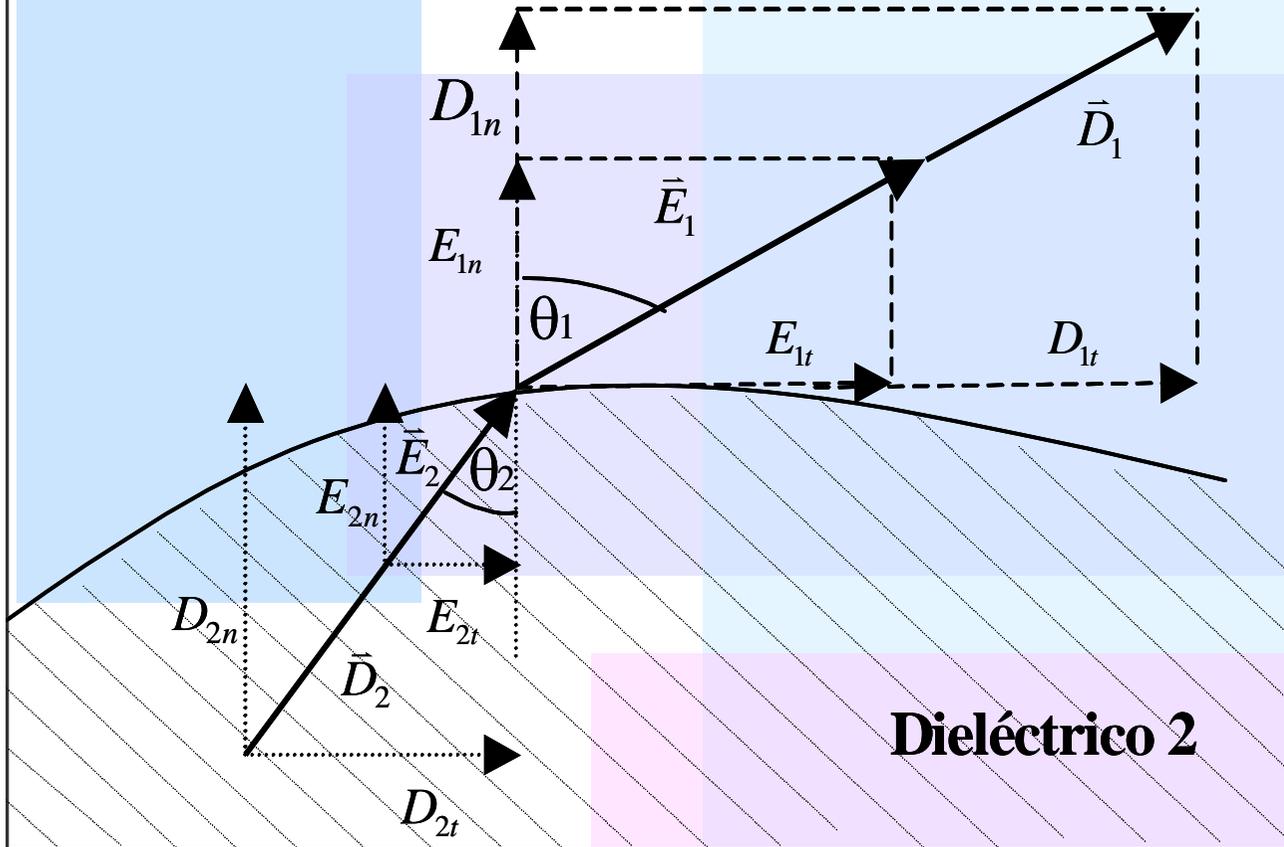
Ejemplo





Refracción del campo eléctrico

Dieléctrico 1



$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

$$\frac{\text{tg}\theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\text{tg}\theta_2}{\epsilon_2}$$

$$\frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$