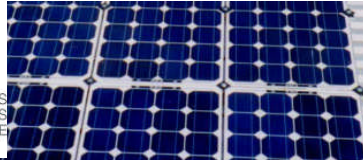




fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO

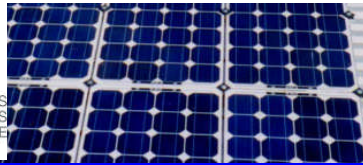
Clase 6

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



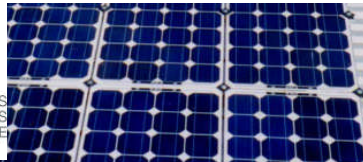
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

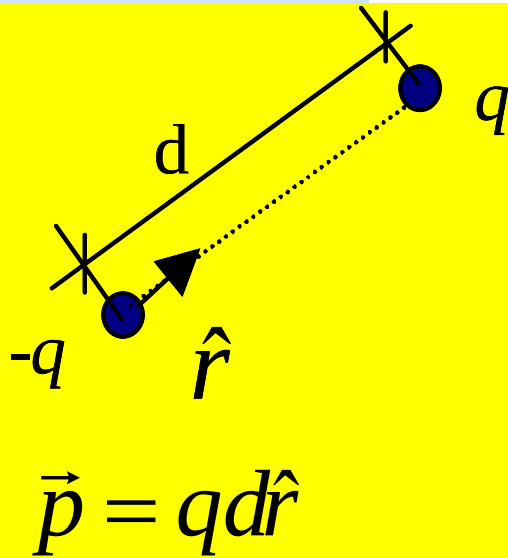


INDICE

- Clasificación de medios materiales
- Modelamiento de medios materiales
- Materiales no Polares
- Materiales Polares
- Vector Polarización
- Potencial Eléctrico en la Materia
- Cargas de polarización
- Generalización 1a Ecuación de Maxwell

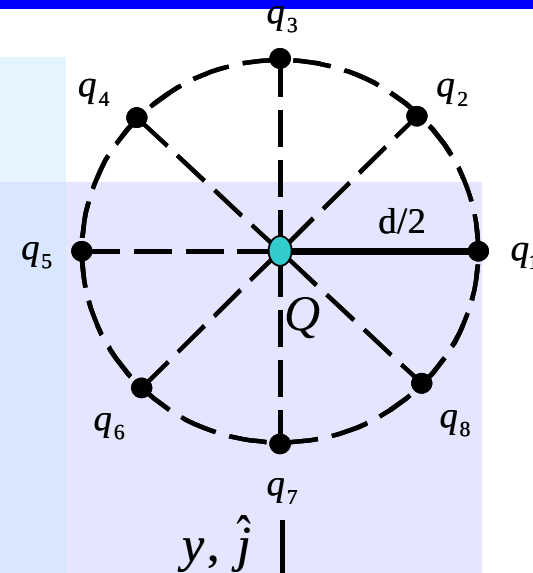


Previa: Dipolos

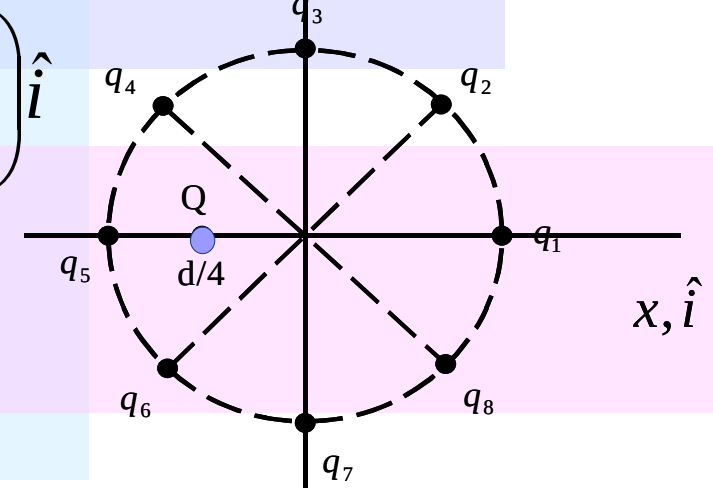


$$Q = -\sum_{i=1}^{\infty} q_i$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^8 q_i \times \vec{r}_i + Q \times 0$$
$$\Rightarrow \vec{p} = 0$$



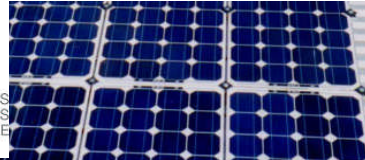
$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i - Q \left(\frac{d}{4} \right) \hat{i}$$
$$\Rightarrow \vec{p} = -Q \frac{d}{4} \hat{i}$$





fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



MEDIOS MATERIALES

Dieléctricos o aislantes: las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio (polímeros, aceite, papel)

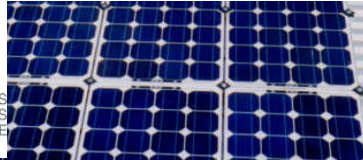
Conductores: las cargas pueden moverse libremente en la superficie o al interior del material (cobre, aluminio, tejido humano)

Semiconductores: un material que presenta un comportamiento no lineal en función del campo eléctrico aplicado (aleaciones sintéticas de silicio, germanio, etc.)



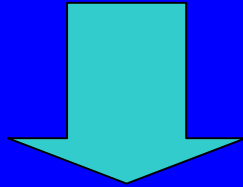
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

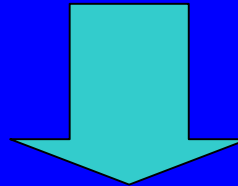


MEDIOS MATERIALES

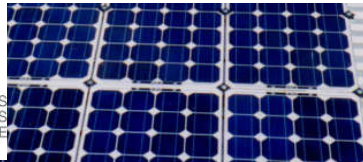
Dieléctricos o aislantes: las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio (polímeros, aceite, papel)



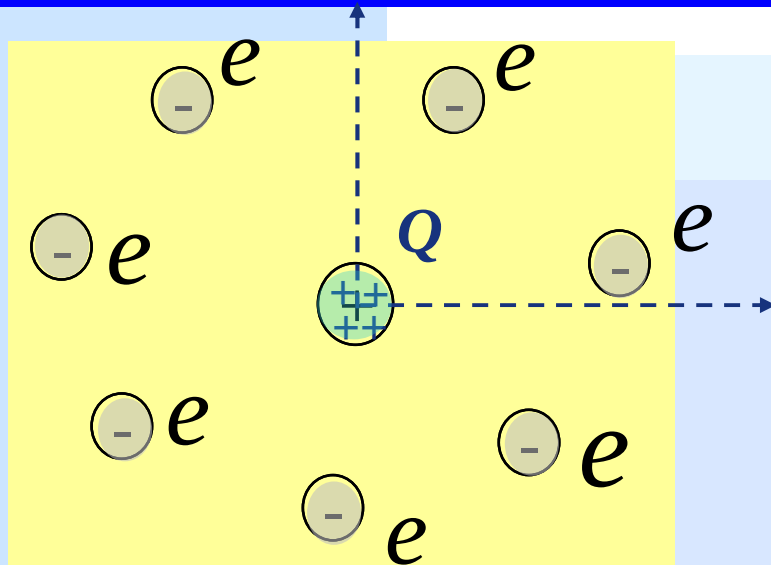
**Materiales NO
polares**



**Materiales
polares**



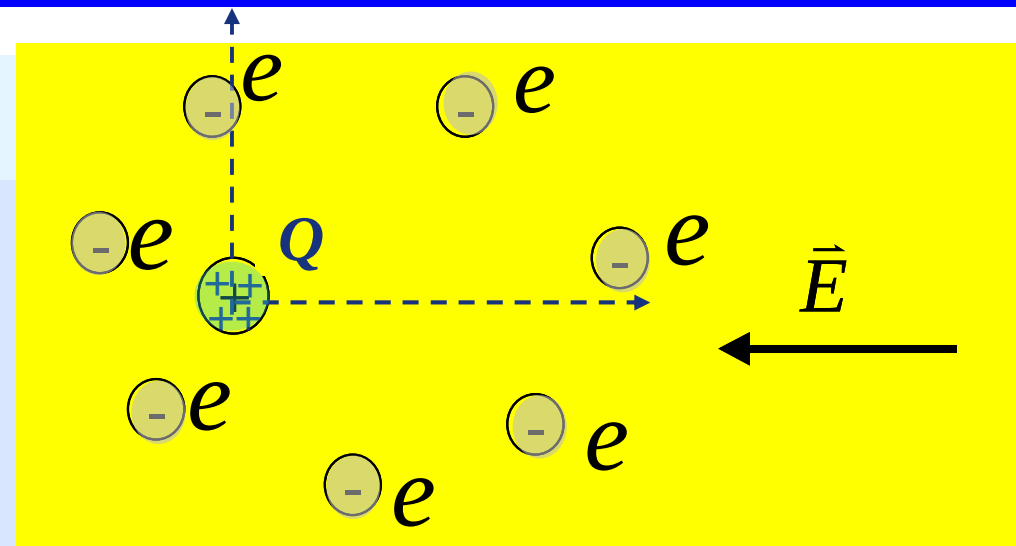
Materiales No Polares



Modelo de átomo simple

- Tiene simetría esférica
- Carga neta es nula

$$Q + \sum e = 0$$



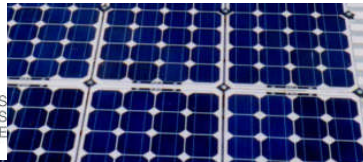
Deformación producida por campo aplicado:

- Se produce un pequeño desplazamiento en torno al punto de equilibrio
- Carga neta nula

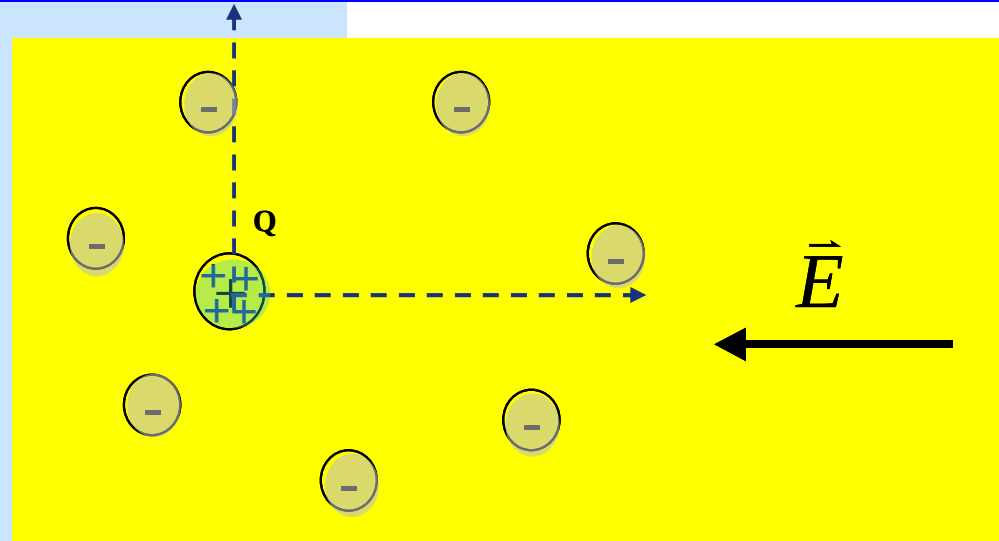


fcfm

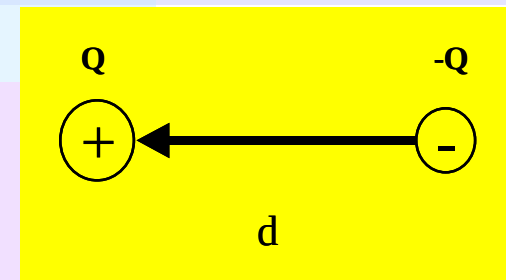
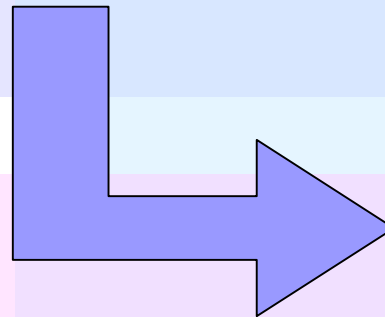
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Materiales No Polares



Deformación producida
por campo aplicado

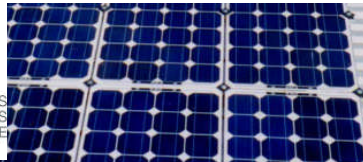


Representación mediante dipolo



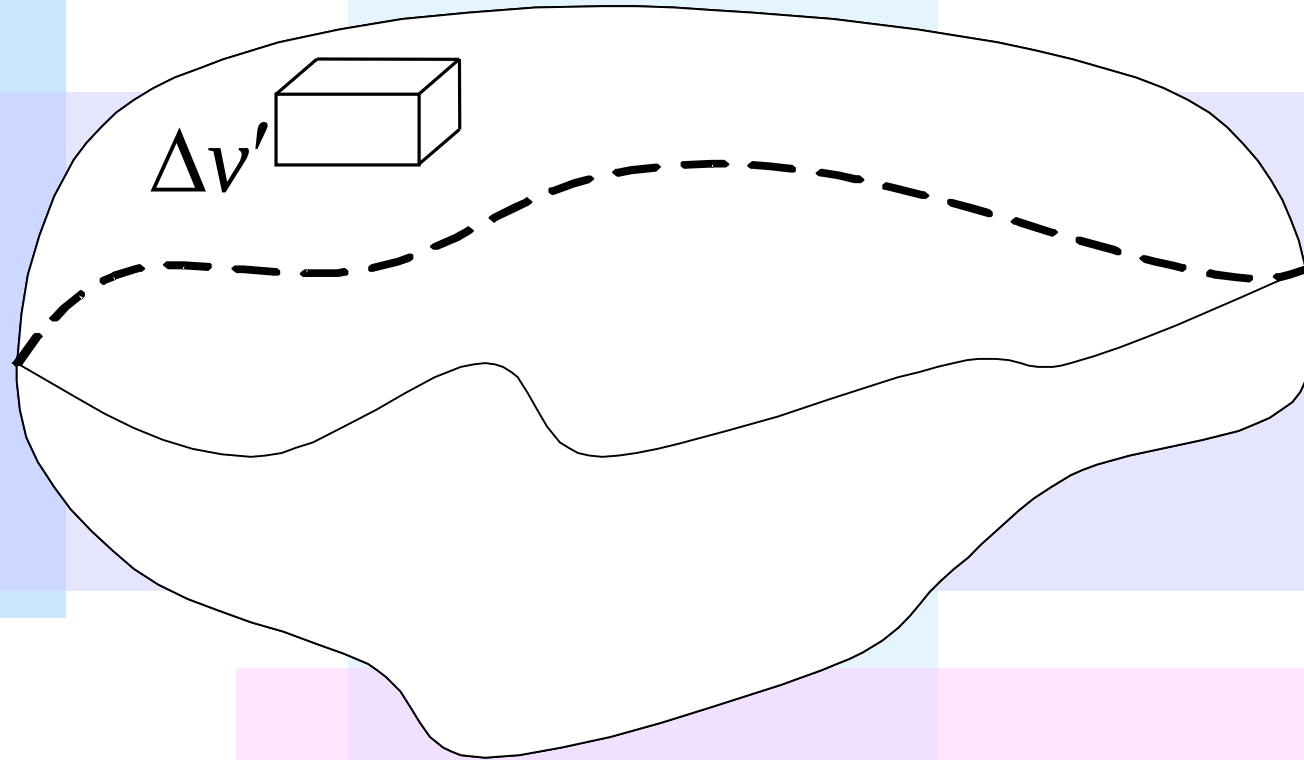
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Materiales No Polares

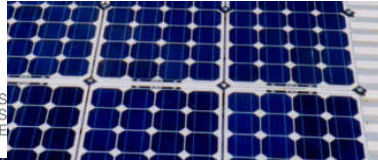
Elemento de Volumen



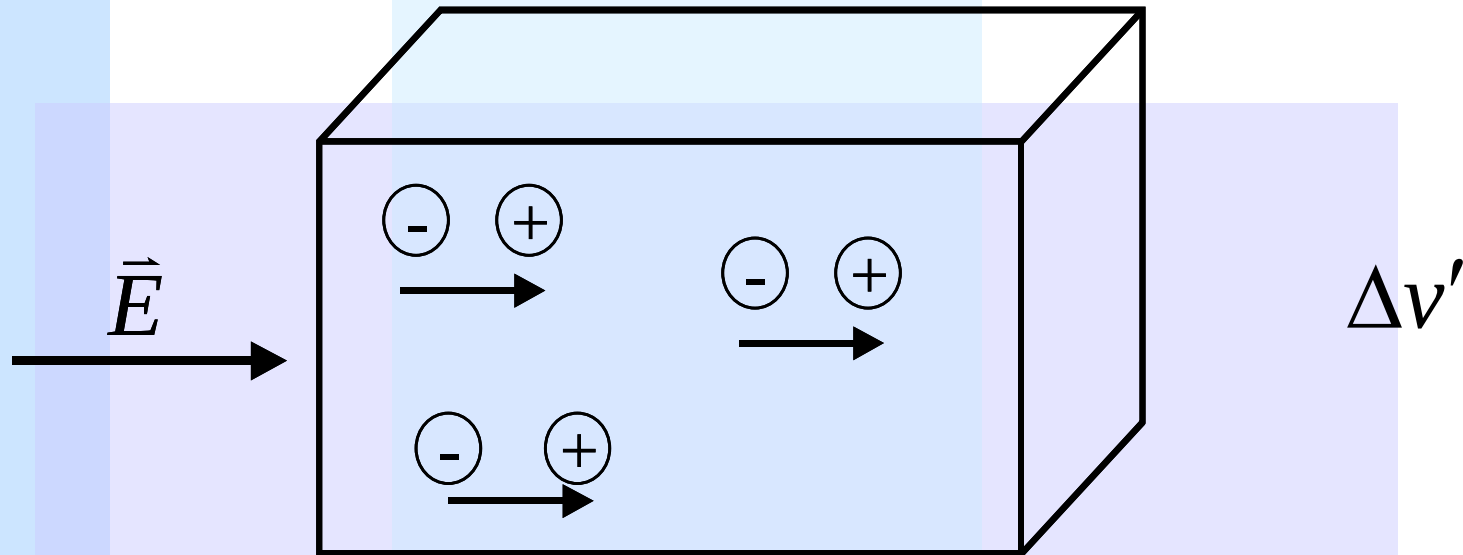


fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



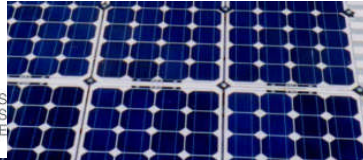
Materiales No Polares





fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Material No Polares

Elemento de Volumen

$$\vec{E} = 0$$



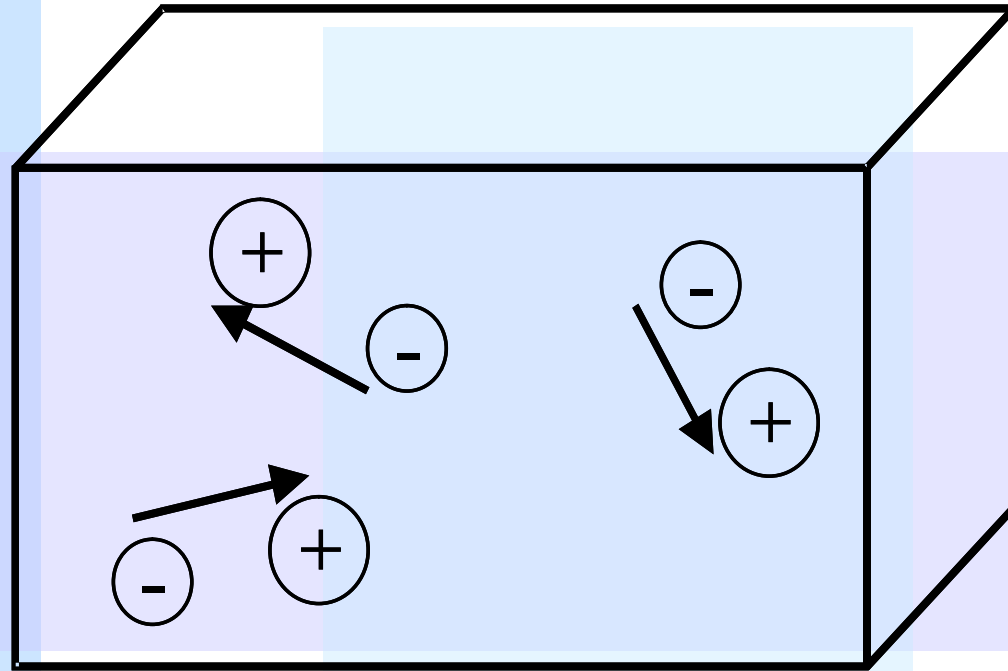
$$\Delta v'$$

El material no posee dipolos si no hay campo externo



Materiales Polares

$$\vec{E} = 0$$

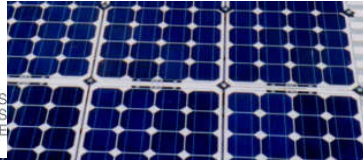


- Por su estructura molecular poseen dipolos en forma natural
- Generalmente orientados en forma aleatoria



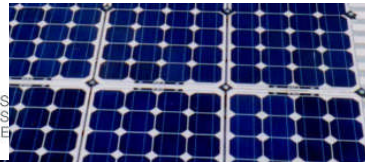
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



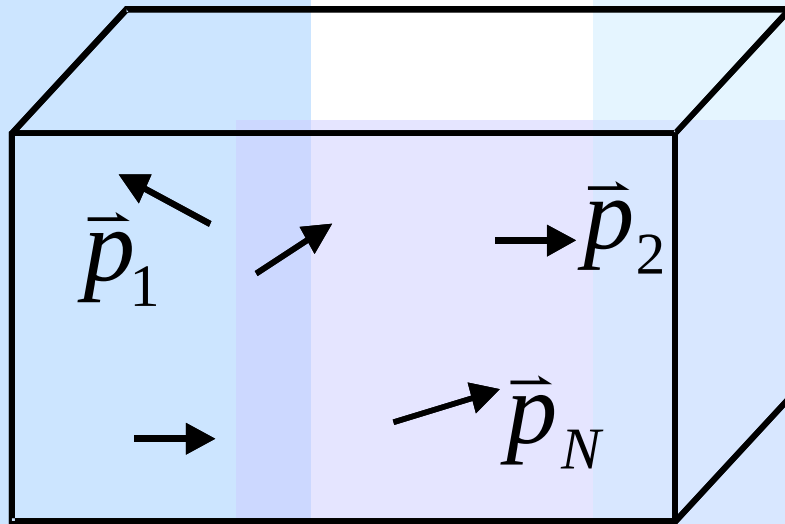
Modelo de los Materiales Dieléctricos

- Cargas (electrones y protones) de los átomos o moléculas mantienen su ligazón
- Cargas no pueden desplazarse libremente
- Sólo pueden producirse pequeños desplazamientos en torno a un punto de equilibrio fijo
- Carga neta nula



Vector Polarización

Elemento de Volumen



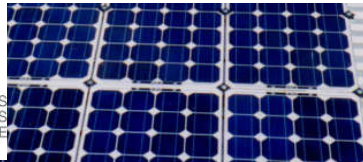
$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^N \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

Dipolos por
unidad de
volumen [C/m²]

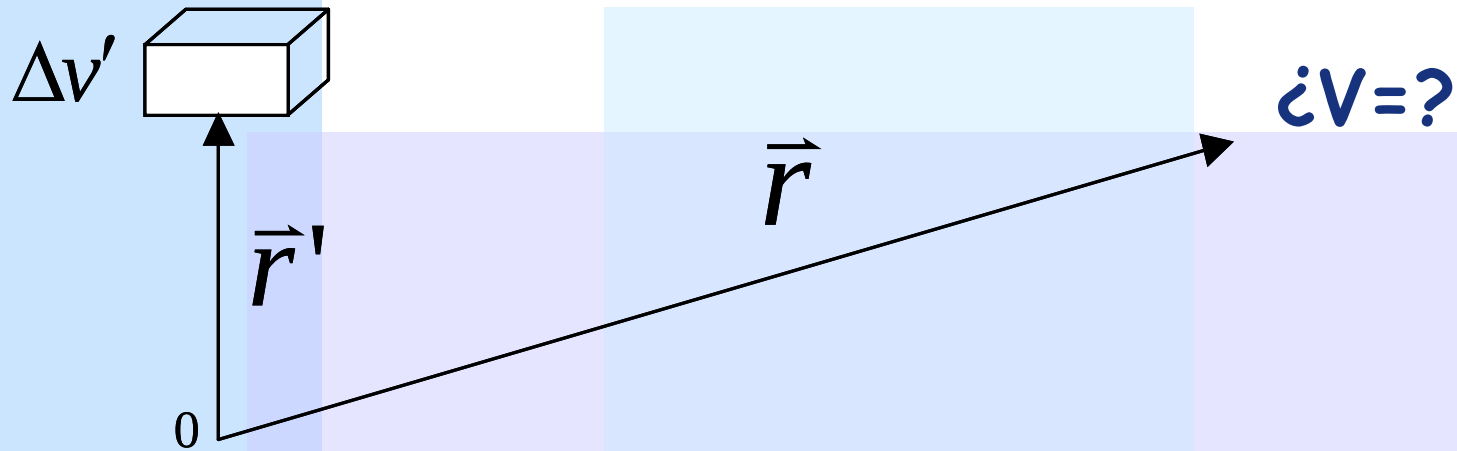


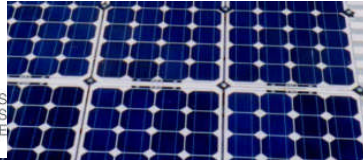
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



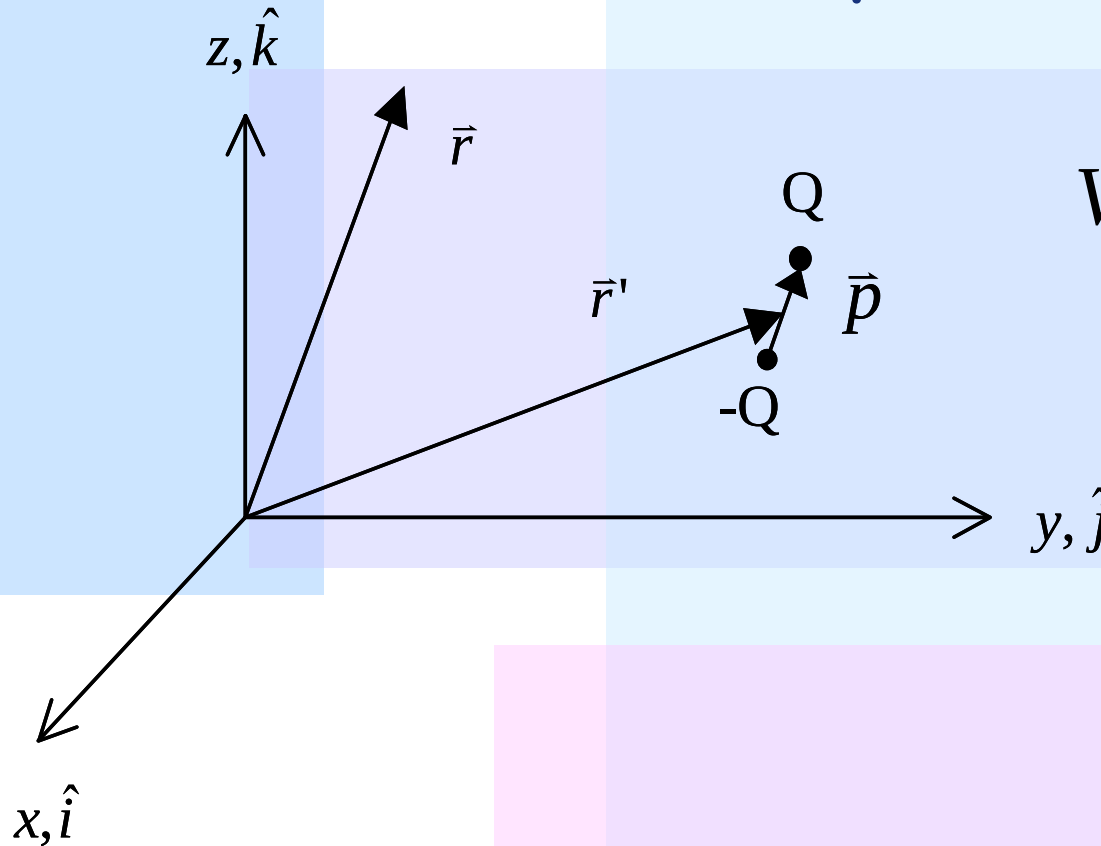
Potencial Eléctrico en la Materia



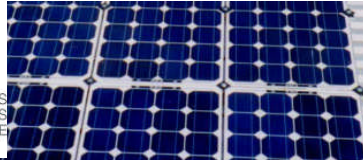


Potencial Eléctrico en la Materia

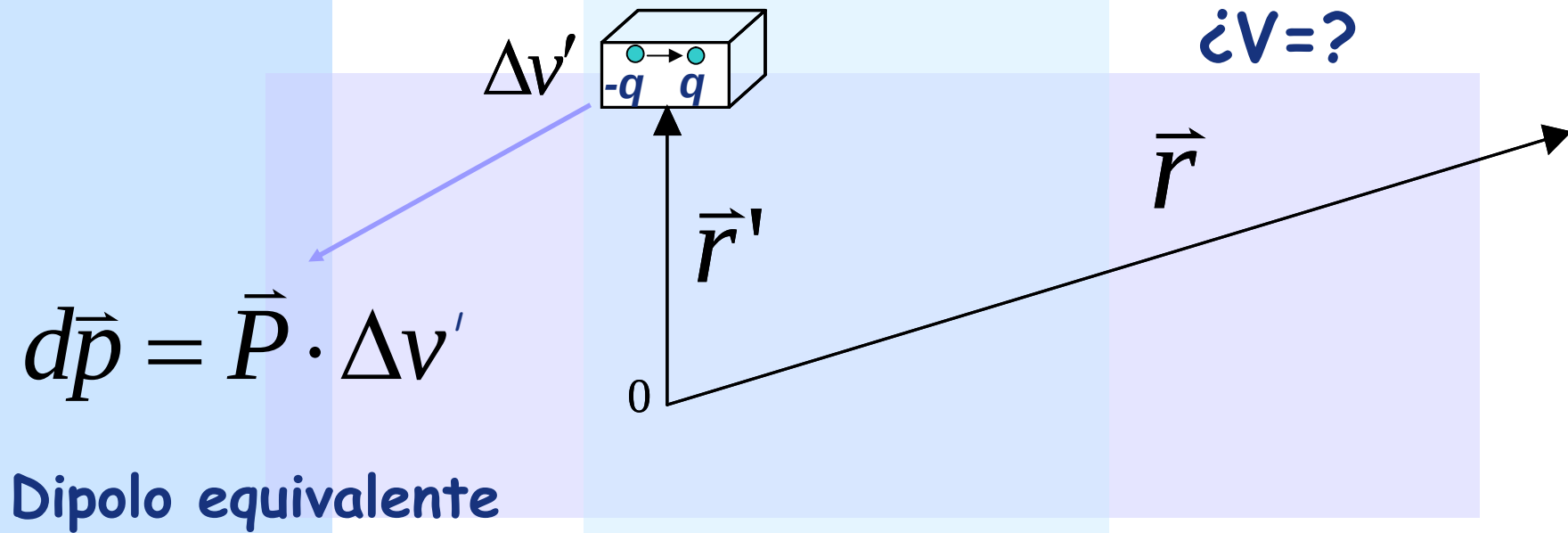
Recordemos el potencial de un dipolo

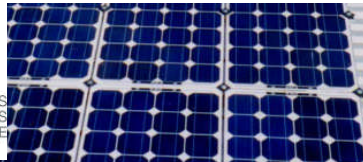


$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Potencial Eléctrico en la Materia



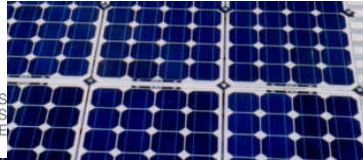


Potencial Eléctrico en la Materia

$$dV = \frac{\overbrace{\vec{P} \Delta v'}^{d\vec{p}} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (2.1)$$

$\vec{P}$: Vector polarización

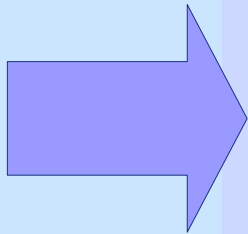
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \quad (2.2)$$



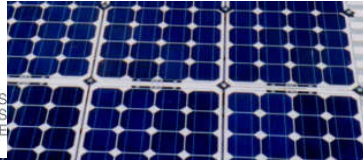
Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad

$$\nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (2.3)$$



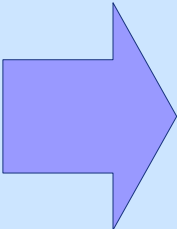
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \vec{P} \bullet \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$



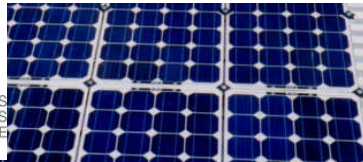
Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad

$$\nabla \bullet f\vec{A} = f\nabla \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla f$$


$$\nabla' \bullet \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \bullet \vec{P} + \vec{P} \bullet \nabla' \left[\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] \quad (2.5)$$

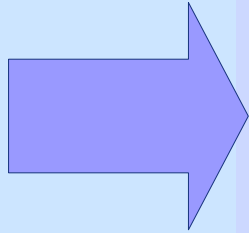
$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \nabla' \bullet \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \bullet \vec{P} \right\} dv' \quad (2.6)$$



Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad

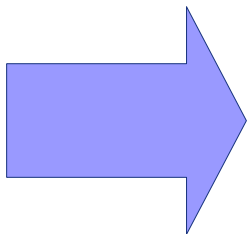
$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} dv = \oiint_{S(\Omega)} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$



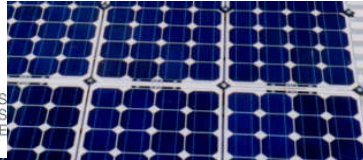
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

Escribiendo

$$\vec{P} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot \hat{n} ds$$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$



Potencial Eléctrico en la Materia

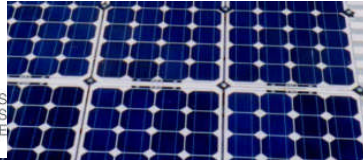
$$V(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

Tiene la forma

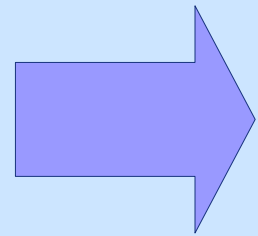
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

donde

$$\sigma(\vec{r}') = \sigma_P(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{n}$$



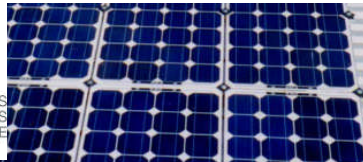
Potencial Eléctrico en la Materia



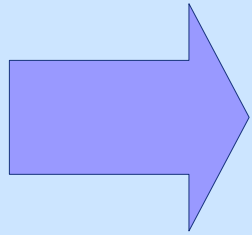
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'}_{\text{Termo de volumen}}$$

También si

$$\rho(\vec{r}') = \rho_P(\vec{r}') = -\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_P(\vec{r}') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

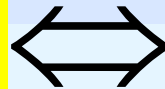
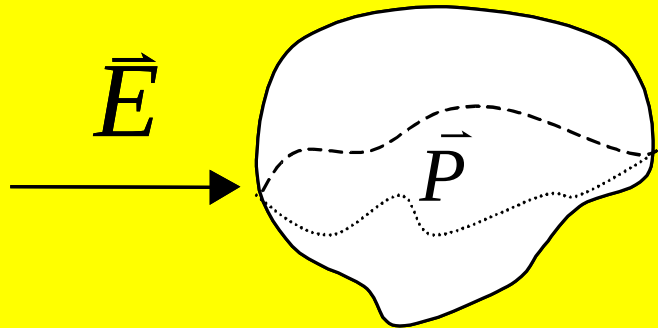


Cargas de polarización

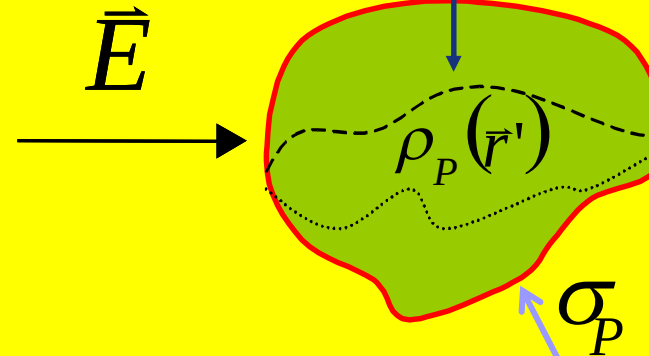


$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S(\Omega)} \frac{\sigma_P(\vec{r}') ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho_P(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

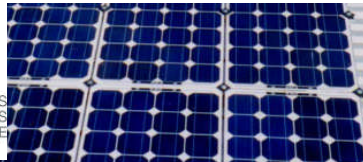
Material dieléctrico



Carga en volumen



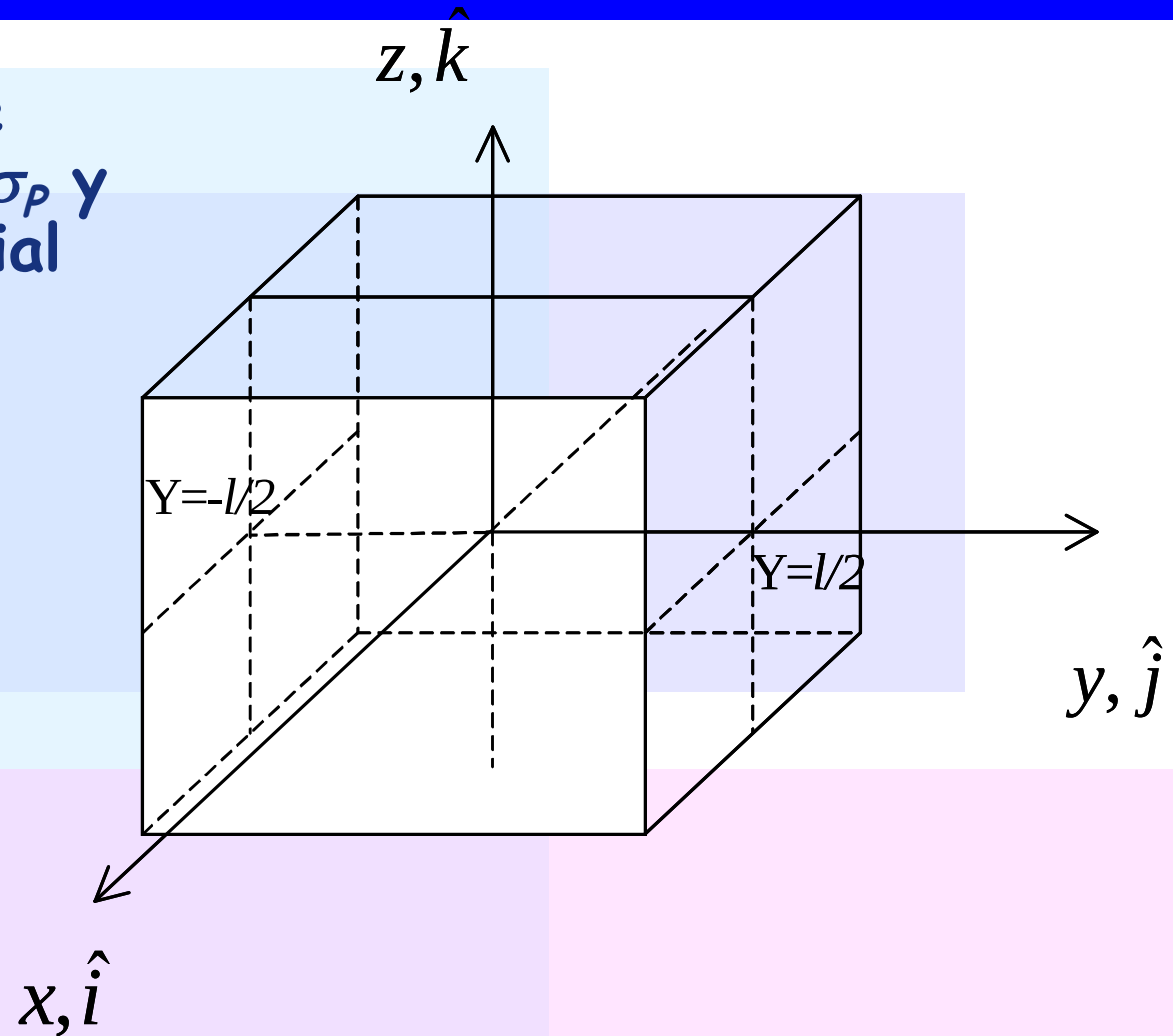
Carga superficial

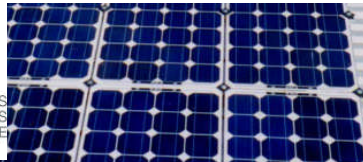


Ejemplo

Calcular densidades de carga de polarización σ_p y ρ_p si el cubo de material posee una polarización dada por el vector

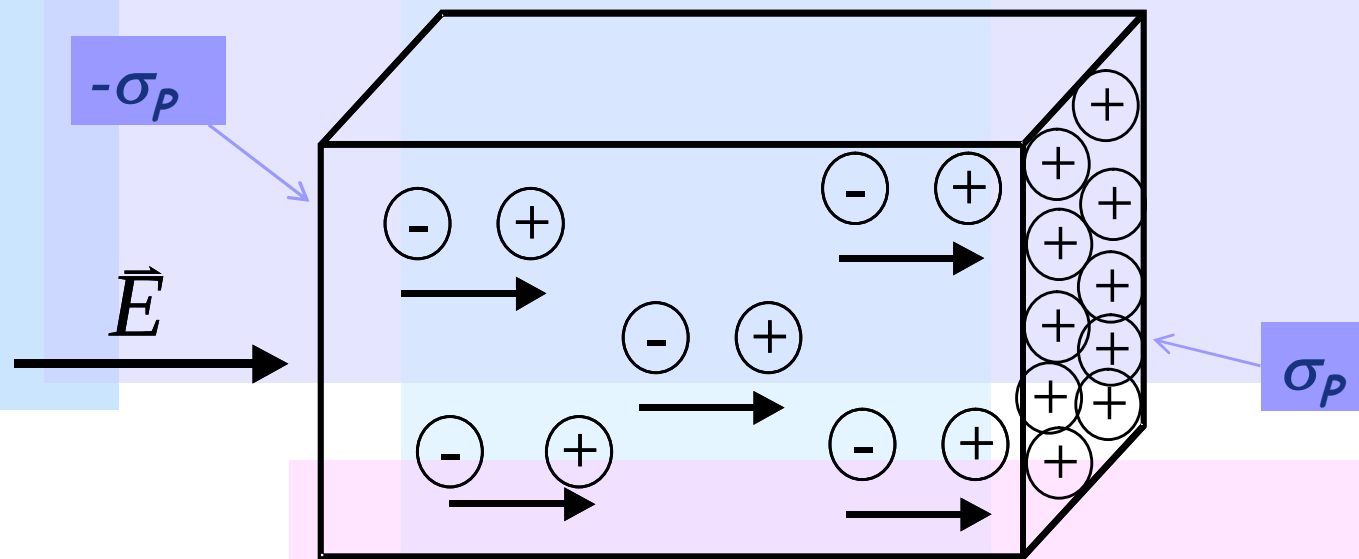
$$\vec{P} = a\vec{r}$$

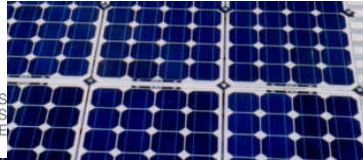




Propiedades de cargas de polarización

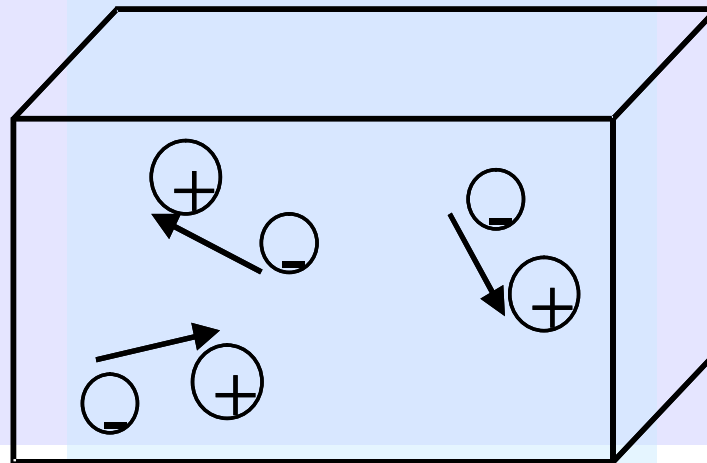
- Cargas de σ_p y ρ_p obedecen a la alineación que experimentan los dipolos del material dieléctrico y no corresponden a cargas libres al interior de él.

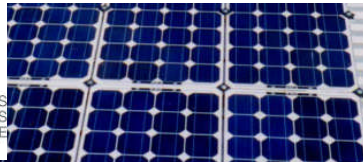




Propiedades de cargas de polarización

- Las cargas de ρ_p y σ_p no se mueven (se obtienen de la "rotación" de los dipolos).

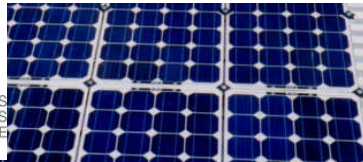




Propiedades de cargas de polarización

- Carga neta de polarización es nula

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \rho_P(\vec{r}') dV' + \oiint_{S(\Omega)} \sigma_P(\vec{r}') dS' &= \iiint_{\Omega} -\nabla' \cdot \vec{P} dV' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{S}' \\ &= -\oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{S}' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{S}' \\ &= 0\end{aligned}$$



Generalización 1a Ecuación de Maxwell

Caso general: Hay distribución de cargas libre ρ_L al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización ρ_P

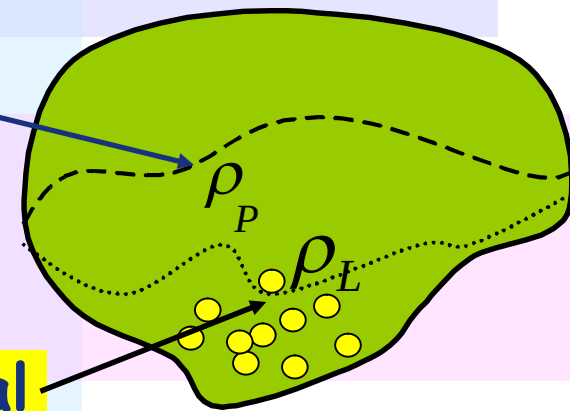
Luego la 1a ecuación de Maxwell queda

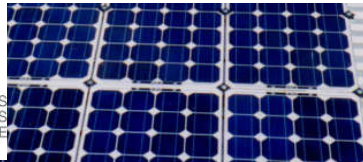
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material

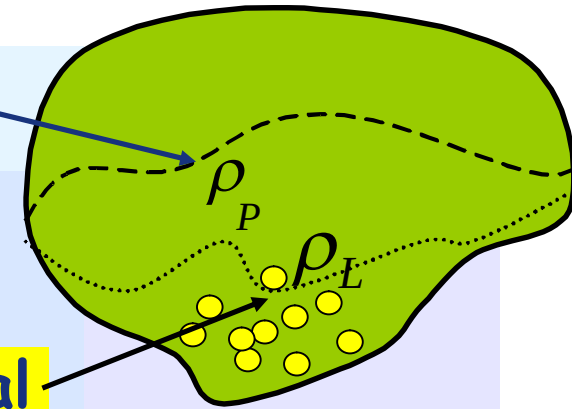




Generalización 1a Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material



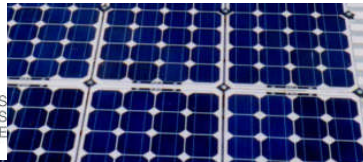
$$\rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} - \rho_P$$

pero $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ $\Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}$ (2.18)

$$\rho_L = \nabla \cdot (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) \quad (2.19)$$

Definición Vector desplazamiento

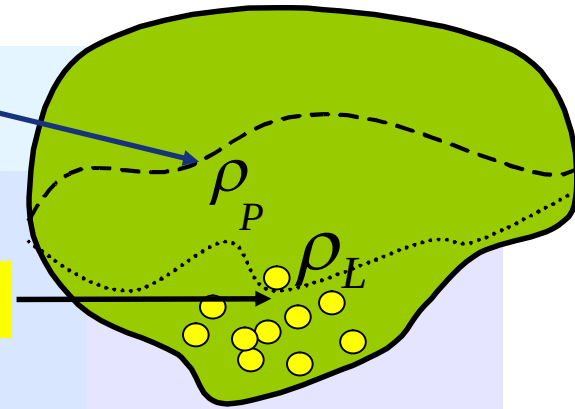
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$



Generalización 1a Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1ª Ecuación de Maxwell

integrando

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L dv}_{Q_{TOTAL}} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv}_{\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}} \Rightarrow \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{TOTAL}$$

Ley de Gauss en
medios materiales