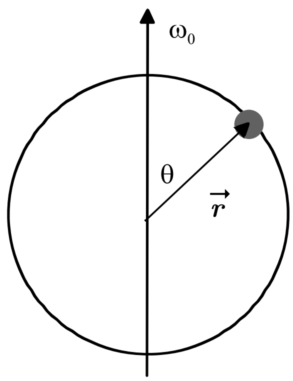
PROBLEMA 1

Usando Coriolis (también se puede con la aceleración en esféricas)



$$\vec{N} - mg\hat{k} = m(2\omega_0\hat{k} \times \vec{v} + \omega_0\hat{k} \times (\omega_0\hat{k} \times \vec{r}) + \vec{a})$$

pero

$$\begin{aligned} \vec{v} &= R\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \vec{r} &= R\hat{r} \\ \vec{a} &= -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} \end{aligned}$$

luego

$$\vec{N} = mg\hat{k} + 2\omega_0 mR\dot{\theta}(\cos\theta\hat{\phi}) + \omega_0^2 mR(-\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} - \sin^2\theta\hat{r}) - mR\dot{\theta}^2\hat{r} + mR\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

proyectamos en dirección $\hat{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta + \omega_0^2\sin\theta\cos\theta \tag{(a)}$$

En dirección perpendicular $\hat{\theta}$

$$\vec{N} = mg\cos\theta\hat{r} + 2\omega_0 mR\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi} - \omega_0^2 mR\sin^2\theta\hat{r} - mR\dot{\theta}^2\hat{r} \tag{(a)}$$

Puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} \theta &= 0, \pi, \theta_0 \\ \cos\theta_0 &= -\frac{g}{R\omega_0^2} \;\; \text{si} \; \frac{g}{R\omega_0^2} < 1 \end{aligned} \tag{(b)}$$

Análisis de estabilidad

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0+\xi\\ \ddot{\xi} &= \frac{g}{R}\sin(\theta_0+\xi)+\omega_0^2\sin(\theta_0+\xi)\cos(\theta_0+\xi)\end{aligned}$$

Expandiendo hasta primer orden

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &\simeq \left(-\frac{g}{R}\frac{g}{R\omega_0^2}-\omega_0^2+2\omega_0^2(\frac{g^2}{R^2\omega_0^4})\right)\xi \qquad \text{((c))}\\ \ddot{\xi} &= -\frac{\left(R\omega_0^2-g\right)\left(R\omega_0^2+g\right)}{R^2\omega_0^2}\xi \;\; \text{estable si } \omega_0^2>\frac{g}{R}\end{aligned}$$

estable si

$$\theta_0=0,\quad \ddot{\xi}=(\frac{g}{R}+\omega_0^2)\sin(\xi) \text{ inestable}$$

$$\theta_0=\pi,\quad \ddot{\xi}=-(\frac{g}{R}-\omega_0^2)\sin\xi \;\; \text{estable si } \omega_0^2<\frac{g}{R} \qquad \text{(c))}$$

Las frecuencia serán

$$\begin{aligned}\cos\theta_0 &= -\frac{g}{R\omega_0^2} \;\; \text{si } \omega_0^2>\frac{g}{R},\;\; \omega=\sqrt{\frac{\left(R\omega_0^2-g\right)\left(R\omega_0^2+g\right)}{R^2\omega_0^2}}\\ \theta_0 &= \pi,\;\; \text{si } \omega_0^2<\frac{g}{R},\;\; \omega=\sqrt{\frac{g}{R}-\omega_0^2}\end{aligned}$$

PROBLEMA 2, Usando coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}ma_r &= m(-R\dot{\theta}^2-R\dot{\phi}^2\sin^2\theta)=-N-mg\cos\theta \qquad \text{((a))}\\ ma_\theta &= m(R\ddot{\theta}-R\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)=mg\sin\theta, \qquad \text{((a))}\\ ma_\phi &= m(2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta+R\ddot{\phi}\sin\theta)=0. \qquad \text{((a))}\end{aligned}$$

la tercera da

$$\frac{d}{dt}(\sin^2\theta\dot{\phi})=0\Rightarrow\sin^2\theta\dot{\phi}=cte$$

pero

$$\begin{aligned}\vec{v} &= R\dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta+R\dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad (1)\\ v_0 &= R\dot{\phi}_0\sin 30^o=\frac{1}{2}R\dot{\phi}_0 \qquad (2)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\sin^2\theta\dot{\phi} &= \frac{1}{4}\frac{2v_0}{R}=\frac{v_0}{2R}\\ \dot{\phi} &= \frac{v_0}{2R\sin^2\theta} \qquad \text{((b))}\end{aligned}$$

En la segunda ecuación eliminamos $\dot{\phi}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{g}{R}\sin\theta + \frac{v_0^2}{4R^2\sin^3\theta}\cos\theta \\
\dot{\theta}^2 &= \int_{\pi/6}^{\theta}(\frac{2g}{R}\sin\theta + \frac{v_0^2}{2R^2\sin^3\theta}\cos\theta)d\theta \\
\dot{\theta}^2 &= -\frac{2g}{R}(\cos\theta - \frac{1}{2}\sqrt{3}) - \frac{v_0^2}{4R^2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 4\right) \qquad ((c))
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 3

considere un satélite masa m en órbita elíptica respecto a un planeta de masa M y radio R. Si las distancias mínima y máxima entre los centros de los dos cuerpos son 3R y 4R respectivamente, se pide determinar

a. La excentricidad de la órbita.

b. La magnitud del momentum angular .

c. La energía del sistema.

d. El factor en que hay que cambiar la rapidez en el punto más cercano para que la órbita se transforme en circular.

tenemos

$$r = \frac{l_0^2}{\mu k}\frac{1}{1 - e\cos\theta}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
3R &= \frac{l_0^2}{\mu k}\frac{1}{1+e} \\
4R &= \frac{l_0^2}{\mu k}\frac{1}{1-e}
\end{aligned}
$$

dividiendo

$$\frac{3}{4} = \frac{1-e}{1+e} \Rightarrow e = \frac{1}{7} \qquad (a))$$

entonces

$$l_0 = \sqrt{3R\mu k(1 + \frac{1}{7})} = \sqrt{\frac{24}{7}GR\frac{m^2M^2}{m+M}} \qquad (b))$$

la energía la despejamos de

$$
\begin{aligned}
e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{\mu k^2} \\
\frac{1}{49} &= 1 + \frac{2E}{\mu k^2}3R\mu k(1 + \frac{1}{7}) \\
E &= -\frac{1}{7}\frac{k}{R} = -\frac{1}{7}\frac{GMm}{R} \qquad (c))
\end{aligned}
$$

En el punto más cercano

$$3R = \frac{l_0^2}{\mu k}\frac{1}{1+\frac{1}{7}}$$

en la futura circunferencia $e = 0$

$$3R = \frac{l_0'^2}{\mu k}\frac{1}{1}$$

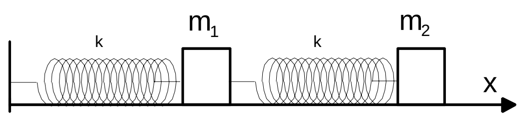
dividiendo

$$\frac{(l_0')^2}{l_0^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{7}} = \frac{7}{8}$$

de donde el factor es

$$f = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{7}{8}} \qquad \text{(d))}$$

PROBLEMA 4



Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 &= 0 \\ -\frac{k}{m}x_1 + \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

al probar solución exponencial

$$x_1 = Ae^{-i\omega t},\ x_2 = Be^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \frac{2k}{m})A - \frac{k}{m}B &= 0 \\ -\frac{k}{m}A_1 + (-\omega^2 + \frac{k}{m})B &= 0 \end{aligned}$$

determinante nulo requiere

$$(-\omega^2 + \frac{2k}{m})(-\omega^2 + \frac{k}{m}) - \frac{k}{m}\frac{k}{m} = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= x = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\frac{k}{m} \end{aligned}$$

la razón entre los coeficientes es

$$\frac{A}{B} = \frac{k}{m_1} \frac{1}{(-\omega^2 + \frac{2k}{m})}$$

luego (mucho cálculo)

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= -\frac{2}{\sqrt{5}-1} \\ \frac{A_2}{B_2} &= \frac{2}{\sqrt{5}+1} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_2 t} \\ x_2 &= B_1 e^{-i\omega_1 t} + B_2 e^{-i\omega_2 t} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2}{\sqrt{5}-1}\xi_1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1}\xi_2 \\ x_2 &= \xi_1 + \xi_2 \end{aligned}$$

de donde se despejan las coordenadas normales

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{10}\left(2x_1 + x_2 + \sqrt{5}x_2\right)\sqrt{5} \\ \xi_1 &= \frac{1}{10}\left(\sqrt{5}x_2 - 2x_1 - x_2\right)\sqrt{5} \end{aligned}$$