

Pauta control 2

FI2A1 - Mecánica

Prof. Luis Rodríguez

Semestre Primavera 2008

Auxs: Francisco Sepúlveda y Kim Hauser

Problema 1.

Solución usando segunda ley

$$m\ddot{x} = T - \mu_c N$$

$$N = mg$$

$$m\ddot{x} = mg - T$$

$$\mu_c = ax$$

Eliminando T sumándolas

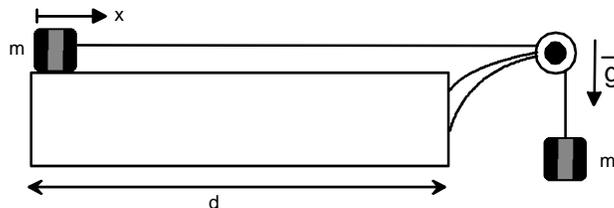
$$2\ddot{x} = g - axg$$

Con la condición inicial $\dot{x} = 0$ cuando $x = 0$ se integra y se obtiene

$$\dot{x}^2 = gx - \frac{1}{2}agx^2$$

queremos que se detenga en $x = d$

$$gd - \frac{1}{2}agd^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{d}$$



Por energía trabajo es casi igual

$$W_{roce} = - \int_0^d axmg dx = -\frac{1}{2}amgd^2$$

$$E_i = 0$$

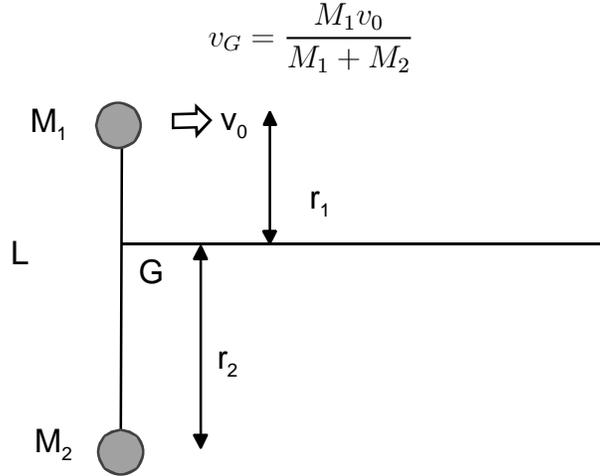
$$E_f = -mgd \text{ (la bajada de la derecha)}$$

luego

$$-mgd = -\frac{1}{2}amgd^2 \Rightarrow a = \frac{2}{d}$$

Problema 2.

Debido a la ausencia de fuerzas exteriores en el plano horizontal el centro de masa se mueve en línea recta con rapidez constante



Si colocamos el origen del sistema inercial en G respecto a ese sistema las velocidades iniciales de ambas partículas son

$$v'_1 = v_0 - \frac{M_1 v_0}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 v_0}{M_1 + M_2}$$

$$v'_2 = -\frac{M_1 v_0}{M_1 + M_2}$$

y sus órbitas son circunferencias con centro en G de radios

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} L,$$

$$r_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} L$$

de modo que el periodo se puede calcular de cualquiera de las dos modos siguientes

$$T = \frac{2\pi r_1}{v'_1} = \frac{2\pi \frac{M_2}{M_1 + M_2} L}{\frac{M_2 v_0}{M_1 + M_2}} = 2\pi \frac{L}{v_0}$$

$$T = \frac{2\pi r_2}{-v'_2} = \frac{2\pi \frac{M_1}{M_1 + M_2} L}{\frac{M_1 v_0}{M_1 + M_2}} = 2\pi \frac{L}{v_0}$$

La tensión. Llamémosla F para no confundirla con el periodo. Se puede calcular de cualquiera de las dos modos siguientes

$$F = M_1 \frac{(v'_1)^2}{r_1} = \frac{M_1 M_2 v_0^2}{(M_1 + M_2) L}$$

$$F = M_2 \frac{(v'_2)^2}{r_2} = \frac{M_1 M_2 v_0^2}{(M_1 + M_2) L}$$

Problema 3.

En órbita circular de radio a

$$a = \frac{l_0^2}{\mu k}$$

$$a = \frac{\mu^2 a^2 v^2}{\mu k} \Rightarrow v = \frac{1}{\mu a} \sqrt{\mu a k}$$

Si se reduce a la mitad

$$l_0 = \mu a \frac{1}{2} \frac{1}{\mu a} \sqrt{\mu a k} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu a k}$$
$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\mu a} \sqrt{\mu a k} \right)^2 - \frac{k}{a} = -\frac{7k}{8a}$$

luego

$$e^2 = 1 + \frac{2\left(-\frac{7k}{8a}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu a k}\right)^2}{\mu k^2} = \frac{9}{16}$$
$$e = \frac{3}{4}$$

nueva órbita

$$r = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu a k}\right)^2}{\mu k} \frac{1}{1 - \frac{3}{4} \cos(\theta - \alpha)}$$
$$r = \frac{1}{4} a \frac{1}{1 - \frac{3}{4} \cos(\theta - \alpha)}$$

en $\theta = 0$, $r = a$ luego

$$a = \frac{1}{4} a \frac{1}{1 - \frac{3}{4} \cos \alpha} \Rightarrow \alpha = 0$$

y finalmente

$$r = \frac{1}{4} a \frac{1}{1 - \frac{3}{4} \cos \theta}$$
$$r_{\text{mín}} = \frac{1}{4} a \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{7} a$$

Para que pase tangente al planeta

$$a = 7R$$