Pauta Auxiliar 7/Agosto/2008 FI2A1

P3.

a) Usando coordenadas cilíndricas, se tiene que:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

dado que la velocidad se pude escribir como $\vec{v} = v\hat{t}$, haciendo una descomposicion del vector velocidad en sus componentes se tiene que

$$R\dot{\theta} = v\cos(\alpha), \dot{z} = v\sin(\alpha)$$

despejando $\dot{z}$ y $\dot{\theta}$ y reemplazando en la velocidad se obtiene que

$$\vec{v} = v\cos(\alpha)\hat{\theta} + v\sin(\alpha)\hat{k}$$

derivando esta exprecion con respecto al tiempo se obtiene que la aceleración es

$$\vec{a} = \dot{v}(\cos(\alpha)\hat{\theta} + \sin(\alpha)\hat{k}) + v(-\cos(\alpha)\dot{\theta}\hat{\rho}) = \dot{v}(\cos(\alpha)\hat{\theta} + \sin(\alpha)\hat{k}) - \frac{v^2}{R}\cos^2(\alpha)\hat{\rho}$$

b) Dado que $\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$ y $\vec{v} = v\hat{t}$ se reconoce que el vector tangente es $\hat{t} = \cos(\alpha)\hat{\theta} + \sin(\alpha)\hat{k}$, por lo que las componentes tangenciales y normales de la aceleración son:

$$a_t = \dot{v}, a_n = \frac{v^2}{R}\cos^2(\alpha)$$

c) radio de curvatura: $\rho_c = \dfrac{v^3}{||\vec{a} \wedge \vec{v}||}$

$$\vec{a} \wedge \vec{v} = (a_t\hat{t} + a_n\hat{n}) \wedge v\hat{t} = a_n v(\hat{n} \wedge \hat{t}) = a_n v(-\cos(\alpha)\hat{k} + \sin(\alpha)\hat{\theta})$$

luego, el modulo de $\vec{a} \wedge \vec{v}$ es $||\vec{a} \wedge \vec{v}|| = a_n v = \dfrac{v^3}{R}\cos^2(\alpha)$, por lo que el radio de curvatura es

$$\rho_c = \frac{R}{\cos^2(\alpha)}$$