01 de Diciembre de 2008

FI2A-1 Mecánica.
Semestre Primavera
Tiempo: 2 hrs. 30 min.

EXAMEN

Profesor: Patricio Martens C.

1. Sobre una partícula de masa m que puede deslizar sin roce por una guía circular de plano horizontal y radio a, actúa una fuerza repulsiva $\vec{F} = \mu r \hat{r}$, donde μ es una constante y r la distancia de la partícula a un punto dado O de la guía.

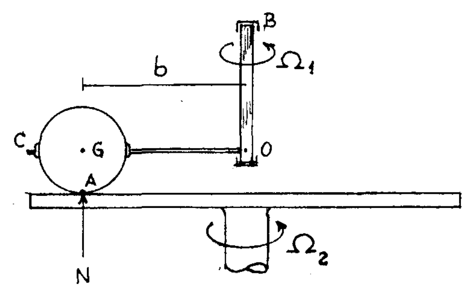
   a) Encontrar el período para pequeñas oscilaciones de la partícula en torno a la posición de equilibrio estable sobre la guía.

   b) Si la partícula se pone en movimiento partiendo desde el reposo en el punto O de la guía, encontrar la reacción normal N de ésta sobre la partícula en función de r y las constantes μ y a.

2. Una partícula de masa m se mueve en un campo central de fuerzas definido por: $\vec{F} = -m\left(\frac{\kappa}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3}\right)\hat{r}$, donde κ y λ son dos constantes positivas.

   Demostrar que si se cumple la condición $\lambda < l_0^2$, siendo l_0 el momentum angular por unidad de masa, entonces la trayectoria de la partícula es una cónica.

3. Sobre una plataforma circular horizontal que rota con rapidez angular Ω_2 se apoya una esfera de masa m y radio r que rueda sin resbalar sobre ella. Simultáneamente, el centro G de la esfera describe una trayectoria circular con rapidez angular Ω_1 en torno al eje OB, accionada por el brazo OC.



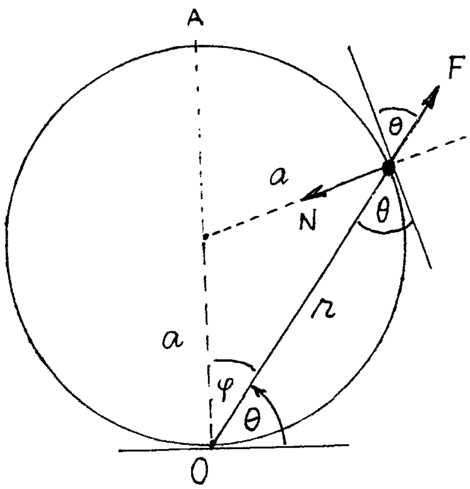
   Determinar:

   a) Velocidad angular $\vec{\omega}_{esf}$ de la esfera

   b) Momentum angular $\vec{L}_0$ de la misma

   c) Reacción normal en el punto de contacto A.

1.-



– El sistema es conservativo.

N siempre perpendicular a la trayectoria.

$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \longrightarrow dV = -\mu r\, dr$

Luego, $\boxed{V = -\frac{1}{2}\mu r^2}$ (1) $\quad C = 0$.

Como $r = 2a\cos(90-\theta)$

$r = 2a\,\text{sen}\,\theta$ (2)

$\boxed{V = -2\mu a^2 \text{sen}^2\theta}$ (3)

También $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

De (2) : $\dot{r} = 2a\cos\theta\,\dot{\theta}$

Luego, $v^2 = 4a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 4a^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2 \longrightarrow v^2 = 4a^2\dot{\theta}^2$ (4)

Así, $E = \frac{1}{2}mv^2 - 2\mu a^2\text{sen}^2\theta \longrightarrow E = \frac{1}{2}m\cdot 4a^2\dot{\theta}^2 - 2\mu a^2\text{sen}^2\theta$

De $\frac{dE}{dt} = 0 \longrightarrow 2m\cancel{a^2}\cdot\cancel{2}\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} - \cancel{2}\mu\cancel{a^2}\cdot\cancel{2}\,\text{sen}\theta\cos\theta\,\cancel{\dot{\theta}} = 0$

$\therefore\ \ddot{\theta} - \frac{\mu}{m}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0$ (5)

Por inspección se deduce que el punto correspondiente al equilibrio estable corresponde a $\theta = \pi/2$ y el de equilibrio inestable a $\theta = 0$.

Si se desea más formalidad, de (3) :

$V' = -2\mu a^2\,\text{sen}\,2\theta \quad ; \quad V'' = -4\mu a^2\cos 2\theta$

De $V'(\theta) = 0 \Rightarrow 2\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$ (inestable)

$2\theta = \pi \rightarrow \theta = \pi/2$ (estable)

Luego, $V''(\theta=0) < 0$ y $V''(\theta=\pi/2) > 0$

Poniendo $\theta = 90 - \varphi \longrightarrow \ddot{\theta} = -\ddot{\varphi}$

y $\text{sen}(90-\varphi) = \text{sen}\,\varphi$; $\cos(90-\varphi) = \cos\varphi$

Así, la ecuación (5) se reformula como :

$$\ddot{\varphi} + \frac{\mu}{m}\,\text{sen}\,\varphi \cos\varphi \qquad (6)$$

Para pequeñas oscilaciones $\text{sen}\,\varphi \simeq \varphi$ y $\cos\varphi \simeq 1$

de modo que el movimiento de la partícula en torno al punto A, correspondiente al equilibrio estable es

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{\mu}{m}\varphi = 0} \qquad (7)$$

de modo que $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mu}}}$ (8)

b) De $E = \frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}\mu r^2 = \text{cte.} = E(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{\mu}{m} r^2 \qquad (9)$$

De la figura, $N - F\,\text{sen}\,\theta = m\,\dfrac{v^2}{a}$ (según $\hat{n}$)

De (2) : $\text{sen}\,\theta = \dfrac{r}{2a}$

$$\therefore \quad N = \mu r \frac{r}{2a} + \frac{m}{a}\frac{\mu}{m} r^2$$

$$\therefore \quad \boxed{N = \frac{3}{2}\frac{\mu r^2}{a}} \qquad (10)$$

Comentarios

1. Se puede conducir los mismos cálculos para la parte a) empleando directamente el ángulo φ. En este caso,

$$r = 2a\cos\varphi \longrightarrow \dot{r} = -2a\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi}$$

Luego, $v^2 = 4a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 4a^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 = 4a^2\dot{\varphi}^2$

Así, de $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu}{2}r^2 = 2a^2\left[m\dot{\varphi}^2 - \mu\cos^2\varphi\right]$

$$\frac{dE}{dt} = 2a^2\left[2m\cancel{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi} + 2\mu\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\cancel{\dot{\varphi}}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{\mu}{m}\varphi = 0}$$

2. Alternativamente, para calcular el período se puede aplicar el resultado: $\omega^2 = \dfrac{V''(\varphi_{est.})}{2f(\varphi)}$ donde φ_{est} es el valor de φ para equilibrio estable y $f(\varphi)$ sale de $T = f(\varphi)\dot{\varphi}^2$ (E. cinética)

$$T = \frac{1}{2}m\,4a^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \boxed{f(\varphi) = 2ma^2}$$

$$V(\varphi) = -2\mu a^2\cos^2\varphi$$

$$V'(\varphi) = 4\mu a^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$$

$$V''(\varphi) = 4\mu a^2\left[-\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\right] = 4\mu a^2(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\varphi)$$

$\varphi_1 = 0$ estable

$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$,, inestable

$$\therefore\ \omega^2 = \frac{\cancel{4}\mu \cancel{a^2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}m\cancel{a^2}} \rightarrow \omega^2 = \frac{\mu}{m}$$

$$\therefore \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mu}}} \quad \text{período}$$

2.

$$F(r) = -m\left(\frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3}\right) \xrightarrow{u=\frac{1}{r}} F(u) = -m(ku^2 + \lambda u^3)$$

De BINET : $+\cancel{m}\cancel{u^2}[k+\lambda u] = +\cancel{m} l_0^2 \cancel{u^2}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\lambda}{l_0^2}\right)u = \frac{k}{l_0^2}} \quad (1)$$

Ahora, si $\lambda < l_0^2 \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda}{l_0^2}\right) > 0$

Entonces, definiendo $n^2 = 1 - \frac{\lambda}{l_0^2} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + n^2 u = \frac{k}{l_0^2}}$ (2)

Solución de la parte homogénea : $u_1 = A\cos(n\theta - \theta_0)$ (3)

con A y θ_0 constantes.

Como solución particular de la ecuación (2) completa : $u_2 = B$

Así, $\frac{d^2B}{d\theta^2} = 0$ y $n^2 B = \frac{k}{l_0^2} \rightarrow B = \frac{k}{l_0^2}\frac{1}{n^2} = \frac{k}{\cancel{l_0^2}} \cdot \frac{\cancel{l_0^2}}{l_0^2 - \lambda}$

La solución general se construye entonces, dada la linealidad de la ecución (2), $u = u_1 + u_2$, o sea,

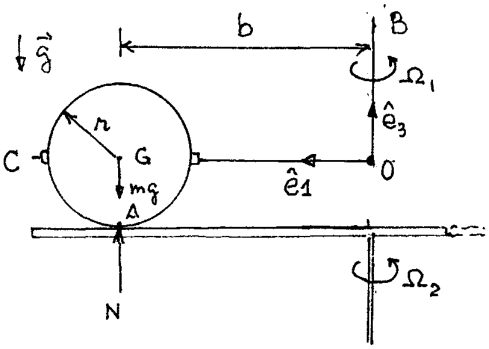
$$u = A\cos(n\theta - \theta_0) + \frac{k}{l_0^2 - \lambda}$$

o $$u = \frac{k}{l_0^2 - \lambda}\left[1 + \frac{A(l_0^2 - \lambda)}{k}\cos(n\theta - \theta_0)\right]$$

de donde, finalmente,

$$\boxed{r = \frac{(l_0^2 - \lambda)/k}{1 + \epsilon\cos(n\theta - \theta_0)}} \quad (4) \qquad \text{con } \epsilon = \frac{A(l_0^2 - \lambda)}{k}$$

∴ Se trata de una cónica.



$I_G = \frac{2}{5} m r^2$

Ω_1 y Ω_2 constantes

SM : eje 1 según OC
eje 3 según OB
eje 2 $\perp$

a) $\vec{\omega}_{SM} = \Omega_1 \hat{e}_3$ (1)

Campo de velocidades de la esfera : $\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega}_{esf} \times \vec{GA}$ (2)

Como la esfera rueda sin resbalar : $\vec{v}_A = b\Omega_2 \hat{e}_2$

Además : $\vec{v}_G = b\Omega_1 \hat{e}_2$

Luego, $b\Omega_2 \hat{e}_2 = b\Omega_1 \hat{e}_2 + (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \times (-r\hat{e}_3)$

$b(\Omega_2 - \Omega_1)\hat{e}_2 = r\omega_1 \hat{e}_2 - r\omega_2 \hat{e}_1 \quad /\cdot \hat{e}_1 \quad /\cdot \hat{e}_2$

$\rightarrow \quad -r\omega_2 = 0 \longrightarrow \boxed{\omega_2 = 0}$ (3)

$b(\Omega_2 - \Omega_1) = r\omega_1 \longrightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{b}{r}(\Omega_2 - \Omega_1)}$ (4) ω_1 (espín $\approx$ $\omega_{relativo}$

Así, $\vec{\omega}_{esf} = \vec{\omega}_{SM} + \vec{\omega}_{rel}$

o $\boxed{\vec{\omega}_{esf} = \frac{b}{r}(\Omega_2 - \Omega_1)\hat{e}_1 + \Omega_1 \hat{e}_3}$ (5)

b) $\vec{L}_O$: $\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b}{r}(\Omega_2 - \Omega_1) \\ 0 \\ \Omega_1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \boxed{\vec{L}_O = I_1 \frac{b}{r}(\Omega_2 - \Omega_1)\hat{e}_1 + I_3 \Omega_1 \hat{e}_2}$ (6)

$I_1 = \frac{2}{5} m r^2 \quad ; \quad I_2 = I_3 = \frac{2}{5} m r^2 + m b^2$ (STEINER) (7)

c) $\underbrace{\cancel{\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_{SM}}}_{=0} + \vec{\omega}_{SM} \times \vec{L}_o = \vec{\tau}_o$

Ecnes. de Euler no son aplicables pues el SM no acompaña totalmente a la esfera en su movimiento.

De (6) : $\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_{SM} = \vec{0}$

$$\vec{\omega}_{SM} \times \vec{L}_o = \Omega_1 \hat{e}_3 \times \left[I_1 \frac{b}{r}(\Omega_2-\Omega_1)\hat{e}_1 + I_3 \Omega_1 \hat{e}_3 \right]$$

$$= I_1 \frac{b}{r}(\Omega_2-\Omega_1)\Omega_1 \ \hat{e}_2$$

$$\vec{\tau}_o = (mg\cdot b - N\cdot b)\,\hat{e}_2 \quad ; \quad \tau_1 = \tau_3 = 0$$

Así, $\quad I_1 \frac{\cancel{b}}{r}(\Omega_2-\Omega_1)\Omega_1 \ \hat{e}_2 = (mg - N)\cancel{b}\ \hat{e}_2 \quad / \cdot \hat{e}_2$

$$N = mg - \frac{I_1}{r}(\Omega_2-\Omega_1)\Omega_1$$

o $\quad \boxed{N = mg + \frac{2}{5} m r (\Omega_1-\Omega_2)\Omega_1} \quad (8)$