Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Física y Matemáticas
Departamento de Física
FI2A1-Mécanica

Profesor: Patricio Martens
Profesor Auxiliar: Pablo Galaz

Potencial Efectivo

A modo de introducción, debemos recordar que toda fuerza conservativa puede expresarse de la forma:

$$\vec{F}(r) = -\nabla V(r) \tag{1}$$

donde $V(r)$ es el potencial asociado a $\vec{F}(r)$.

También se tiene para fuerzas centrales que:

$$l_0 = r^2 \dot{\theta} = r v_{tg} = cte \quad \forall t \tag{2}$$

Ahora supongamos un sistema conservativo, donde una partícula está sometida a una fuerza central del tipo:

$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \tag{3}$$

Así, el potencial asociado a dicha fuerza sería:

$$V(r) = -\frac{k}{r} \tag{4}$$

(recordar que el operador nabla en coordenadas polares es $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta}$).

Analicemos ahora la energía cinética. Ocupando (2) tenemos:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{r^2} \tag{5}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{r^2}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{l_0^2}{r^2} \tag{6}$$

Por lo tanto, la energía mecánica está dada por:

$$E = K + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{l_0^2}{r^2} - \frac{k}{r} \tag{7}$$

Lo cual puede ser reescrito como:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{ef}(r) \tag{8}$$

definiendo $V_{ef}(r) = \frac{1}{2} m \frac{l_0^2}{r^2} - \frac{k}{r}$ (Potencial Efectivo).

Ahora, la pregunta es… y todo esto, ¿para qué?.

La respuesta es la siguiente: logramos pasar de un problema de dos dimensiones (coordenadas r y θ) a un problema de una dimensión (tenemos sólo la coordenada r).

A modo de ejemplo: pensemos que ahora nuestra variable es no es r sino x (ojo que x debe ser mayor a 0). Utilizando la misma expresión de potencial efectivo en (8), tenemos:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V_{ef}(x) \tag{9}$$

Gráficamente sería:

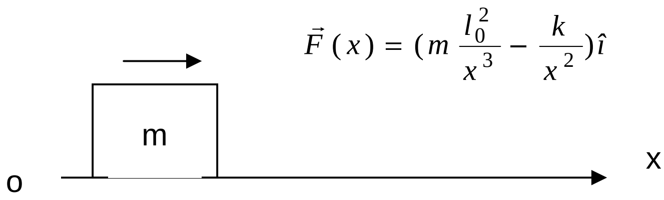

Figura 1: Masa m sometida a un campo de fuerza que depende de la distancia al origen.

Recapitulando… toda fuerza central es conservativa. Por lo mismo, si se tiene una fuerza de este tipo, se tiene un potencial asociado:

$$\vec{F}(r) = F(r)\hat{r} = -\nabla V(r) \tag{10}$$

Con lo cual el potencial efectivo sería en términos generales:

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{1}{2} m \frac{l_0^2}{r^2} \tag{11}$$

Observaciones:

- Para efectos del curso, la utilización del potencial efectivo va casi aplicado en su totalidad a fuerzas centrales.
- La expresión (8) tiene la forma necesaria para buscar puntos de equilibrio.

$$E = f(q)\dot{q}^2 + V(q)$$