Un elástico circular de longitud natural 2a se coloca sobre dos tarugos lisos A y B situados sobre una misma horizontal, separados por una distancia a. Una partícula de masa m se liga al elástico. En el equilibrio, el elástico forma un triángulo equilátero. Demostrar que si en esta condición se da a la partícula un pequeño desplazamiento soltándola luego desde esa posición ella oscilará con un período $T = 2\pi\left[2a\sqrt{3}/7g\right]^{1/2}$.

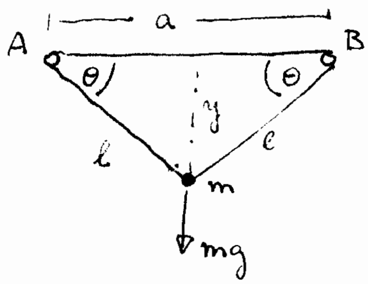
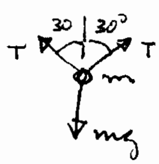


fig. 1

Considerando a este sistema como un sistema conservativo de un grado de libertad, elijamos el ángulo θ de la figura como la coordenada que describe las posibles configuraciones.

La configuración de equilibrio dada en el enunciado ($\theta = 60°$), nos permite calcular el coeficiente k del elástico:



$$2T\cos 30° = mg \longrightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\sqrt{3}}} \quad (1)$$

Luego, de $T = k\Delta \ell \rightarrow k = \dfrac{T}{\Delta \ell} = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{a}$ ya que $\Delta\ell = 3a - 2a = a$

$$\therefore \boxed{k = \frac{mg}{a\sqrt{3}}} \quad (2)$$

Para la configuración de la figura (1) se tiene:

$$V(\theta) = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 - mg\,y$$

$$\Delta\ell = (2\ell + a) - 2a = 2\ell - a$$

Como $\ell = \dfrac{a}{2\cos\theta} \rightarrow \boxed{\Delta\ell = \dfrac{a}{\cos\theta} - a}$ (3)

$$\therefore V(\theta) = \frac{1}{2}\frac{mg}{a\sqrt{3}}\left[\frac{a}{\cos\theta} - a\right]^2 - mg\,\frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta$$

o sea, $$\boxed{V(\theta) = \frac{mga}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)^2 - \operatorname{tg}\theta\right]} \quad (4)$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{d\theta} = \frac{mga}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}\right] \quad (5)$$

Una de las raíces de $V'(\theta)=0$ debería ser, de acuerdo al enunciado, $\theta = \frac{\pi}{3} = 60°$.

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\operatorname{sen}\theta - 1\right] = 0 \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \; ; \; \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De $$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}(2-1)\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}} - 1 = 0$$ Efectivamente, se trata de una raíz.

Luego, $$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{mga}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\frac{\cos^3\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^4\theta}\right\} - \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}\right]$$

$$= \frac{mga}{2\cos^4\theta}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\left(\cos^3\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)\right\} - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]$$

$$\therefore \quad V''(60°) = \frac{14\,mga}{\sqrt{3}} > 0$$ se trata de un mínimo (equilibrio estable)

Por otra parte, $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$; $\dot{y} = \frac{a}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}\dot{\theta}$ $\quad \therefore \boxed{T = \frac{1}{2}m\frac{a^2}{4}\frac{1}{\cos^4\theta}\dot{\theta}^2}$

$$\therefore \quad f(\theta) = \frac{ma^2}{8\cos^4\theta} \longrightarrow f(60°) = \frac{ma^2}{8\cdot\frac{1}{16}} = 2ma^2$$

$$\therefore \text{la} \quad \omega^2 = \frac{V''(60°)}{2f(60°)} = \frac{14\,mga}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2ma^2} = \frac{7g}{2a\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \boxed{T = 2\pi\left[\frac{2a\sqrt{3}}{7g}\right]^{1/2}}$$