Solución Aux 11

Prof: P. Martens
P. Aux: J. Acuña

P1 Para resolver este problema aplicaremos la ecuación de Binet.

a)
$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F(u) \qquad (1)$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2R\cos\theta} \qquad (2)$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2R\cos\theta} \quad ; \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2R}\left[\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\right]$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{1}{2R}\left[\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\right] + \frac{1}{2R\cos\theta} = -\frac{m}{L^2}\frac{1}{u^2} F(u)$$

$$\frac{1}{2R}\left(\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^3\theta}\right) = -\frac{m}{L^2}\left(\frac{1}{(2R\cos\theta)^2}\right)^{-1} F(u)$$

$$\frac{1}{2R}\;\frac{1+1}{\cos^3\theta} = -\frac{m}{L^2}(2R)^2\cos^2\theta\; F(u)$$

$$-\frac{L^2}{m}\;\frac{2}{(2R)^3\cdot\cos^5\theta} = F(u)$$

Pero $\frac{1}{\cos^5\theta} = (2R)^5 u^5$ (Revisar en ec. 2)

$$\Rightarrow \quad -\frac{L^2}{m}\;\frac{2}{(2R)^3}(2R)^5 u^5 = F(u)$$

$$\Rightarrow \quad F(u) = -2\frac{L^2}{m}(2R)^2 u^5$$

$$\boxed{F(r) = -2\frac{L^2}{m}(2R)^2 \cdot \frac{1}{r^5}}$$

b) $r(\theta) = 2R\cos\theta \Rightarrow \quad r_{MAX} = 2R$

$$W = \int_{2R}^{\infty} \frac{-2(2R)^2 L^2}{m} r^{-5}\, dr$$

$$= -\frac{8L^2R^2}{m}\left(\frac{r^{-4}}{-4}\right)\Big|_{2R}^{\infty}$$

$$= -\frac{8L^2R^2}{m}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-4(2R)^4}\right]$$

$$\boxed{W = \frac{-L^2}{8mR^2}}$$

$$F(r) = -\frac{L^2}{m r^3} \Rightarrow F(u) = -\frac{L^2}{m} u^3$$

Reemplazando en la ec. de Binet

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} \cdot \left(-\frac{L^2}{m} u^3\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow u = A + B\theta \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{A+B\theta}}$$

P3

Llamando $r_{min} = 800 + 6{,}37 \cdot 10^3$ Km

$r_{max} = (8 + 6{,}37) \cdot 10^6$ m

Ocupamos la ecuación de Energía (m_s = masa satélite)

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M m_s}{r_{min}} = \frac{1}{2} m v_M^2 - \frac{G M m_s}{r_{max}} \quad (1)$$

v_M se puede despejar usando conservación de $\vec{L}$

$$L_0 = L_f$$

$$m r_{min}^2 \dot{\theta}_0 = m r_{max}^2 \dot{\theta}_f$$

$$r_{min}^2 \underbrace{(r\dot{\theta})_0^2}_{v_0^2} = r_{max}^2 \underbrace{(r\dot{\theta})_{max}^2}_{v_M^2}$$

Por esto es q dan el dato q la velocidad es // a la superficie

$$\Rightarrow v_M^2 = \left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^2 v_0^2$$

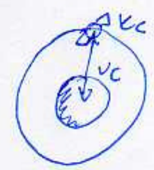
Reemplazando en (1)

4| a) La órbita inicial era circular ⇒ $E<0$

después de perder 2% de K, $E<0$ ⇒ la órbita es elíptica

No puede ser circular porque $\frac{mv^2}{R} \neq$ Fza centrípeta.

b) Primero tenemos la órbita circular



Después del choque se conserva E y L entre las posiciones a) y b)

$$E_b = E_a$$

$$\frac{1}{2} m V_b^2 - \frac{GMm}{r_b} = 0{,}98\, K_c - \frac{GMm}{r_c}$$

V_b lo obtenemos de conservación de L $\quad r_a^2 V_a^2 = r_b^2 V_b^2$

$$V_b^2 = V_a^2 \left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_b^2 = 0{,}98\, K_c \left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2$$

$$0{,}98\, K_c \left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2 - \frac{GMm}{r_b} = 0{,}98\, K_c - \frac{GMm}{r_c}$$

K_c lo obtenemos de $\vec{F} = m\vec{a}$ para la órbita circular

$$\frac{GMm}{r_c^2} = m \frac{V_c^2}{R_c} \Rightarrow \frac{1}{2} m V_c^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_c}$$

$$0{,}98 \cdot \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_c} \left(\frac{r_c}{r_b}\right)^2 - \frac{GMm}{r_b} = 0{,}98 \cdot \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_c} - \frac{GMm}{r_c}$$

$$0{,}49 \frac{r_c}{r_b^2} - \frac{1}{r_b} = (0{,}49 - 1) \frac{1}{r_c}$$

cont P4

$$0{,}49 r_c - r_b = -\frac{0{,}51\, r_b^2}{r_c}$$

$$\frac{0{,}51}{r_c} r_b^2 - r_b + 0{,}49 r_c = 0$$

$$r_b = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}}{\frac{2 \cdot 0{,}51}{r_c}}$$

$$= \frac{1 \pm 0{,}02}{1{,}02} r_c \quad \begin{cases} r_c \\ \frac{0{,}98}{1{,}02} r_c \end{cases}$$

El radio mínimo es $\frac{0{,}98}{1{,}02} r_c = \frac{0{,}98}{1{,}02}(6{,}37 + 4{,}2) \cdot 10^6\, m$

$$= 10{,}15 \cdot 10^6\, m$$

$\Rightarrow$ El satélite no choca con la tierra.