1\. a) $v_r = \dot{r} = 2\lambda a \theta$ (1)

$v_\theta = r\dot{\theta} = \lambda r$ (2)

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (3)

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ (4)

De (1) : $\ddot{r} = 2\lambda a \dot{\theta}$ (5)

De (2) : $\dot{\theta} = \lambda$ (6)

Luego, $\boxed{\ddot{\theta} = 0}$ (7)

Por lo tanto,

$a_r = 2\lambda a \cdot \lambda - r\lambda^2$

o sea : $\boxed{a_r = \lambda^2(2a - r)}$ (8)

Ahora, de (1), (6) y (7) :

$a_\theta = 2 \cdot 2\lambda a \theta \cdot \lambda$

$\therefore \boxed{a_\theta = 4\lambda^2 a \theta}$ (9)

Finalmente,

$$\boxed{\vec{a} = \lambda^2(2a - r)\hat{r} + 4\lambda^2 a \theta\, \hat{\theta}} \quad (10)$$

b) De (6) : $d\theta = \lambda dt$

$\therefore \theta = \lambda t + c_1$

Para $t=0$, $\theta(t=0) = 0$, $\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

Luego, $\boxed{\theta = \lambda t}$ (11)

Entonces, de (1) y (11) :

$\dot{r} = 2\lambda^2 a t$

$\therefore dr = 2\lambda^2 a t\, dt$

$\Rightarrow r = \lambda^2 a t^2 + C_2$

Para $t=0$, $r(t=0) = r_0$ $\Rightarrow \boxed{C_2 = r_0}$

Así, $r = \lambda^2 a t^2 + r_0$ (12)

(11) y (12) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria pedida. Eliminando el parámetro t entre ellas :

$$\boxed{r = a\theta^2 + r_0} \quad (13).$$

2. Una partícula se desplaza en línea recta en un medio gaseoso de modo que experimenta una aceleración negativa $\vec{a} = -kv^n\,\hat{i}$, donde n puede tomar los valores $n=1$ o $n=2$. Si la partícula tiene inicialmente una velocidad $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{i}$, demostrar que si $n=1$, el camino de la partícula está acotado, mientras que si $n=2$, la partícula tiende a alejarse indefinidamente.

Solución :

a) $\vec{a} = -kv\,\hat{i} \rightarrow a = -kv$ (1) $(n=1)$

$a = \dfrac{dv}{dt} = -kv \rightarrow \dfrac{dv}{v} = -k\,dt$ (2)

Integrando (2) : $\mathrm{Ln}\, v = -kt + C_1$ (3)

para $t=0$, $v(0) = v_0 \rightarrow C_1 = \mathrm{Ln}\, v_0$ (4)

Luego, de (3) y (4) $\rightarrow$ $\boxed{v(t) = v_0\, e^{-kt}}$ (5)

Ahora, de (5) : $dx = v_0\, e^{-kt}\, dt \rightarrow x(t) = -\dfrac{v_0}{k}\, e^{-kt} + C_2$ (6)

Para $t=0$, $x(0) = 0 \rightarrow C_2 = \dfrac{v_0}{k}$ (7)

De (6) y (7) : $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$ (8)

De (8) : cuando $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \dfrac{v_0}{k}$ de modo que está acotado.

b) En igual forma : $a = \dfrac{dv}{dt} = -kv^2 \rightarrow \dfrac{dv}{v^2} = -k\,dt$

Integrando se obtiene, habiendo determinado la correspondiente constante de integración :

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$$

En seguida, de $v = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow dx = \dfrac{v_0\, dt}{1 + kv_0 t}$ la que una vez integrada conduce a :

$$x = \frac{1}{k}\mathrm{Ln}(1 + kv_0 t)$$

En el límite $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$ y la partícula se aleja indefinidamente.

3. El sistema es conservativo, a pesar de la fuerza T, pues ésta no realiza trabajo mecánico por ser permanentemente perpendicular a la trayectoria.

a) De $F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \to dV = -mkr\,dr \to \boxed{V = -\frac{1}{2}mkr^2 + C}$ (1)

$\therefore\ W = -\Delta V = -\left[-\frac{1}{2}mkr^2 - \left(-\frac{1}{2}mka^2\right)\right] \Rightarrow \boxed{W = \frac{mk}{2}(r^2 - a^2)}$ (2)

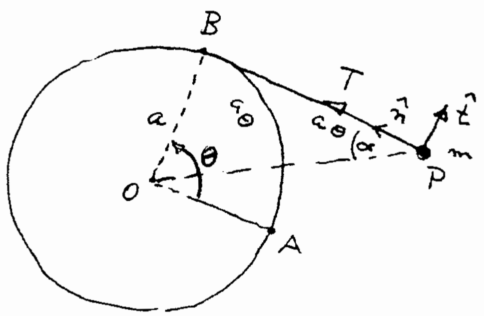
b) Del teo. trabajo - energía cinética: $W = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \to \boxed{W = \frac{1}{2}mv^2}$ (3)

Luego, de (2) y (3): $\frac{mk}{2}(r^2 - a^2) = \frac{1}{2}mv^2 \to \boxed{v^2 = (r^2 - a^2)k}$ (4)

Ahora, en el Δ rectángulo OPB: $r^2 = a^2 + a^2\theta^2 \to r^2 - a^2 = a^2\theta^2$

con lo que $\boxed{v = \sqrt{k}\,a\theta}$ (5)

c)



$PB = \widehat{AB} = a\theta$; $\rho = a\theta$ (radio de curvatura)

Ec. dif. de mov. según $\hat{n}$:

$\hat{n}$: $T - mkr\cos\alpha = \frac{mv^2}{a\theta}$ (6)

Como $r = \sqrt{1+\theta^2}\cdot a \to \cos\alpha = \frac{a\theta}{a\sqrt{1+\theta^2}}$ (7)

Luego, $T = mka\sqrt{1+\theta^2}\cdot\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} + m\frac{ka^{\cancel{2}}\theta^{\cancel{2}}}{\cancel{a}\cancel{\theta}}$

$\therefore \boxed{T = 2mka\theta}$ (8)

T max. se tiene para $\theta = 2\pi$, situación en que la cuerda está totalmente desenrollada: $\boxed{T_{max} = 4\pi mka}$ (9)

d) De la ecuación tangencial: $\cancel{m}kr\,\mathrm{sen}\,\alpha = \cancel{m}\frac{dv}{dt}$ (10)

De ($\cancel{4}$ 5) $\frac{dv}{dt} = \sqrt{k}\,a\frac{d\theta}{dt}$ (11)

$\therefore\ kr\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{d\theta}{dt}\cdot\sqrt{k}\,a$

Como $r = a\sqrt{1+\theta^2}$ y $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \to k\cancel{a}\cancel{\sqrt{1+\theta^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+\theta^2}}} = \sqrt{k}\cancel{a}\frac{d\theta}{dt}$

$d\theta = \sqrt{k}\,dt \to \theta = \sqrt{k}t + \cancel{C}^{0}$ Luego, de $\theta = 2\pi \to 2\pi = \sqrt{k}t^* \to \boxed{t^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}}$