TRABAJO Y ENERGIA MECANICA.

Toda vez que en cada posición de una partícula en una cierta región del espacio esta experimenta la acción de una fuerza cuya intensidad y dirección dependen de dicha posición, se dice que en esa región existe un "campo de fuerzas". En esta ocasión nos referiremos únicamente a campos que no dependen del tiempo.

Sea entonces $\vec{F}(x,y,z)$ una función vectorial de la posición que represente un determinado campo de fuerzas para una partícula m, relativa a un sistema de coordenadas cartesiano. Expresando este campo en términos de sus componentes en las direcciones dadas se tiene:

$$\vec{F}(x,y,z) = F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k} \qquad (1)$$

donde en el caso más general,

$$F_x(x,y,z) \quad ; \quad F_y(x,y,z) \quad ; \quad F_z(x,y,z)$$

El trabajo de las fuerzas del campo en un desplazamiento a lo largo de una cierta trayectoria entre dos posiciones arbitrarias $A(x_A, y_A, z_A)$ y $B(x_B, y_B, z_B)$ queda expresado entonces mediante la integral de línea

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_A^B (F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k}) \cdot (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k})$$

$$= \int_A^B (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \qquad (2)$$

Siempre es posible calcular el valor de esta integral para distintas trayectorias haciéndose así evidente la existencia de una cierta clase de campos para los que dicho valor resulta ser independiente de la trayectoria que enlace dos puntos arbitrarios dados. En otras palabras, el trabajo de las fuerzas en este tipo de campos es el mismo, cualquiera sea la trayectoria que conduzca de un punto a otro.

De la ecuación (2) se desprende que debería cumplirse para el tipo de campos que estamos analizando que la expresión subintegral constituyera una diferencial exacta, esto es, que se cumplieran las condiciones:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad (3)$$

Así, $dU(x,y,z) = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (4)$

donde $U(x,y,z)$ es una función escalar de punto, con dimensiones de energía.

La diferencial total de esta función es

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad (5)$$

de modo que debe cumplirse que

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (6)$$

De este modo,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left[\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right]$$

$$= \int_A^B dU$$

o sea, finalmente,

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \qquad (7)$$

lo que muestra que en estos casos el trabajo realizado por las fuerzas del campo depende únicamente de los puntos A y B y no de la trayectoria seguida desde uno al otro.

A esta función $U(x,y,z)$, asociada a un campo de las características descritas, se le suele nombrar como función escalar de fuerzas. Sin embargo, por razones prácticas, se prefiere expresar el trabajo en términos de la función $V(x,y,z) = -U(x,y,z)$, conocida como función "energía potencial" o más simplemente como el potencial del referido campo. Entonces:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left[V(B) - V(A) \right] \qquad (8)$$

o $\boxed{W_{AB} = -\Delta V}$

En términos del potencial V, la fuerza se expresa ahora como

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

$$= -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right] \qquad (9)$$

El vector $\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = \text{grad}\, V$

se conoce como el vector gradiente del potencial $V(x,y,z)$ y por lo tanto

$$\boxed{\vec{F} = -\,\text{grad}\, V} \qquad (10)$$

Alternativamente, se introduce el operador diferencial vectorial:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \qquad (11)$$

conocido como "operador nabla", en términos del cual se expresa la fuerza $\vec{F}$ en la forma equivalente

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} V} \qquad (12)$$

Se suele decir entonces que este tipo de campos derivan de un correspondiente potencial

Nos enfrentamos así a dos tipos de problemas:

a) Dado el campo $\vec{F}(x,y,z)$ encontrar el potencial $V(x,y,z)$ del cual deriva

b) Dado el potencial $V(x,y,z)$, encontrar el campo $\vec{F}(x,y,z)$ correspondiente.

En el primer caso deben integrarse las ecuaciones diferenciales escalares que correspondan a la ecuación $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.
En el segundo caso basta llevar a cabo las derivadas indicadas en el segundo miembro de $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.

Condición que debe cumplir un campo conservativo.-

Hemos visto anteriormente que en coordenadas cartesianas, la condición necesaria para que un campo $\vec{F}(x,y,z)$ sea un campo conservativo está dada por las relaciones (3), esto es,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad (3)$$

que deben cumplirse simultáneamente.

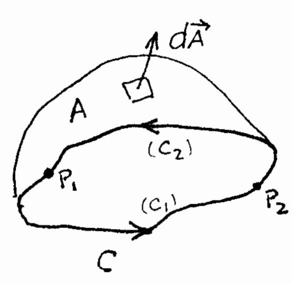
Definiendo el rotor de $\vec{F}$ como $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, entonces

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

De las relaciones (3) se desprende que en un campo conservativo debe cumplirse que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, o sea, que su rotor debe ser nulo. Se trata de una condición necesaria.

Se puede demostrar además que esta condición es suficiente, basados en el teorema de Stokes:

$$\iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



donde dA es un elemento de área limitado por la trayectoria cerrada C y $\hat{n}$ un vector unitario normal $\hat{n}$ tal que $d\vec{A} = dA\,\hat{n}$

De acuerdo a esto, $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ implica que $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

o sea,
$$\oint_{(C)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1\,(C_1)}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{P_2\,(C_2)}^{P_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\therefore \int_{P_1\,(C_1)}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

o finalmente,
$$\int_{P_1\,(C_1)}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1\,(C_2)}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

resultado que indica que el trabajo es independiente de la trayectoria que conecte P_1 con P_2. Luego la condición $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ es también suficiente.

Energía mecánica de la partícula.

Consideremos a continuación un conjunto de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ cada una de las cuales deriva de un respectivo potencial $V_1, V_2, \ldots$

Según esto, $\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}V_1$; $\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}V_2$; .....

Llamando $W_1, W_2, \ldots$ a los trabajos individuales de cada una de estas fuerzas en un mismo desplazamiento $\Delta\vec{r}$, entre los puntos $A(x_A, y_A, z_A)$ y $B(x_B, y_B, z_B)$ del campo conjunto, el teorema de las fuerzas vivas establece que

$$W_1 + W_2 + \ldots = K(B) - K(A)$$

o sea, $$-\Delta V_1 - \Delta V_2 - \ldots = K(B) - K(A)$$

o $$V_1(A) - V_1(B) + V_2(A) - V_2(B) + \ldots = K(B) - K(A)$$

Reordenando esta última ecuación :

$$V_1(A) + V_2(A) + \cdots + K(A) = V_1(B) + V_2(B) + \cdots K(B)$$

Se define la suma $V_1 + V_2 + \cdots K = E$ como la energía mecánica de la

Se tiene entonces que $E(A) = E(B)$

o $$E(B) - E(A) = \Delta E = 0$$

Siendo A y B dos puntos arbitrarios del campo, se concluye que la energía mecánica de la partícula es en estos casos una <u>constante del movimiento</u>.

Como no hay disipación de la energía mecánica a estos campos se les califica como "Campos conservativos".

Supongamos a continuación que entre las fuerzas que actúan sobre la partícula solo algunas sean conservativas:

$$\int_A^B (\vec{F}_{nc} + \vec{F}_c) \cdot d\vec{r} = K(B) - K(A)$$

$$\int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = K(B) - K(A)$$

$$\therefore \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} - [V(B) - V(A)] = K(B) - K(A)$$

$$\therefore \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = [V(B) + K(B)] - [V(A) + K(A)]$$

$$= E(B) - E(A)$$

$$\therefore \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = \Delta E$$

" El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica de la partícula. Hay disipación de energía.

Fuerzas no conservativas.

$\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq 0$. No existe un potencial asociado a estos campos y el trabajo entre dos puntos del campo depende de la trayectoria que los enlace. Por lo tanto $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$

Ejemplos.

1. Una partícula se mueve en un campo de fuerzas definido por:
$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^3}\left(xy^2\,\hat{\imath} + x^2y\,\hat{\jmath}\right) \qquad \text{(campo en dos dimensiones)}$$

a) Demostrar que se trata de un campo conservativo.

b) Determinar el potencial $V(x,y)$

c) Calcular el trabajo W realizado por las fuerzas del campo sobre la partícula en un desplazamiento desde el origen hasta el punto (a,a) mediante el resultado de (b)

d) Calcular este mismo trabajo mediante las integrales de línea correspondientes a las trayectorias $y = x$ e $y = x^2/a$.

---

a) $F_x = \dfrac{F_0}{a^3}\,xy^2 \longrightarrow \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{2F_0}{a^3}\,xy$

$F_y = \dfrac{F_0}{a^3}\,x^2y \longrightarrow \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{2F_0}{a^3}\,xy$

Por lo tanto se trata de un campo conservativo.

b) $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$$\therefore\ \frac{F_0}{a^3}xy^2\,\hat{\imath} + \frac{F_0}{a^3}x^2y\,\hat{\jmath} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} \quad /\cdot\hat{\imath}\,/\cdot\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{F_0}{a^3}xy^2 \qquad (i)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{F_0}{a^3}x^2y \qquad (ii)$$

De (i): $dV = -\frac{F_o}{a^3} x y^2 dx \quad (y = cte)$

Integrando a $y = cte$:

$$V = -\frac{F_o y^2}{a^3}\frac{x^2}{2} + f(y) \quad (*)$$ donde $f(y)$ es la constante de integración

En seguida, derivando parcialmente este resultado con respecto a la variable y:

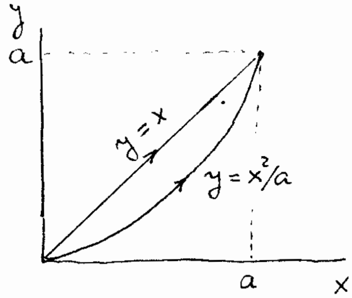
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2 F_o y x^2}{2a^3} + f'(y) \quad (**)$$

Igualando $(**)$ con (ii):

$$-\frac{F_o x^2 y}{a^3} + f'(y) = -\frac{F_o}{a^3} x^2 y$$

Luego, $f'(y) = \frac{df(y)}{dy} = 0 \rightarrow f(y) = C$ (no depende de y)

Reemplazando en $(*)$: $\boxed{V = -\frac{F_o}{2a^3} x^2 y^2 + C}$ C = cte. arbitraria.

c) 

$$W = -\Delta V = -\left[V(a,a) - V(0,0)\right]$$

$$\therefore W = -\left[-\frac{F_o a^4}{2a^3} + C + 0 - C\right]$$

$$\boxed{W = \frac{F_o a}{2}}$$

En la práctica, a menudo, se asigna a la constante aditiva un valor arbitrario. En muchos caso como este es conveniente $C = 0$, lo que equivale a que $V(0,0) = 0$.

d) Integración según $y = x$. $\rightarrow dy = dx$ sobre la recta.

Luego, $W = \frac{F_o}{a^3}\int_{(0,0)}^{(a,a)} (x y^2 dx + x^2 y\, dy)$

$$= \frac{F_o}{a^3}\int_0^a (x^3 dx + x^3 dx)$$

o sea, $W = \dfrac{2F_0}{a^3}\displaystyle\int_0^a x^3 dx = \dfrac{2F_0}{a^3}\dfrac{x^4}{4}\Big|_0^a \quad \therefore$

Luego, $W = \dfrac{F_0 a}{2}$

Integración según $y = \dfrac{x^2}{a} \rightarrow dy = \dfrac{2x\,dx}{a}$ (sobre la parábola)

$$W = \frac{F_0}{a^3}\int_{(0,0)}^{(a,a)} (x\,y^2 dx + x^2 y\,dy)$$

$$= \frac{F_0}{a^3}\int_0^a \left(\frac{x^5}{a^2}dx + \frac{2x^5}{a^2}dx\right)$$

$$= \frac{3F_0}{a^2 a^3}\int_0^a x^5 dx = \frac{3F_0}{a^5}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^a$$

$$\therefore \quad W = \frac{F_0 a}{2}$$

Se ha comprobado así que el trabajo no depende de la trayectoria.

Si en vez de la fuerza dada damos $\vec{F} = \dfrac{F_0}{a^3}(xy\,\hat{i} + x^2 y\,\hat{j})$ se verifica que no constituye un campo conservativo, pues se cumple que $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$. Esta fuerza no deriva de un potencial y el trabajo depende de la trayectoria, como podría comprobarse mediante las trayectorias $y = x$ e $y = x^2/a$ empleadas anteriormente.

. Demostrar que el campo de fuerzas:

$$\vec{F} = \underbrace{(y^2z^3 - 6xz^2)}_{F_x}\hat{\imath} + \underbrace{2xyz^3}_{F_y}\hat{\jmath} + \underbrace{(3xy^2z^2 - 6x^2z)}_{F_z}\hat{k}$$

es un campo conservativo y determinar la función energía potencial correspondiente, refiriéndola al origen de coordenadas.

Solución. El rotor de $\vec{F}$ debe ser nulo o lo que es lo mismo, tratándose de coordenadas cartesianas, debe cumplirse que $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$; $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$ y finalmente, que $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$.

Así, $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2yz^3$; $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 2yz^3$ son iguales

$\frac{\partial F_x}{\partial z} = 3y^2z^2 - 12xz$; $\frac{\partial F_z}{\partial x} = 3y^2z^2 - 12xz$ son iguales

$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 6xyz^2$; $\frac{\partial F_z}{\partial y} = 6xyz^2$ son iguales

Queda demostrado en consecuencia que el campo de fuerzas dado es en efecto conservativo.

Para determinar el potencial del cual deriva escribimos:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

o sea,

$$(y^2z^3 - 6xz^2)\hat{\imath} + 2xyz^3\hat{\jmath} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

de donde se obtienen las ecuaciones escalares correspondientes:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y^2z^3 + 6xz^2 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -2xyz^3 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -3xy^2z^2 + 6x^2z$$

De la primera de estas ecuaciones se tiene:

$dV = (6xz^2 - y^2z^3)\,dx$ con y, z constantes.

Integrando a y, z constantes:

$$V = 6z^2\int x\,dx - y^2z^3\int dx$$

o sea,

$$V = 3z^2x^2 - y^2z^3x + f(y,z) \quad (1)$$ donde $f(x,z)$ es la constante de integración

Derivando (1) parcialmente respecto de la variable "y":

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2yz^3x + \frac{\partial}{\partial y}f(y,z) \quad (2)$$

Pero, anteriormente se tiene que $\frac{\partial V}{\partial y} = -2yz^3x \quad (3)$

Luego, de (2) y (3) se encuentra que $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0$ y que por lo tanto esta función no es función de la variable "y".

Derivando nuevamente (1), esta vez parcialmente respecto de z:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 6zx^2 - 3y^2z^2x + \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (4)$$

Pero, anteriormente se tiene que $\frac{\partial V}{\partial z} = -3x^2y^2z^2 + 6x^2z \quad (5)$

De (4) y (5): $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0$, o sea, que $f(z)$ es independiente de z, o $f = C$, constante.

Finalmente, entonces:

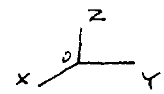
$$V(x,y,z) = 3z^2x^2 - y^2z^3x + C$$

Haciendo $V(0,0,0) = 0$, se tiene $C = 0$

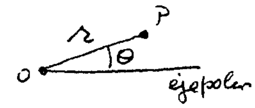
y $\boxed{V = 3z^2x^2 - y^2z^3x}$

Expresiones del operador $\vec{\nabla}$ en diferentes sistemas de coordenadas.

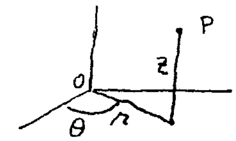
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$ coordenadas cartesianas



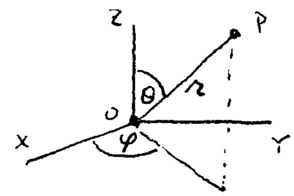
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta}$$ coordenadas polares



$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$ coordenadas cilíndricas



$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$ coordenadas esféricas



Condiciones de exactitud:

cartesianas:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \; ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \; ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

polares:

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = F_\theta + r\frac{\partial F_\theta}{\partial r}$$

$$\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}$$

$$dW = F_r\,dr + r F_\theta\,d\theta$$

esféricas:

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = F_\theta + r\frac{\partial F_\theta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \left(F_\varphi + r\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\right)\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} = F_\varphi\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}$$

Problemas.

Ejercicios.

1. Encontrar el campo de fuerzas correspondiente al potencial

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\,Ln\,(x^2+y^2+z^2).$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \longrightarrow F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{k} \quad (1)$$

De (1) se obtienen las ecuaciones escalares:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \;;\quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \;;\quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Así, $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2} \quad \therefore \quad F_x = -\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$

Análogamente se encuentran:

$$F_y = -\frac{y}{x^2+y^2+z^2} \quad y \quad F_z = -\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

De esta manera la fuerza correspondiente a este potencial es:

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}}{x^2+y^2+z^2}}$$

que puede también ponerse bajo la forma:

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^2} = -\frac{\hat{r}}{r}$$

2. Encontrar el campo de fuerzas correspondiente al potencial

$$V(r,\theta) = \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

En polares, $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial r}\,\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\,\hat{\theta}$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2a\cos\theta}{r^3} \longrightarrow F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2a\cos\theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{a}{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta \longrightarrow F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}$$

Luego, $\boxed{\vec{F} = \dfrac{2a\cos\theta}{r^3}\,\hat{r} + \dfrac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{\theta}}$

3. Dada en coordenadas polares el campo de fuerzas $\vec{F} = -\frac{1}{r}\hat{r} + \frac{1}{r}\operatorname{tg}\theta\,\hat{\theta}$, determinar si se trata de un campo conservativo. En caso afirmativo, encontrar el potencial del cual deriva.

En este caso, $F_r = -\frac{1}{r}$ y $F_\theta = \frac{1}{r}\operatorname{tg}\theta$

En coordenadas polares, la condición necesaria y suficiente para que la fuerza sea conservativa está expresada por la ecuación:

$$F_\theta + r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} = \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \quad (1)$$

Veamos entonces: $\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r}\right) = 0$

Además: $\frac{\partial F_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\operatorname{tg}\theta\right) = -\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\theta \longrightarrow F_\theta + r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r}\operatorname{tg}\theta - r\cdot\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\theta = 0$

Se cumple en este caso la condición (1), de modo se trata efectivamente de un campo conservativo.

Ahora, de $\vec{F} = -\vec{\nabla}V \rightarrow -\frac{1}{r}\hat{r} + \frac{1}{r}\operatorname{tg}\theta\,\hat{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$

de donde se obtienen las ecuaciones escalares

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad y \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\operatorname{tg}\theta \quad (*)$$

De la primera ecuación: $dV = \frac{dr}{r} \quad \theta = cte.$

Integrando a θ cte.: $V = \operatorname{Ln} r + f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es la constante de integración. Ahora, derivando parcialmente esta ultima ecuación respecto de la variable θ se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{d f(\theta)}{d\theta}$$

Pero, de $(*)$, $\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\operatorname{tg}\theta$ o sea, $d f(\theta) = -\operatorname{tg}\theta\, d\theta \longrightarrow f(\theta) = \operatorname{Ln}\cos\theta + C$

Luego, $V = \operatorname{Ln} r + \operatorname{Ln}\cos\theta + C$

$$\therefore \boxed{V = \operatorname{Ln}(r\cos\theta) + C}$$