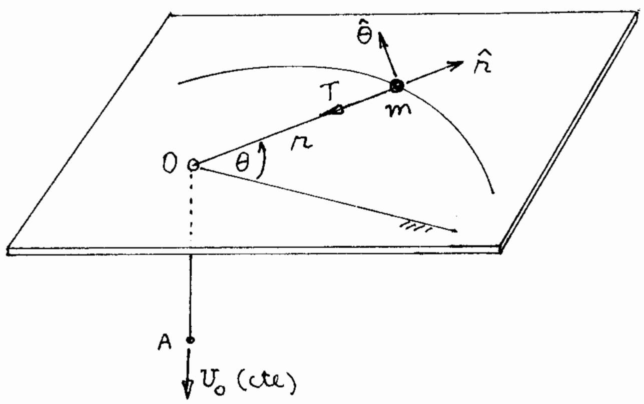
Una partícula de masa m gira sobre un plano horizontal liso unida a un hilo ideal que, pasando por un orificio sin roce, es tirado hacia abajo con rapidez constante v_0. Si en el instante inicial $t=0$, $\theta(0)=0$; $r(0)=r_0$ y $\dot{\theta}(0)=\omega_0$, donde $r(t)$ es la distancia de la partícula al orificio, determinar la tensión T del hilo como función del tiempo y la ecuación $r(\theta)$ de la trayectoria de la partícula sobre el plano.



En coordenadas polares, las ecuaciones escalares del movimiento son:

$\hat{r}$: $\quad -T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$

$\hat{\theta}$: $\quad 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$

Además, $\dot{r} = -v_0 \quad (3)$ De (3) $\rightarrow \boxed{\ddot{r} = 0}$, de modo que la ecuación (1) se reduce a:

$$T = mr\dot{\theta}^2 \quad (4)$$

De (2), al reescribirla como $r\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = -2\dfrac{dr}{dt}\dot{\theta}$ se observa que puede ser llevada a la forma: $\dfrac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\dfrac{dr}{r}$

que al ser integrada da como resultado: $\mathrm{Ln}\,\dot{\theta} = -\mathrm{Ln}\,r^2 + \mathrm{Ln}\,C_1$ donde por razones prácticas hemos puesto la constante de integración como $\mathrm{Ln}\,C_1$.

Así, $\mathrm{Ln}\,r^2\dot{\theta} = \mathrm{Ln}\,C_1 \longrightarrow r^2\dot{\theta} = C_1 \quad (5)$

Determinación de la constante C_1: para $t=0$, $r(0)=r_0$ y $\dot{\theta}(0)=\omega_0$, luego, $C_1 = r_0^2\omega_0$. Reemplazando en (5) se obtiene:

$$r^2\dot{\theta} = r_0^2\omega_0 \quad (6)$$

De (6): $\dot{\theta} = \dfrac{r_0^2\omega_0}{r^2} \longrightarrow \dot{\theta}^2 = \dfrac{r_0^4\omega_0^2}{r^4} \longrightarrow r\dot{\theta}^2 = \dfrac{r_0^4\omega_0^2}{r^3} \quad (7)$

De (3): $\dfrac{dr}{dt} = -v_0 \rightarrow dr = -v_0\,dt \rightarrow r = -v_0 t + C_2$

Determinación de C_2: Para $t=0$, $r(0)=r_0 \;\therefore\; C_2 = r_0$, con lo que

$$\boxed{r = r_0 - v_0 t} \quad (8)$$

De (3) y (8): $r\dot{\theta}^2 = \dfrac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0-v_0t)^3} \quad (9)$

Finalmente, de (4) y (9): $\boxed{T = \dfrac{m r_0^4\omega_0^2}{(r_0-v_0t)^3}} \quad (10)$

A continuación, para determinar la trayectoria $r(\theta)$, de (6):

$$\dot{\theta} = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}$$

Poniendo: $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta}{dr}\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d\theta}{dr}(-v_0)$, entonces

$$-v_0\frac{d\theta}{dr} = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2} \longrightarrow d\theta = -\frac{r_0^2\omega_0}{v_0}\frac{dr}{r^2}$$

Integrando: $\theta = -\dfrac{r_0^2\omega_0}{v_0}\cdot\left(-\dfrac{1}{r}\right) + C_3$

De las condiciones iniciales resulta que $C_3 = -\dfrac{r_0\omega_0}{v_0}$

por lo que $\theta = \dfrac{r_0\omega_0}{v_0}\left(\dfrac{r_0}{r} - 1\right)$

o

$$\boxed{r = \frac{r_0}{1 + \left(\dfrac{v_0}{r_0\omega_0}\right)\theta}} \quad (11)$$