

SISTEMAS DINÁMICOS

Luis Rodríguez Valencia¹
Departamento de Física
Universidad de Chile

25 de julio de 2008

¹email: lhrodrig@lauca.usach.cl

Contenidos

1. Ecuaciones de Lagrange	1
1.1. Introducción	1
1.2. Restricciones o vínculos	2
1.2.1. Vínculos holonómicos y coordenadas generalizadas . . .	2
1.2.2. Fuerzas de vínculos	3
1.2.3. Desplazamientos virtuales	3
1.3. Ecuaciones de Lagrange	4
1.3.1. Vínculos no holonómicos	5
1.3.2. Fuerzas de vínculos	6
1.3.3. Condición de integrabilidad	11
1.4. Sistemas Conservativos	11
1.4.1. Momentos canónicos	11
1.4.2. El hamiltoniano del sistema	12
1.4.3. Teoremas de conservación	14
1.4.4. Hamiltoniano y energía	15
1.4.5. Fuerzas dependientes de la velocidad	16
1.4.6. Sistema no inercial	18
1.4.7. Ecuación de Lagrange en un sistema que rota	19
1.4.8. Teorema de Noether	22
1.4.9. Ejemplos	23
1.5. Las ecuaciones de Hamilton	27
1.5.1. Sistemas autónomos	27
1.5.2. Puntos críticos o de equilibrio	27
1.5.3. Algunos retratos de sistemas	34
1.5.4. Bifurcaciones	36
1.5.5. Estabilidad de un punto de equilibrio	37
1.6. Bifurcaciones	37

1.6.1.	La bifurcación de Saddle point	37
1.6.2.	Análisis de estabilidad más en general	39
1.6.3.	La bifurcación de pitchfork	39
1.6.4.	La bifurcación de Hopf	40
1.6.5.	Análisis de estabilidad	42
1.6.6.	Otro punto de vista	48
1.6.7.	Un caso inestable	48
1.6.8.	Otro caso estable	49
1.6.9.	El trompo dormido	50
1.7.	Principio variacional de Hamilton	51
1.7.1.	Variación de la acción	51
1.7.2.	Variación en los extremos	53
1.8.	Ejercicios resueltos	54
2.	Sistema rígido de partículas	69
2.1.	Cinemática de un sistema rígido	69
2.1.1.	Rotaciones y traslaciones de un sistema de coordenadas	69
2.1.2.	Rotación de un vector en un ángulo ϕ respecto a un eje especificado por $\hat{n}$	70
2.2.	Descomposición del movimiento	71
2.2.1.	Teorema de adición de velocidades angulares	72
2.2.2.	Energía cinética y momentum angular	76
2.2.3.	Algunas propiedades de la matriz de inercia	76
2.2.4.	Teoremas	77
2.2.5.	El elipsoide de inercia	77
2.2.6.	Ángulos de Euler	80
2.2.7.	Velocidad angular usando matrices	82
2.2.8.	Velocidad angular usando vectores	82
2.3.	Lagrangiano de un cuerpo rígido	84
2.4.	Ecuaciones dinámicas	84
2.4.1.	Movimiento Plano	84
2.5.	Movimiento en tres dimensiones	92
2.5.1.	Ecuaciones de Euler	92
2.5.2.	Ecuaciones de Euler a partir de ecuaciones de Lagrange	92
2.5.3.	Torque nulo	94
2.5.4.	Cuerpo simétrico	95
2.5.5.	Trompo simétrico.	101

2.5.6. Bola que rueda sobre un plano, sometida en su centro a una fuerza	107
2.6. Ejemplos	112
2.7. Movimiento con loops	118
2.7.1. Movimiento cuspidal	120
2.8. Ejercicios resueltos	121
3. Oscilaciones pequeñas	149
3.1. La energía potencial	149
3.2. La energía cinética	149
3.2.1. Posición de equilibrio	151
3.2.2. Estabilidad	151
3.3. Linealización	152
3.4. El lagrangiano aproximado	152
3.5. Solución de las ecuaciones de movimiento	153
3.5.1. Los ω^2 son reales	153
3.5.2. Diagonalización	155
3.5.3. Solución del sistema	156
3.5.4. Coordenadas normales	157
3.5.5. El sistema general de dos grados de libertad	158
3.5.6. Acoplamiento a través de la energía potencial: $K_{12} = 0$	160
3.5.7. Acoplamiento a través de la energía cinética: $V_{12} = 0$	160
3.5.8. Las ecuaciones de Lagrange se desacoplan	161
3.6. Oscilaciones forzadas	161
3.6.1. Movimiento forzado	163
3.6.2. Resonancia	164
3.6.3. resonancia $\Omega = \omega_1$	166
3.6.4. resonancias $\Omega = \omega_2$	166
3.6.5. Para tiempos largos	167
3.7. Ejemplos	167
3.8. Ejercicios resueltos	175
4. Sistemas con muchos grados de libertad	185
4.1. Oscilaciones longitudinales	185
4.1.1. (a) Extremos fijos	186
4.1.2. Las posiciones	189
4.1.3. Condiciones iniciales	190

4.1.4.	Coordenadas normales	191
4.1.5.	(b) Condiciones periódicas	192
4.1.6.	Solución alternativa de (b)	192
4.2.	Oscilaciones transversales	194
4.2.1.	Las coordenadas	196
4.2.2.	Transformada discreta de Fourier	197
4.2.3.	Un ejemplo numérico	197
4.3.	Ejercicios	198
5.	Sistemas continuos	199
5.1.	Principio variacional de Hamilton	199
5.1.1.	Principio variacional de Hamilton	200
5.1.2.	Variación en los extremos	201
5.1.3.	Ejemplos simples	203
5.1.4.	La ecuación independiente del tiempo	207
5.2.	Oscilaciones transversales	207
5.3.	Límite continuo	208
5.3.1.	Lagrangiano para la cuerda continua	209
5.3.2.	Densidad Lagrangiana	210
5.3.3.	Principio de Hamilton para sistemas continuos	210
5.4.	Soluciones de la ecuación de onda	215
5.4.1.	Condiciones de frontera	216
5.4.2.	Condiciones iniciales	217
5.5.	Método de las series de Fourier	219
5.6.	Solución de D'Alembert	220
5.6.1.	Condiciones iniciales.	221
5.6.2.	Condiciones de frontera	221
5.6.3.	Casos particulares	222
5.6.4.	Extensión de $F(x)$ o $V(x)$	223
5.7.	Ejemplos	224
5.7.1.	Si la cuerda parte recta con un perfil de velocidades iniciales	224
5.8.	Consideraciones energéticas	227
5.8.1.	Cuerda con extremo libre	227
5.8.2.	Potencia en ondas armónicas	229
5.8.3.	Membranas	230

5.8.4. Solución para geometrías específicas	233
5.9. Elementos de mecánica de Fluidos	237
5.9.1. Cambio del volumen	238
5.9.2. Líneas de flujo	241
5.10. Ecuación de movimiento de un fluido ideal	242
5.10.1. Onda sonoras en un fluido	245
5.10.2. Ondas de canal	248
5.10.3. Ondas de superficie en líquidos	251
5.10.4. Más sobre ondas de superficie	259
5.10.5. Una ecuación extendida para ondas de canal	260
5.10.6. Ecuación no lineal efectiva	263
5.10.7. Una solución aproximada	264
5.10.8. Algunas soluciones de la ecuación de onda.	265
5.10.9. A) Ondas planas	265
5.10.10.B) Ondas esféricas	266
5.10.11.Las ondas electromagnéticas	267
5.10.12.Ondas electromagnéticas planas	268
5.10.13.Velocidad de grupo	271
5.10.14.Efecto Doppler clásico	274
5.10.15.Efecto Doppler relativista	274
5.10.16.Efecto Doppler para ondas luminosas	275
5.11. Ejercicios propuestos.	275
5.11.1. Calculo variacional	282
6. Problemas complementarios	291
7. Problemas resueltos	299

Índice de figuras

1.1.	Transformación de Legendre	12
1.2.	Autovalores reales	31
1.3.	Autovalores complejos	32
1.4.		38
1.5.		42
1.6.		43
1.7.	gráfico de $\frac{1}{r^2} + r^2$	50
1.8.		57
1.9.	$V(z) = \frac{1}{z^2} + z$	62
1.10.		62
1.11.		65
2.1.	Rotación activa de vector	71
2.2.	Adición velocidades angulares	72
2.3.	velocidades de un cuerpo rígido	74
2.4.	Elipsoide de inercia	78
2.5.	Cuerpo simétrico	96
2.6.	Conos del espacio y del cuerpo	98
2.7.	Trompo simétrico	101
2.8.	Esfera atraída hacia el origen	108
2.9.		122
2.10.		123
2.11.		127
2.12.	Conos del espacio y del cuerpo	130
2.13.	Choque cuerpos rígidos	136
3.1.		162
3.2.		168

3.3.		171
3.4.		173
4.1.	osciladores acoplados	186
5.1.	Potencia en una onda.	228
5.2.		230
5.3.		238
5.4.		248
6.1.		293
6.2.		294
6.3.	Mínimo de una acción	296
7.1.		299
7.2.		308
7.3.		311
7.4.		314
7.5.		317
7.6.	coordenadas elípticas	318

Ecuaciones de Lagrange

1.1. Introducción

Presentaremos las ecuaciones de Lagrange que constituyen una formulación alternativa a la formulación clásica Newtoniana, con ventajas que explicaremos. Las ecuaciones de Lagrange así como la función lagrangiano pueden ser introducidas de diversas formas. La justificación última de cualquiera de los métodos es que el formalismo conduzca a las ecuaciones correctas de movimiento del sistema (cuando ellas son conocidas). De este punto de vista pueden existir diversos lagrangianos que originen las mismas ecuaciones de movimiento. Esos lagrangianos se denominan equivalentes. Una de las formas modernas es partir del principio variacional de Hamilton buscando una función lagrangiano que satisfaga el criterio anterior. Las simetrías del sistema pueden ser de ayuda en postular una determinada función lagrangiano. En estos apuntes preferiremos partir de las ecuaciones clásicas de Newton de movimiento de un sistema y derivar de allí la formulación lagrangiana, con lo cual el principio variacional de Hamilton pasa a ser en realidad un teorema de la Mecánica Clásica. En esta formulación, el lagrangiano del sistema estará dado por $L = K - V$, la energía cinética menos la energía potencial del sistema. Otros casos en que ello no sea así se considerarán en particular.

1.2. Restricciones o vínculos

Una forma equivalente a la formulación newtoniana de la Mecánica, la constituye la formulación lagrangiana. La principal ventaja práctica que tiene esta formulación, es que de partida, el número de variables es el mínimo posible para determinar la configuración del sistema y además que no es necesario conocer el detalle de las fuerzas de vínculos para su formulación, siempre que ellas satisfagan ciertos requisitos que se explican más adelante.

1.2.1. Vínculos holonómicos y coordenadas generalizadas

Normalmente sobre un sistema mecánico existen restricciones o vínculos dados. Por ejemplo si se tiene un sistema rígido de partículas, las distancias entre ellas son invariables y por lo tanto las variables necesarias para su descripción serán apenas 6, independientemente del número de partículas que constituye el sistema. Los vínculos llamados de tipo holonómico son los que permiten disminuir el número de variables de las inicialmente consideradas, por constituir *relaciones funcionales* que permitirían hacer la eliminación de variables redundantes. Rara vez se procede a eliminar variables redundantes explícitamente. En vez, razonando se decide sobre cuántas variables son necesarias y se las elige. Así, para el caso de vínculos holónomos, si el sistema tiene N partículas, existen en principio N vectores posición o $3N$ coordenadas por determinar. La existencia de un cierto número de vínculos constantes o funciones conocidas del tiempo, hace que sea necesario un número menor de coordenadas n ($n < 3N$). Denotaremos por q_i a esas coordenadas elegidas, llamadas coordenadas generalizadas del sistema. Todo los cambios virtuales posibles de posición del sistema corresponden a cambios arbitrarios de las coordenadas generalizadas, supuestas independientes. El número de coordenadas generalizadas n , es llamado el número de grados de libertad del sistema. Los cambios reales del sistema son logrados mediante cambios virtuales de las coordenadas generalizadas más los cambios que se originen en las variaciones con el tiempo de los vínculos, en el caso en que hayan vínculos variables.

1.2.2. Fuerzas de vínculos

La presencia de ciertos tipos de vínculos equivalen a ciertas fuerzas, normalmente desconocidas, actuando sobre algunas partículas. Por ejemplo la condición para que una partícula permanezca sobre una superficie lisa dada es equivalente a una cierta reacción normal. La formulación lagrangiana usual, exige que las llamadas fuerzas de vínculos, realicen un trabajo total nulo cuando las partículas tienen desplazamientos (infinitésimos) compatibles con los vínculos *a tiempo fijo*. Para el ejemplo anterior, suponga que la superficie lisa tiene un movimiento dado. Si la partícula es desplazada sobre la superficie sin permitir su movimiento (a tiempo fijo), la reacción normal no realiza trabajo. Sin embargo, si el desplazamiento de la partícula es sobre la superficie que se mueve, la reacción normal realiza trabajo distinto de cero. Si las fuerzas que vinculan un sistema de partículas para que este sea un sistema rígido de partículas, obedecen el principio de acción y reacción, es muy simple demostrar que el trabajo total que realizan esas fuerzas al desplazar arbitrariamente el sistema, es nulo.

1.2.3. Desplazamientos virtuales

Para sistematizar la discusión llamaremos *desplazamientos virtuales compatible con los vínculos*, a los cambios de posición infinitésimos $\delta\vec{r}_i$ asociados a cambios arbitrarios infinitésimos de las coordenadas generalizadas δq_i *a tiempo fijo*.

La diferencia entre desplazamientos virtuales $\delta\vec{r}_i$ y desplazamientos reales $d\vec{r}_i$ debe estar clara. Si, por definición de coordenadas generalizadas se tiene

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (1.1)$$

la diferencia señalada es:

son cambios reales

$$d\vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt,$$

y son cambios virtuales

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.2)$$

La diferencia puede ser importante en el caso que los vínculos sean funciones del tiempo, es decir cuando el tiempo aparezca explícitamente en (1.1).

1.3. Ecuaciones de Lagrange

Si se escriben las ecuaciones de Newton para las N partículas, separando las fuerzas que actúan sobre ellas en fuerzas de *vínculos* y las de otro tipo

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{vinc.}.$$

La esencia de la formulación lagrangiana es que las fuerzas de vínculos no realizan trabajo virtual, es decir

$$\sum_i \vec{F}_i^{vinc.} \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

o sea

$$\delta W \equiv \sum m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i (\vec{F}_i + \vec{F}_i^{vinc.}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (1.3)$$

Quedan entonces excluidas de esta formulación sistemas con fuerzas de roce disipativas. El resto, la obtención de las ecuaciones de Lagrange, son detalles que veremos a continuación.

Partiendo de (1.1), se deja como ejercicio demostrar la siguiente identidad.

EJERCICIO 1.3.1 Si $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, demuestre la identidad

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} v_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{2} v_i^2 \equiv \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Si esa identidad se multiplica por $m_i \delta q_j$ y se suma en i, j se obtiene

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j \equiv \sum_{i,j} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

que sigue siendo una identidad. La *Física* recién entra ahora, al utilizar (1.3)

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j, \quad (1.4)$$

siendo K la energía cinética y

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \delta W = \sum_j \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j,$$

por último, si las coordenadas generalizadas son independientes, como se ha supuesto, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K = Q_j. \quad (1.5)$$

Este conjunto de ecuaciones se conoce como las *ecuaciones de Lagrange* del sistema (en una primera versión).

1.3.1. Vínculos no holonómicos

Un cierto tipo de vínculo *no holonómico* puede ser tratado con mínimas variaciones con lo explicado. El caso que analizaremos consiste en restricciones adicionales lineales en las velocidades generalizadas del tipo

$$\sum_j A_{ij} \dot{q}_j + A_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p,$$

siendo los A_{ij} ciertas funciones conocidas de las coordenadas generalizadas. Por constituir relaciones en general no integrables, dichas relaciones no permiten a disminuir a priori el número de coordenadas generalizadas. Ellas imponen restricciones a las variaciones virtuales de las coordenadas generalizadas en uso, de la forma

$$\sum_j A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (1.6)$$

Se supone también que las fuerzas de vínculos realizan trabajo total nulo en los desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos holonómicos originales, y con los adicionales (1.6) no holonómicos. Así todo lo dicho anteriormente vale, salvo en lo relativo a la independencia de las coordenadas. Por lo tanto se tiene

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

junto con

$$\sum_j A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p$$

de allí, utilizando p multiplicadores de *Lagrange*, λ_i , se obtiene

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K + \sum_i \lambda_i A_{ij} - Q_j \right) \delta q_j = 0,$$

y considerando la idea del uso de los multiplicadores de Lagrange, se deduce que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K + \sum_i \lambda_i A_{ij} = Q_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

que junto con

$$\sum_j A_{ij} \dot{q}_j + A_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p,$$

constituyen $n + p$ ecuaciones para las incógnitas, q_i , λ_i . Estas ecuaciones son las llamadas ecuaciones de Lagrange para el sistema que tiene vínculos del tipo considerado.

1.3.2. Fuerzas de vínculos

Una forma de determinar las fuerzas de vínculos la proporciona el método de los multiplicadores de Lagrange. Supongamos que tenemos un sistema con n grados de Libertad y que existen k restricciones holonómicas adicionales

$$f_r(q, t) = c_r, \quad r = 1, 2, \dots, k \quad (1.7)$$

que permitirían eliminar k variables y tener un sistema con $n - k$ grados de libertad. Sin embargo tal eliminación no la hacemos y debemos tener en mente que hay sólo $n - k$ variables independientes. La expresión

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L \right) \delta q_j = \sum_j Q_j^{NC} \delta q_j,$$

junto con las derivadas de 1.7

$$\sum_j \frac{\partial f_r}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \quad r = 1, 2, \dots, k$$

y utilizando k multiplicadores de Lagrange da λ_k dan

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L \right) \delta q_j &= \sum_j (Q_j^{NC} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q_j}) \delta q_j, \\ \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L - Q_j^{NC} - \sum_{r=1}^k \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q_j} \right) \delta q_j &= 0. \end{aligned}$$

La idea del uso de los multiplicadores de Lagrange, consiste en suponer que las primeras $n - k$ variables son independientes de modo que por esa razón los primeros $n - k$ paréntesis son nulos. Los siguientes k paréntesis pueden hacerse nulos eligiendo apropiadamente los k multiplicadores de Lagrange λ_r y en consecuencia son todos nulos. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L - Q_j^{NC} - \sum_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q_j} &= 0, \quad n \text{ ecuaciones} \\ f_r(q, t) &= c_r, \quad r = 1, 2, \dots, k, \quad k \text{ ecuaciones.} \\ q_j, \lambda_r, \quad n + k \text{ incógnitas.} \end{aligned}$$

Recuerde que los Q_j^{NC} son los coeficientes en

$$\delta W^{NC} = \sum_j Q_j^{NC} \delta q_j.$$

Además, la fuerzas responsables de los vínculos $f_r(q, t) = c_r$, $r = 1, 2, \dots, k$ realizarán trabajo. Estos vínculos $f_r(q, t)$ pueden ser consideradas coordenadas que al ser variadas realizarían trabajo llamado de vínculo

$$\delta W^{VINC} = \sum_r F_r \delta f_r,$$

que puede ser re escrita como

$$\begin{aligned} \delta W^{VINC} &= \sum_r F_r \delta f_r = \sum_r F_r \sum_j \frac{\partial f_r}{\partial q_j} \delta q_j, \\ &= \sum_j \left(\sum_r F_r \frac{\partial f_r}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j^{VINC} \delta q_j. \end{aligned}$$

O sea el término adicional que aparecería en las ecuaciones de Lagrange sería

$$Q_j^{VINC} = \sum_r F_r \frac{\partial f_r}{\partial q_j},$$

pero es

$$\sum_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q_j}.$$

Esto significa que $F_r = \lambda_r$ o sea el multiplicador de Lagrange λ_r es la fuerza de vínculo que mantiene la coordenada $f_r(q, t) = c_r$ constante.

EJEMPLO 1.3.1 *Considere un disco de masa m radio R que rueda sin deslizar con su plano vertical sobre un plano horizontal tirado de su centro con una fuerza horizontal constante F . Considere al sistema como de dos grados de libertad, x, θ , con una restricción adicional holonómica*

$$x - R\theta = c.$$

Solución. Consideramos que hay dos grados de libertad con Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\right),$$

y la restricción adicional ($x_G = x$)

$$x - R\theta = c,$$

o con un multiplicador de Lagrange λ

$$0 = \lambda\delta x - \lambda R\delta\theta,$$

además

$$\delta W^{NC} = F\delta x$$

luego se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}K - \frac{\partial}{\partial x}K &= F + \lambda, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}K - \frac{\partial}{\partial\theta}K &= -\lambda R,\end{aligned}$$

que se reducen a

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F + \lambda, \\ \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} &= -\lambda R, \\ \ddot{x} - R\ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

De donde se puede despejar

$$\ddot{\theta} = \frac{2F}{3mR}, \quad \ddot{x} = \frac{2F}{3m}, \quad \lambda = -\frac{F}{3}.$$

La fuerza de roce rodante es entonces $-\frac{F}{3}$.

EJEMPLO 1.3.2 Una barra de masa M y longitud $2a$ puede oscilar en un plano vertical en torno a un extremo fijo, en el origen $(x = 0, y = 0)$. El eje y vertical hacia arriba. Si se considera que hay un grado de libertad θ , el método de Lagrange da la ecuación de movimiento del péndulo. Pero estamos interesados en la reacción en la articulación en el extremo A . Considere entonces al sistema con tres grados de libertad

$$x_A, y_A, \theta,$$

con la restricción adicional

$$x_A = 0, \quad y_A = 0.$$

Solución. Las coordenadas de G son

$$\begin{aligned} x_G &= x_A + a \sin \theta, \\ y_G &= y_A - a \cos \theta, \end{aligned}$$

de aquí

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= \dot{x}_A + a\dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_G &= \dot{y}_A + a\dot{\theta} \sin \theta, \end{aligned}$$

luego el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + 2\dot{x}_A a\dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{y}_A a\dot{\theta} \sin \theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ma^2\dot{\theta}^2 - Mg(y_A - a \cos \theta).$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \delta x_A, \\ 0 &= \lambda_2 \delta x_B. \end{aligned}$$

Luego tendremos tres ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt}(\dot{x}_A + a\dot{\theta} \cos \theta) &= \lambda_1, \\ M \frac{d}{dt}(\dot{y}_A + a\dot{\theta} \sin \theta) + Mg &= \lambda_2, \\ M \frac{d}{dt}(\dot{x}_A a \cos \theta + \dot{y}_A a \sin \theta + a^2\dot{\theta} + \frac{1}{3}a^2\dot{\theta}) + Mga \sin \theta &= 0, \\ x_A &= 0, \\ y_A &= 0. \end{aligned}$$

Es fácil comprender que λ_1 y λ_2 son las componentes horizontal y vertical de la reacción en A .

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= M \frac{d^2}{dt^2} x_G, \\ \lambda_2 - Mg &= M \frac{d^2}{dt^2} y_G, \\ \frac{4}{3} a^2 \ddot{\theta} + ga \sin \theta &= 0.\end{aligned}$$



Función Lagrangiano

En la formulación presentada, las ecuaciones de Lagrange se han escrito en términos de la energía cinética K . Si algunas de las fuerzas que realizan trabajo son conservativas, es decir derivables de un potencial V , la expresión del trabajo virtual puede escribirse

$$\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j = \delta W^{NC} - \delta V = \sum_j Q_j^{NC} \delta q_j - \sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j,$$

siendo Q_j^{NC} la llamada fuerza generalizada “no conservativa”. Por lo tanto, para vínculos holonómicos, las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = Q_j^{NC}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (1.8)$$

siendo el lagrangiano del sistema

$$L(q, \dot{q}, t) = K(q, \dot{q}, t) - V(q, t).$$

Esta forma constituye la versión más conocida de las ecuaciones de Lagrange para un sistema con vínculos holonómicos. Se darán ejemplos en que el lagrangiano correcto no está dado por $K - V$. Naturalmente esos otros casos corresponden a sistemas en que las ecuaciones clásicas de movimiento no están dadas por las ecuaciones clásicas de Newton.

1.3.3. Condición de integrabilidad

Al realizar la derivada respecto al tiempo en el sistema de ecuaciones diferenciales (1.8), ellas pueden escribirse

$$\sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

esto es un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Estas ecuaciones requieren como condición para su integrabilidad que

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\} \neq 0, \quad (1.9)$$

que significa poder despejar las aceleraciones $\ddot{q}_i$ del conjunto de ecuaciones diferenciales de Lagrange. Quedan así, excluidos en esta formulación, los lagrangianos singulares o de primer orden en las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$.

1.4. Sistemas Conservativos

Por definición, un sistema será llamado conservativo, si $Q_j^{NC} = 0$, $\forall j$. Para ellos, las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.10)$$

que, escritas explícitamente son

$$\sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

lo que explica el significado de la condición de integrabilidad anterior. Es esencialmente la condición para poder despejar las aceleraciones del conjunto de ecuaciones de movimiento.

1.4.1. Momentos canónicos

Los momentos canónicos conjugados a las variable q_i , se define por

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

La inversión de las ecuaciones anteriores, para despejar las velocidades generalizadas en términos de los momentos canónicos (teorema de la función implícita), requiere la misma condición anterior (1.9), de modo que hay una segunda razón para excluir lagrangianos singulares de este formalismo.

1.4.2. El hamiltoniano del sistema

Transformación de Legendre

Considere como ejemplo, en una dimensión, una función convexa $f(x)$ (con $f''(x) > 0$). La transformada de Legendre de $f(x)$, se define por, (figura ??):

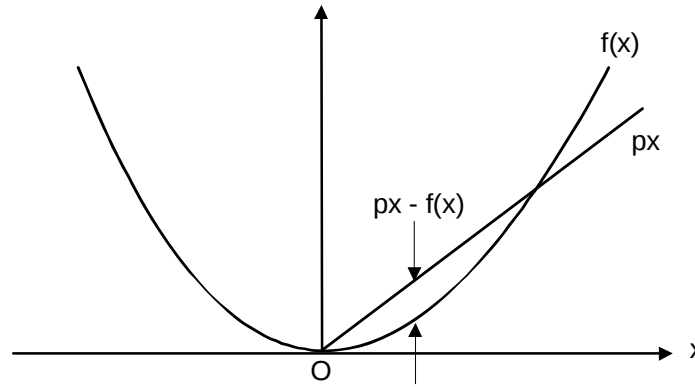


Figura 1.1: Transformación de Legendre

$$F(p) = \min(px - f(x)) .$$

Dado que el mínimo ocurre cuando la derivada respecto a x sea nula, entonces

$$F(p) = px - f(x) ,$$

siendo

$$p = f'(x) ,$$

que esencialmente genera a partir de una función de variable independiente x , una función de variable independiente p . (vea Arnold [2])

- Un ejemplo de la Termodinámica. En termodinámica se utilizan transformaciones de Legendre para generar funciones termodinámicas. Considere la energía interna $U = U(S, V)$, la temperatura $T = (\partial U / \partial S)_V$. La transformada de Legendre de la energía interna es la función de Helmholtz, función de el volumen y la temperatura:

$$A(V, T) = U - TS.$$

Función hamiltoniano

Dado un lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$, definimos su transformada de Legendre respecto a las velocidades generalizadas por

$$h = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

siendo

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Si las condiciones de invertibilidad se cumplen, podemos expresar las velocidades generalizadas en términos de los momentos. Así, eliminando las velocidades se tendría

$$H(q, p, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t),$$

el denominado hamiltoniano del sistema.

EJEMPLO 1.4.1 Si $g(p) = L_p f(x)$ indica la transformada de Legendre de $f(x)$, demuestre que:

$$L_x g(p) = f(x).$$

Solución. Si $g(p) = p\bar{x} - f(\bar{x})$, con $p = f'(\bar{x})$, entonces $g'(p) = \bar{x} + \bar{x}'(p) - f'(\bar{x})\bar{x}'(p) = \bar{x}(p)$. Luego $L_x g(p) = px - g(p)$ con $x = g'(p) = \bar{x}(p)$.



EJEMPLO 1.4.2 Dado un hamiltoniano $H(p)$, indique una forma de determinar un lagrangiano.

Solución.

$$L(\dot{q}) = \int (H')^{-1}(\dot{q}) d\dot{q}.$$

EJEMPLO 1.4.3 Si un sistema tiene como hamiltoniano $H = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$, determine el lagrangiano.

Solución.

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}},$$

note que este lagrangiano relativista, no está dado por $K - V$.

1.4.3. Teoremas de conservación

Escritas en términos de los momentos canónicos, las ecuaciones de Lagrange para un sistema conservativo son

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (1.11)$$

Conservación del momento canónico

► **TEOREMA 1.1**

Si el lagrangiano no contiene una coordenada (se dice que el lagrangiano es *cíclico* en esa coordenada), se conserva el correspondiente momento canónico conjugado, es decir

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \implies p_i = \text{constante}$$

Conservación del hamiltoniano

De la definición del hamiltoniano y de las ecuaciones de Lagrange (1.11), se puede obtener

$$dH = \sum \dot{q}_j dp_j - \sum \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (1.12)$$

de donde se deducen importantes ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_j} &= -\dot{p}_j, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Además, si (1.12) se divide por dt , se obtiene

$$\frac{dH}{dt} = \sum \dot{q}_j \dot{p}_j - \sum \dot{p}_j \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t},$$

es decir

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

de aquí sigue un teorema de conservación:

► **TEOREMA 1.2**

Si el lagrangiano no contiene el tiempo en forma explícita, se conserva el hamiltoniano. Es decir, de la última ecuación se desprende

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies H = \text{constante}.\tag{1.15}$$

1.4.4. Hamiltoniano y energía

Analizaremos la relación entre hamiltoniano y energía del sistema. Para sistemas mecánicos clásicos, donde $L = K - V$, si el potencial no depende de las velocidades, se tiene

$$H = \sum \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - K + V,$$

luego la condición suficiente para que la energía y el hamiltoniano sean iguales es que

$$\sum \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2K.$$

De acuerdo al teorema de Euler de las funciones homogéneas, las funciones homogéneas de grado 2 cumplen precisamente la última condición. Se señala un importante teorema cuya demostración se deja como ejercicio.

- **Definición .** Se define una función homogénea de grado p en n variables, cuando ella cumple:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

siendo $\lambda \neq 0$. De aquí, derivando respecto a λ y luego haciendo $\lambda = 1$, se deduce que:

► **TEOREMA 1.3**

Si f es una función homogénea de grado p , entonces:

$$pf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i.$$

Con todos los antecedentes considerados, si la energía cinética es una función homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas, entonces el hamiltoniano del sistema coincide con la energía del sistema. Es simple ir al fondo y responder la pregunta. ¿Cuándo ocurre eso? Si se analiza la transformación de coordenadas generalizadas a posiciones (1.1), la velocidad estará dada por

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

de donde es evidente que la energía cinética resultará homogénea de grado dos en las velocidades generalizadas cuando $\partial \vec{r}_i / \partial t = 0, \forall i$, es decir cuando los vínculos sean independientes del tiempo. Todo lo señalado se puede resumir en:

► **TEOREMA 1.4**

Si un sistema tiene sus vínculos independientes del tiempo, entonces $H = E$. (Pero no es necesariamente constante)

1.4.5. Fuerzas dependientes de la velocidad

Para ciertos casos, donde la fuerza generalizada dependiente de la velocidad es de la forma

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j},$$

para un cierto $V(q, \dot{q}, t)$, es posible definir el lagrangiano $L = K - V$, de modo que las ecuaciones correctas de movimiento son las ecuaciones de Lagrange.

Un ejemplo notable lo constituye la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ donde los campos magnéticos y eléctricos satisfacen

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t,$$

y

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Demostraremos que

$$F_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j}, \quad \text{con } V = q\Phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}.$$

En efecto, considerando que los $\dot{q}$ están sólo en la velocidad de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} &= -qA_j, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} &= -q \frac{d}{dt} A_j, \end{aligned}$$

por otro lado

$$\frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} = q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi - q\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A},$$

de modo que se tiene

$$\begin{aligned} F_j &= -q \frac{d}{dt} A_j - q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi + q\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A} \\ &= -q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi - q \frac{\partial}{\partial t} A_j - q\vec{v} \cdot \nabla A_j + q\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A} \end{aligned}$$

Pero la componente j de la fuerza de Lorentz es

$$F_j = -q \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi - q \frac{\partial}{\partial t} A_j + q \left(\vec{v} \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) \right)_j.$$

O sea son iguales pues

$$\left(\vec{v} \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) \right)_j = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{A} - \vec{v} \cdot \nabla A_j.$$

Podemos notar además que si la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\Phi + q\vec{v} \cdot \vec{A},$$

entonces el momento canónico p_j estará dado por

$$p_j = m\dot{q}_j + qA_j.$$

1.4.6. Sistema no inercial

Si se analiza la dinámica respecto a un sistema inercial cuyo origen está fijo, pero que es no inercial porque rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante, se tiene que la aceleración absoluta $\vec{a}_{abs}$ y la velocidad absoluta son

$$\begin{aligned}\vec{a}_{abs} &= 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}, \\ \vec{v}_{abs} &= \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v},\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{2}v^2 = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \left(\frac{\vec{f}}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}.$$

Multiplicando por la masa y llamando $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K = (\vec{f} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}.$$

El trabajo virtual realizado por las fuerzas es

$$\delta W = \vec{f} \cdot \delta \vec{r} = \sum_j \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K = Q_j - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

Si la fuerza aplicada es en parte conservativa derivable de un potencial V y haciendo

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V,$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}.$$

1.4.7. Ecuación de Lagrange en un sistema que rota

Para un sistema que sólo rota con velocidad angular constante respecto a un sistema inercial, las ecuaciones de Lagrange para una partícula son

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}.$$

Donde $\vec{r}$, $\vec{v}$ son la posición y la velocidad relativas, que dependerán de las coordenadas generalizadas que se utilicen.

Ejemplos

- Partícula bajo la acción de la gravedad solamente, relativo a la Tierra en un punto de latitud λ . Los ejes fijos a la Tierra en un punto de latitud λ , son x tangente a la superficie terrestre y hacia el Sur, y tangente a la superficie terrestre y hacia el Este, z vertical.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \hat{i} + \omega \sin \lambda \hat{j},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg,$$

$$2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \hat{i} = -2m\dot{y}\omega \sin \lambda$$

$$2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \hat{j} = 2m(\dot{z}\omega \cos \lambda + \dot{x}\omega \sin \lambda),$$

$$2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \hat{k} = -2m\dot{y}\omega \cos \lambda,$$

luego las ecuaciones de Lagrange son

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega \sin \lambda$$

$$\ddot{y} = -2(\dot{z}\omega \cos \lambda + \dot{x}\omega \sin \lambda)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\dot{y}\omega \cos \lambda.$$

- Péndulo esférico con. El hilo de longitud l tiene un extremo fijo en el origen. El ángulo con la vertical es θ y el ángulo acimutal es ϕ .

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= -\omega \cos \lambda \hat{i} + \omega \sin \lambda \hat{j}, \\ z &= -l \cos \theta, \\ x &= l \sin \theta \cos \phi, \\ y &= l \sin \theta \sin \phi, \\ L &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta,\end{aligned}$$

las ecuaciones que resultan son

$$\begin{aligned}ml^2\ddot{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta\right) &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt}m(l^2\dot{\phi} \sin^2 \theta) &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\hat{\theta}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r\hat{\phi} \sin \theta,$$

luego, con bastante álgebra

$$\begin{aligned}l\ddot{\theta} - l\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + g \sin \theta &= -2\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \hat{\theta} \\ &= 2l\omega\dot{\phi} \sin \theta (\cos \lambda \cos \phi \sin \theta + \sin \lambda \cos \theta), \\ \frac{d}{dt}(l\dot{\phi} \sin^2 \theta) &= -2 \sin \theta \vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \hat{\phi} \\ &= -2l\omega\dot{\theta} \sin \theta (\cos \lambda \cos \phi \sin \theta + \sin \lambda \cos \theta),\end{aligned}$$

Si se elimina el lado derecho, se obtiene un importante resultado

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l}\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi}\frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin^2 \theta) &= 0, \\ \ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi}\ddot{\phi} \sin^2 \theta + \dot{\phi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l} \cos \theta + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta\right) &= 0,\end{aligned}$$

o sea

$$E = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta.$$

Verifiquemos esto directamente. Sabemos que

$$m\vec{a} = -mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v},$$

El término $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ puede ser considerado una fuerza, y por ser perpendicular a la velocidad no realiza trabajo. En efecto multiplicando $\cdot d\vec{r}$

$$\begin{aligned} md\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= -mgdz - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot d\vec{r} \\ d\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgz\right) &= -2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{r} = -2m\vec{\omega} \cdot \vec{v} \times \vec{v} dt = 0. \end{aligned}$$

A pesar de la rotación terrestre,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E = \text{constante.}$$

Verifiquemos también en coordenadas cartesianas. Puede establecerse que, cuerda de longitud L fija al punto $(0, 0, L)$, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{x}{mL}T + 2\omega\dot{y}\sin\lambda, \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{mL}T - 2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda), \\ \ddot{z} &= \frac{L-z}{mL}T - g + 2\omega\dot{y}\cos\lambda. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \ddot{x}dx &= -\frac{xdx}{mL}T + 2\omega\dot{y}\sin\lambda dx, \\ \ddot{y}dy &= -\frac{ydy}{mL}T - 2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)dy, \\ \ddot{z}dz &= \frac{L-z}{mL}Tdz - gdz + 2\omega\dot{y}\cos\lambda dz. \end{aligned}$$

Sumando todo los términos con T se cancelan

$$\begin{aligned} \ddot{x}dx + \ddot{y}dy + \ddot{z}dz &= d\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2\right) \\ &= -gdz + 2\omega\dot{y}\sin\lambda dx \\ &\quad - 2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)dy + 2\omega\dot{y}\cos\lambda dz. \end{aligned}$$

Veamos el término con ω .

$$\begin{aligned} \dot{y} \sin \lambda dx - (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) dy + \dot{y} \cos \lambda dz &= \\ (\dot{y} dx - \dot{x} dy) \sin \lambda - (\dot{z} dy - \dot{y} dz) \cos \lambda &= \\ ((\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y}) \sin \lambda - (\dot{z}\dot{y} - \dot{y}\dot{z}) \cos \lambda) dt &= 0. \end{aligned}$$

O sea, hemos probado que

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = E = \text{constante}.$$

1.4.8. Teorema de Noether

Considere transformaciones continuas de las coordenadas generalizadas dependientes de un parámetro real s tales que para $s = 0$ se trata de la transformación identidad, es decir

$$q_j \rightarrow Q_j = Q_j(q, s), \quad \text{siendo } q_j = Q_j(q, 0).$$

Aquí q representa el conjunto completo de coordenadas generalizadas. Si el lagrangiano de un sistema autónomo $L(q, \dot{q}, t)$ es invariante bajo esa transformación, es decir si

$$L(Q(q, s), \dot{Q}(q, s), t)$$

no depende de s , entonces se tiene una cantidad conservada, o integral del movimiento. En forma más precisa

► **TEOREMA 1.5 (NOETHER)**

Si el Lagrangiano es invariante a la transformación

$$q_j \rightarrow Q_j(q, s) \text{ con } q_j = Q_j(q, 0),$$

o sea

$$\frac{d}{ds} L(Q(q, s), \dot{Q}(q, s)) = 0$$

entonces

$$I(q, \dot{q}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{dQ_j(q, s)}{ds} \Big|_{s=0} = \sum_j p_j \frac{dQ_j(q, s)}{ds} \Big|_{s=0} = \text{constante}. \quad (1.16)$$

DEMOSTRACION 1

La demostración (ver [7], pag. 102) sigue de

$$0 = \frac{d}{ds} L(Q(q, s), \dot{Q}(q, s)),$$

o sea

$$0 = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{d\dot{Q}_j}{ds} + \sum \frac{\partial L}{\partial Q_j} \frac{dQ_j}{ds},$$

donde

$$\frac{d\dot{Q}_j}{ds} = \frac{d}{dt} \frac{dQ_j}{ds},$$

y al hacer $s = 0$ tendremos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial Q_j} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

de modo que se obtiene

$$0 = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{dQ_j}{ds} + \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{dQ_j}{ds} \Big|_{s=0},$$

o bien

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{dQ_j}{ds} \Big|_{s=0} = 0,$$

que prueba el teorema.

1.4.9. Ejemplos

EJEMPLO 1.4.4 Si el lagrangiano de un sistema es $L = L(\dot{q})$ es dependiente de las velocidades generalizadas solamente, entonces el es obviamente invariable, en el sentido considerado más arriba, ante la transformación

$$Q_j = q_j + sa_j,$$

siendo a_j constantes arbitrarias. Entonces se conserva

$$I(q, \dot{q}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} a_j,$$

y como los a_j son arbitrarios, deben conservarse independientemente todos los momentos canónicos

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

EJEMPLO 1.4.5 Si el lagrangiano $L = L(\dot{q}, q)$ no depende de una de las coordenadas generalizadas q_k por ejemplo, o sea que es invariante bajo la transformación

$$Q_j = q_j + s\delta_{jk},$$

entonces se conserva el momento canónico p_k , puesto que

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{ds} Q_j(q, s) \Big|_{s=0} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta_{j,k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k.$$

EJEMPLO 1.4.6 Si un lagrangiano $L(\vec{v}, \vec{r})$ es invariante bajo una rotación infinitesimal

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\theta \hat{n} \times \vec{r},$$

entonces se conserva

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot (\hat{n} \times \vec{r}),$$

o sea la cantidad conservada es

$$\vec{r} \times \vec{p} \cdot \hat{n},$$

que es la componente $\hat{n}$ del momentum angular.

EJEMPLO 1.4.7 Suponga un sistema de dos grados de libertad con Lagrangiano invariante a la transformación (una rotación finita)

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta \\ Q_2 &= -q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} Q_1(q, \theta) \Big|_{\theta=0} &= q_2, \\ \frac{d}{d\theta} Q_2(q, \theta) \Big|_{\theta=0} &= -q_1, \end{aligned}$$

por lo tanto se conserva una componente del momentum angular

$$L_3 = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

Un Lagrangiano con tal invariancia sería algo como

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1^2 + q_2^2).$$

EJEMPLO 1.4.8 *Suponga el Lagrangiano*

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_2 - q_1),$$

que es obviamente invariante a la transformación

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 + s, \\ Q_2 &= q_2 + s, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\theta} Q_1(q, s) \right|_{s=0} &= 1, \\ \left. \frac{d}{d\theta} Q_2(q, s) \right|_{s=0} &= 1, \end{aligned}$$

luego se conserva

$$p_1 + p_2.$$

Constatemos esto. Las ecuaciones de Lagrange serían

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_1 &= -\frac{\partial}{\partial q_1} V(q_2 - q_1) = V'(q_2 - q_1), \\ \frac{d}{dt} p_2 &= -\frac{\partial}{\partial q_2} V(q_2 - q_1) = -V'(q_2 - q_1). \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0.$$

En realidad, físicamente se trata de dos cuerpos moviéndose sólo con una fuerza de interacción, por lo tanto el momentum total es conservado.

EJEMPLO 1.4.9 *Similarmente el Lagrangiano*

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

es invariante bajo la rotación infinitesimal

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{R}_i = \vec{r}_i + \theta \hat{n} \times \vec{r}_i,$$

con $\hat{n}$ arbitrario. Además

$$\left. \frac{d}{d\theta} \vec{R}_i \right|_{\theta=0} = \hat{n} \times \vec{r}_i,$$

luego se conserva

$$L_n = \sum_i \vec{p}_i \cdot \hat{n} \times \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \cdot \hat{n},$$

y como $\hat{n}$ es arbitrario, se conserva

$$\vec{L}_0 = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.$$

EJEMPLO 1.4.10 *Mismo resultado se obtiene bajo invariancia a la rotación finita*

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{R}_i = \vec{r}_i + \sin \theta \hat{n} \times \vec{r}_i + (1 - \cos \theta) \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}_i),$$

con $\hat{n}$ arbitrario porque igual resulta

$$\left. \frac{d}{d\theta} \vec{R}_i \right|_{\theta=0} = \hat{n} \times \vec{r}_i,$$

EJEMPLO 1.4.11 *Sea $Q_j = q_j + \int_0^s q_i(t) dt$*

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{q}_j + c \ddot{q}_i)^2 - V(q_j + c \dot{q}_i)$$

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

1.5. Las ecuaciones de Hamilton

Cuando se estableció el teorema de conservación del Hamiltoniano, también se probaron las $2n$ ecuaciones de Hamilton (1.13) y (1.14) para las $2n$ variables q, p . Para un sistema de n grados de libertad, el espacio de fase se define como el espacio de $2n$ dimensiones de las coordenadas y momentos canónicos (q, p) . El estado para un tiempo t , (q, p) de tal sistema queda entonces representado por un punto en dicho espacio de fase. La evolución en el tiempo del sistema, determinada por las ecuaciones de Hamilton, es representada entonces por un punto en movimiento en el correspondiente espacio de fase. Podemos distinguir los sistemas *autónomos* donde H no depende del tiempo en forma explícita y es por lo tanto constante de movimiento (en los sistemas conservativos). En estos casos que consideraremos primero, la órbita que describe la evolución del sistema en el espacio de fase, está confinada en el subespacio $H(q, p) = E = \text{constante}$.

1.5.1. Sistemas autónomos

Para estos sistemas, conservativos, $H = H(q, p) = E$, las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad y \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

determinan la evolución del sistema, confinado al subespacio de energía constante. Más en general tal sistema de ecuaciones podría escribirse como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu),$$

donde $\mathbf{x} = [q, p]^T$ es vector (o matriz columna) y μ representa uno o más parámetros.

1.5.2. Puntos críticos o de equilibrio

En general, las órbitas en el espacio de fase no pueden cortarse debido a que entonces, en esos puntos tomados como condición inicial del sistema, la evolución futura del sistema no está determinada unívocamente. La excepción la constituyen los puntos de equilibrio donde por definición son cero todas las derivadas $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$. Esto corresponde a sistemas que están en estados que no evolucionan en el tiempo. En estos casos, la evolución futura dependerá de perturbaciones iniciales aplicadas al sistema. Los puntos críticos corresponde

a estados donde las velocidades son cero $\dot{q} = 0$ y también las aceleraciones son cero $\dot{p} = 0$. En un lenguaje generalizado, los puntos críticos $\mathbf{x}_0$ satisfacen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu) = 0.$$

Estabilidad de los puntos críticos

Una clasificación más detallada de las características de los puntos críticos se desprenderá del análisis que se realiza a continuación, para un sistema autónomo con un grado de libertad, o espacio de fase de dos dimensiones, que puedan linealizarse en el sentido explicado a continuación.

Linealización

Supongamos un sistema autónomo correspondiente a un grado de libertad, es decir con un espacio de fase de dos dimensiones

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad \text{y} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}. \quad (1.17)$$

Si además hacemos un corrimiento del origen del espacio de fase de modo que el punto crítico bajo estudio corresponde al origen, $q = 0$, $p = 0$, el hamiltoniano puede expandirse en torno al origen de modo que se tendrá hasta primer orden

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \simeq \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p \partial q} \right|_{0,0} q + \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p^2} \right|_{0,0} p, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \simeq -\left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q^2} \right|_{0,0} q - \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q \partial p} \right|_{0,0} p, \end{aligned}$$

y si solo se mantienen los términos lineales, el sistema autónomo es, en la vecindad del punto crítico

$$\dot{q} = H_{12}q + H_{22}p,$$

$$\dot{p} = -H_{11}q - H_{12}p,$$

que puede ser escrito como sistema autónomo lineal

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{12} & H_{22} \\ -H_{11} & -H_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

La notación distingue las derivadas parciales con índices: $1 = q$, $2 = p$. En el caso en que la parte lineal sea nula, el problema es más complejo y no será tratado aquí. Note además que para el caso considerado $H_{12} = H_{21}$. Como veremos, una caracterización de los puntos críticos de estos sistemas que pueden ser aproximados por un sistema lineal en la vecindad del punto de equilibrio, o de alguno de ellos, depende crucialmente de los valores propios de esa matriz involucrada en la última relación. Para no perder generalidad supondremos solamente que sus elementos son reales, a, b, c y d . Además cambiaremos a notación $x = q$, $y = p$ de modo que el sistema a considerar es:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Los valores propios λ de la matriz A , están dados por las raíces de la ecuación de segundo grado

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0,$$

que llamaremos λ_1, λ_2 . Supongamos que los valores propios son λ_1 y λ_2 y sean

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

los vectores propios. Suponga además que la solución es exponencial de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

al sustituir en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \lambda_1 c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \right) \\ &= \lambda_1 c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

se satisface idénticamente. Como está bien establecido, se pueden distinguir los siguientes casos cuando $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

- Caso real 1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, nodo asintóticamente estable.
- Caso real 2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, nodo inestable.
- Caso real 3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, punto montura, inestable.

- Caso real 4. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, nodo, asintóticamente estable.
- Caso real 5. $0 < \lambda_1 = \lambda_2$, nodo, inestable.
- Caso complejo 1. $Re(\lambda) < 0$, espiral, asintóticamente estable.
- Caso complejo 2. $0 < Re(\lambda)$, espiral, inestable.
- Caso complejo 2. $Re(\lambda) = 0$, centro, estable.

Valores propios reales

Los tres casos reales pueden analizarse dentro del mismo contexto. Al suponer soluciones particulares de la forma $\exp(\lambda t)$, se encuentra que la solución general es de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \quad (1.20)$$

donde los vectores de componentes α, β son los vectores propios asociados a los valores propios λ_1 y λ_2 . Enseguida, para esquematizar la conducta cerca del punto crítico, $x, y \rightarrow 0$, es necesario ver que término predomina y en qué tiempo ocurre eso. Por ejemplo en el caso real 1, predomina el término con λ_1 cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir el sistema, a la larga, se aproxima asintóticamente al punto crítico por la dirección de la recta definida por el correspondiente vector propio. Similarmente, en el caso real 3, si $t \rightarrow \infty$ el sistema puede aproximarse asintóticamente al punto crítico por la recta asociada al valor propio negativo. En cambio, puede alejarse a medida $t \rightarrow \infty$ por la recta asociada al valor propio positivo. Para cualquier condición inicial fuera de la recta asociada al valor propio negativo, predominará a la larga, la parte asociada al positivo, ver figura (1.2).

Valores propios complejos

Los valores propios complejos, de la forma $\lambda = u \pm iv$, merecen otra forma de análisis. En este caso, es conveniente reducir el problema a lo que se denomina su “*forma canónica*”. Es conocido que todo problema bidimensional

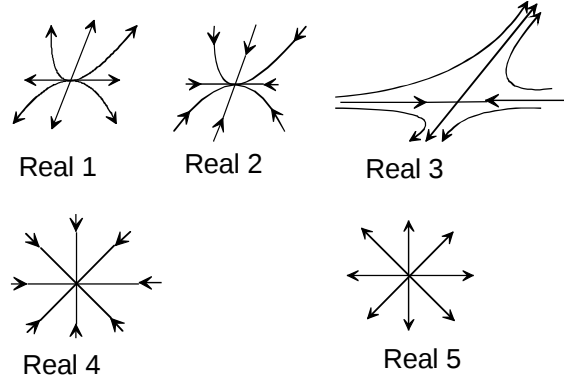


Figura 1.2: Autovalores reales

lineal con valores propios complejos, puede ser transformado mediante un cambio de coordenadas a su llamada forma canónica

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

siendo en este caso los autovalores de la matriz A , $\lambda = m \pm in$. Si además se utilizan coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, las ecuaciones se desacoplan

$$\frac{dr}{dt} = mr, \quad \frac{d\theta}{dt} = -n, \quad (1.22)$$

con solución

$$r = r_0 e^{mt}, \quad \theta = \theta_0 - nt, \quad (1.23)$$

por lo cual, la solución general de (1.21) está dada por:

$$x(t) = r_0 e^{mt} \cos(\theta_0 - nt), \quad y(t) = r_0 e^{mt} \sin(\theta_0 - nt), \quad (1.24)$$

por lo cual, las trayectorias o curvas en el espacio de fase son espirales que divergen si $\text{Re}(\lambda) = m > 0$, espirales que convergen si $\text{Re}(\lambda) = m < 0$ y círculos si $m = 0$. Así se distinguen los tres casos, ver figura (??)

- Caso complejo 1. $\text{Re}(\lambda) = m < 0$, espiral, asintóticamente estable.
- Caso complejo 2. $\text{Re}(\lambda) = m$, espiral, inestable.
- Caso complejo 3. $\text{Re}(\lambda) = m$, centro, estable.

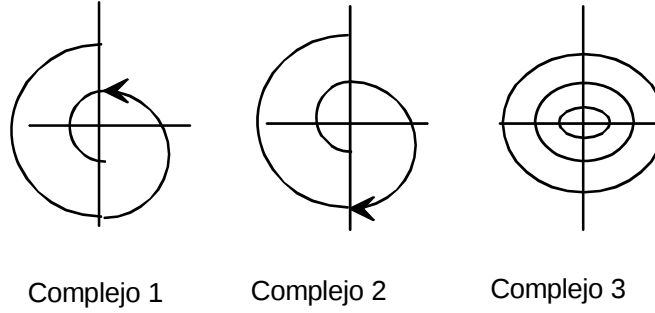


Figura 1.3: Autovalores complejos

EJEMPLO 1.5.1 *Reduzca un sistema lineal de dos dimensiones a su forma canónica.*

Solución. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde la matriz tiene valores propios complejo, es decir de

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0,$$

se deduce

$$\lambda = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}i\sqrt{-(a-d)^2 - 4cb} = m \pm in.$$

Considere ahora la siguiente transformación lineal

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{m-a}{in} & -\frac{b}{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -i\frac{m-a}{b} & -\frac{i}{b}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{m-a}{in} & -\frac{b}{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{m-a}{in} & -\frac{b}{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{m-a}{in} & -\frac{b}{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -i\frac{m-a}{b} & -\frac{i}{b}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

que prueba el teorema. Usted podría preguntarse ¿cómo es que se adivinó la transformación lineal? En realidad, la solución del sistema original nos orienta al respecto. Hagamos $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$, luego debe tenerse

$$\begin{aligned}
 \lambda A &= aA + bB, \\
 \lambda B &= cA + dB,
 \end{aligned}$$

se obtienen los autovalores

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2 = m \pm in,$$

y la razón de amplitudes

$$\frac{B}{A} = \frac{\lambda - a}{b},$$

de donde la solución es

$$\begin{aligned}
 x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \\
 y &= \frac{\lambda_1 - a}{b} A_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a}{b} A_2 e^{\lambda_2 t} \\
 &= \frac{m-a}{b} (A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}) + i \frac{n}{b} (A_1 e^{\lambda_1 t} - A_2 e^{\lambda_2 t}),
 \end{aligned}$$

y hacer

$$\begin{aligned}
 u &= i(A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}), \\
 v &= -(A_1 e^{\lambda_1 t} - A_2 e^{\lambda_2 t}),
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 x &= -iu \\
 y &= -i \frac{m-a}{b} u - i \frac{n}{b} v.
 \end{aligned}$$



1.5.3. Algunos retratos de sistemas

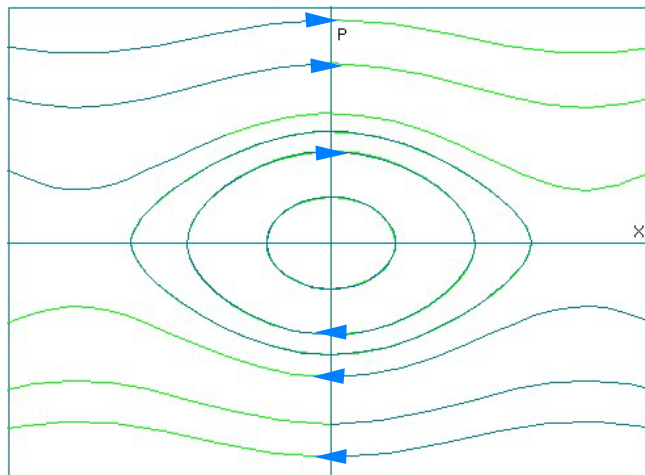
El mínimo de energía potencial de un péndulo simple con ángulo $\theta = x$ ocurre en $x = 0$. El Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} - mgL \cos x,$$

y las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -mgL \sin x,$$

sistema que tiene el retrato:



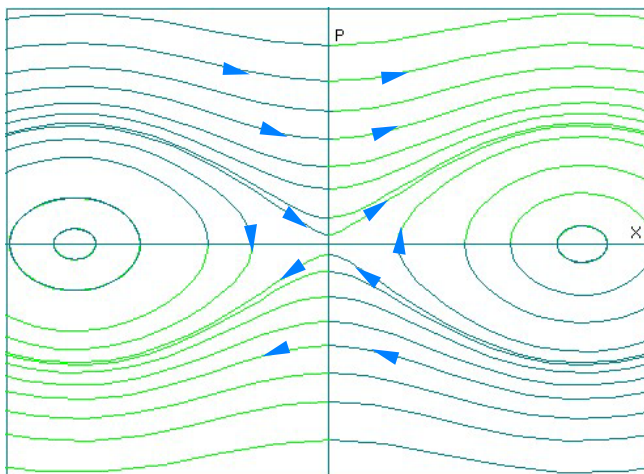
El máximo de energía potencial de un péndulo simple con ángulo $\theta = x$ ocurre en $x = \pi$. Si el Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgL \cos x,$$

y las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -mgL \sin x,$$

sistema que tiene el retrato:



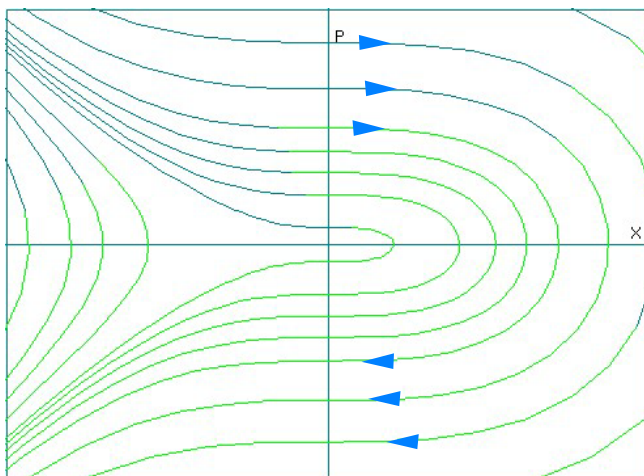
Un sistema que no puede ser linealizado sería el siguiente

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{3}kx^3,$$

que tiene como ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -kx^2,\end{aligned}$$

y un punto crítico en $x = 0, p = 0$. El retrato de esta sistema (obtenido mediante el programa retratos.exe que se acompaña) es



1.5.4. Bifurcaciones

Como una regla la conducta dinámica de un sistema es dependiente de algunos parámetros. Nos limitaremos a describir aspectos esenciales de la conducta de sistemas que tienen un parámetro que llamaremos μ . Este parámetro también es conocido como parámetro de control. Puede ocurrir que para valores pequeños del parámetro el sistema presente una configuración de equilibrio estable. Si el parámetro se incrementa, tal situación de equilibrio puede tornarse inestable y dar lugar a dos situaciones de equilibrio distintas. Tal fenómeno se conoce como bifurcación. Supongamos que la dinámica esta dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu), \quad (1.25)$$

y que la situación de equilibrio o punto x_0 crítico satisface

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mu) = 0.$$

Esto es una determinación implícita del punto de equilibrio

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mu).$$

Un teorema sobre funciones implícitas requiere que la matriz de Jacobi

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

sea no singular. Esto es que el determinante de M_{ij} no se anule. En efecto si linealizamos 1.25 en torno a la posición de equilibrio

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y},$$

entonces

$$\dot{y}_i = F_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = F_i(\mathbf{x}_0) + \sum_j y_j \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_0,$$

de donde es posible despejar los y_j si

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) \neq 0.$$

1.5.5. Estabilidad de un punto de equilibrio

Supongamos que se tiene un punto de equilibrio caracterizado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mu) = 0,$$

Si el sistema se coloca en un punto del espacio de fase cercano al punto de equilibrio, la evolución puede ser hacia el punto de equilibrio. Si eso es así tal punto de equilibrio se denomina estable. Para ver bajo que condiciones ocurre esto, hagamos una expansión

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y},$$

entonces

$$\dot{y}_i = F_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = F_i(\mathbf{x}_0) + \sum_j y_j \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_0,$$

o en lenguaje matricial

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}_0 \mathbf{y}$$

si se buscan soluciones exponenciales

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} e^{-pt},$$

resulta

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{a} = -p \mathbf{a}.$$

Claramente el punto de equilibrio es estable si $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$ esto es si p es real y positivo. Esto es el punto de equilibrio es estable si los valores propios de la matriz Jacobiano

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

son negativos.

1.6. Bifurcaciones

1.6.1. La bifurcación de Saddle point

El sistema dinámico gobernado por

$$\dot{x} = F = \mu - x^2,$$

tiene un punto de equilibrio o punto crítico cuando

$$\mu - x_0^2 = 0,$$

pero x_0 no existe si μ es negativo. Luego el número de puntos críticos pasa de 0 a 2, cuando μ pasa de negativo a positivo.

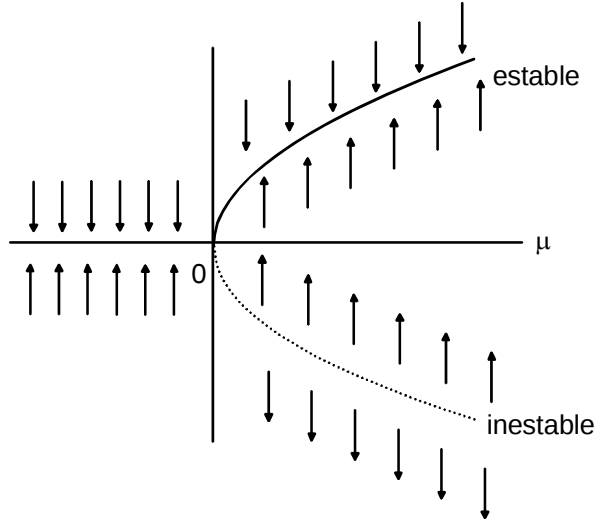


Figura 1.4:

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

La estabilidad de los puntos críticos

$$x_0 = \pm\sqrt{\mu},$$

puede analizarse haciendo una perturbación

$$x = \pm\sqrt{\mu} + \delta x,$$

con δx pequeño. Resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\pm} &= \mu - (\pm\sqrt{\mu} + \delta x)^2 \\ &= \mu - (\sqrt{\mu} \pm \delta x)^2 \\ &= \mp 2\sqrt{\mu}\delta x - (\delta x)^2 \\ &\simeq \mp 2\sqrt{\mu}\delta x \end{aligned}$$

O sea, para el signo $+$ una desviación positiva δx ocasiona una disminución de x , esto es estabilidad. Para el signo $-$ una desviación positiva δx causa una desviación positiva de x , esto es inestabilidad.

1.6.2. Análisis de estabilidad más en general

Considere el sistema dinámico

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

donde el punto crítico satisface

$$F(x_0, \mu) = 0.$$

Expandamos para una vecindad del punto de equilibrio

$$x = x_0 + \delta x,$$

resultando

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x_0 + \delta x, \mu) \simeq F(x_0, \mu) + \delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right\}_{x_0} \\ \dot{x} &= \delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right\}_{x_0}.\end{aligned}$$

Claramente estabilidad significa que $\dot{x}$ y δx tienen distinto signo, esto es $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right\}_{x_0} < 0$ mientras que inestabilidad significa que $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right\}_{x_0} > 0$. O sea el punto crítico es estable si

$$M = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right\}_{x_0} < 0,$$

y es inestable si

$$M = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right\}_{x_0} > 0.$$

1.6.3. La bifurcación de pitchfork

El sistema dinámico gobernado por

$$\dot{x} = F = \mu x - x^3,$$

tiene un punto de equilibrio o crítico cuando

$$\mu x_0 - x_0^3 = 0,$$

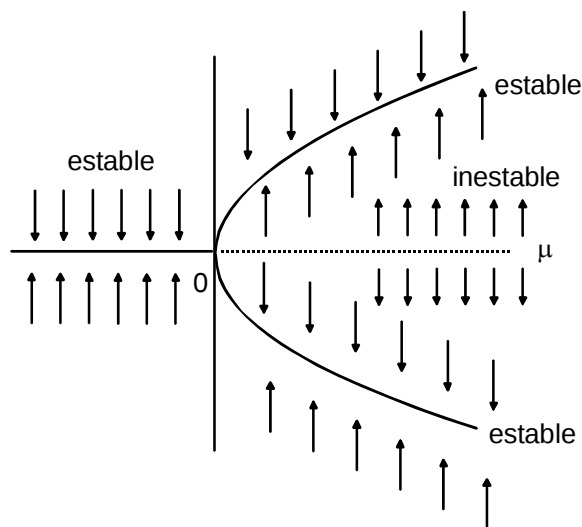
Hay tres puntos críticos $x_0 = 0$, para todo valor de μ , $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$ si $\mu > 0$. El número de puntos críticos pasa de 1 a 3 cuando μ pasa de negativo a positivo. La matriz de Jacobi es

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} = \mu - 3x^2$$

Estabilidad

$$M(0) = \mu \text{ estable si } \mu < 0$$

$$M(\pm\sqrt{\mu}) = \mu - 3\mu = -2\mu \text{ estable si } \mu > 0$$



1.6.4. La bifurcación de Hopf

Una bifurcación de Hopf genera un ciclo límite partiendo de un punto fijo. Considere el sistema de dos dimensiones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) = F_1, \\ \dot{y} &= x + y(\mu - (x^2 + y^2)) = F_2, \end{aligned}$$

la matriz Jacobiano es

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \mu - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

El punto fijo corresponde a

$$\begin{aligned} -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) &= 0, \\ x + y(\mu - (x^2 + y^2)) &= 0, \end{aligned}$$

una solución es el punto $(0, 0)$. Para ese punto crítico la matriz de Jacobi se reduce a

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix},$$

con valores propios

$$\begin{aligned} \mu - i, \\ \mu + i, \end{aligned}$$

recordando caso complejo 1 que $\mu < 0$, espiral, asintóticamente estable. Caso complejo 2 $\mu > 0$, espiral, inestable. Caso complejo 3 $\mu = 0$, centro, estable.

Cambiando a coordenadas polares

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - r^2), \\ \dot{y} &= x + y(\mu - r^2), \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi &= -r \sin \phi + \mu r \cos \phi - r^3 \cos \phi, \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi &= r \cos \phi + \mu r \sin \phi - r^3 \sin \phi, \end{aligned}$$

que se desacoplan a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3, \\ \dot{\phi} &= 1, \end{aligned} \tag{1.26}$$

de modo que

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= r \sin t,\end{aligned}$$

La solución de la ecuación radial 1.26 puede ser obtenida y es

$$r(t) = \frac{1}{1 + e^{-2\mu t} C_1 \mu} \sqrt{(1 + e^{-2\mu t} C_1 \mu) \mu}, r_\infty \rightarrow \sqrt{\mu}$$

que tiende a un ciclo límite de radio $\sqrt{\mu}$ cuando μ es positivo. En el gráfico que sigue se ilustra la convergencia al ciclo límite para $\mu = 0,5$, $r_\infty = \sqrt{0,5} =$

0,71 partiendo de valores $r(0) = 1$ y $r(0) = 0,4$.

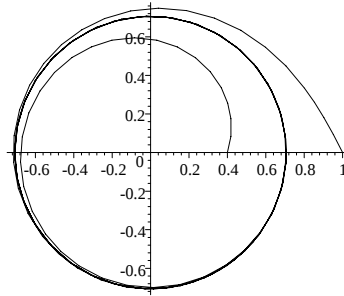


Figura 1.5:

1.6.5. Análisis de estabilidad

Daremos algunos ejemplos donde se analizan y caracterizan puntos de equilibrio.

EJEMPLO 1.6.1 (*Adaptado de Fetter*) Considere una partícula de masa m que se mueve vinculada a un alambre liso en forma de circunferencia de radio R y cuyo plano es vertical. El alambre rota en torno a su diámetro vertical con velocidad angular constante Ω . Usando el ángulo θ entre el radio que contiene la partícula y la vertical descendente. (a) Encuentre el lagrangiano,

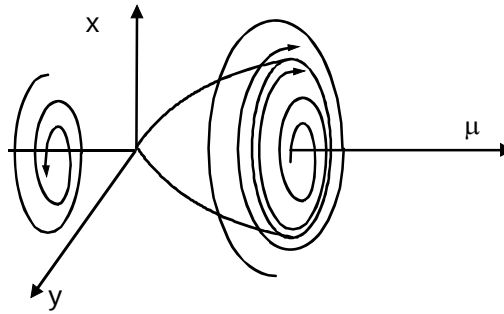
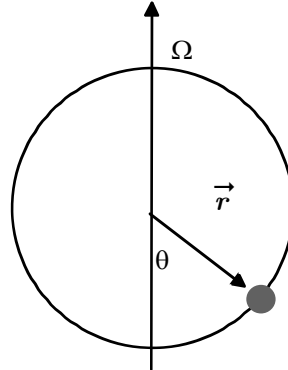


Figura 1.6:

escriba la ecuación de movimiento y su primera integral. (b) Determine todas las posiciones de equilibrio (en realidad posiciones estacionarias) y clasifíquelas como estables o inestables. (c) Para las que sean estables, encuentre la frecuencia de oscilaciones pequeñas.

Solución. Con respecto a la figura



tenemos que el Lagrangeano es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta, \\ &= \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta. \end{aligned}$$

De aquí sale la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \\ &= mR^2\ddot{\theta} - mR^2\Omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

El lagrangeano es independiente del tiempo, luego una primera integral es $H = \text{constante}$. Calculando

$$\begin{aligned} H &= p_\theta \dot{\theta} - L = mR^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta, \\ p_\theta &= mR^2 \dot{\theta}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2 \Omega^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta, \end{aligned}$$

las posiciones de equilibrio son $\dot{\theta} = 0$, $\dot{p}_\theta = 0$ y los ángulos satisfacen

$$R\Omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta = 0,$$

con soluciones

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi$$

y otra que existe si $\frac{g}{R\Omega^2} < 1$.

$$\cos \theta = \frac{g}{R\Omega^2}.$$

Linealización

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ p_\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_{12} & H_{22} \\ -H_{11} & -H_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ p_\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mR^2} \\ (2mR^2 \Omega^2 \cos^2 \theta - mR^2 \Omega^2 - mgR \cos \theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ p_\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

los valores propios de la matriz son

$$\lambda = \pm \frac{1}{R} \sqrt{R(2R\Omega^2 \cos^2 \theta - R\Omega^2 - g \cos \theta)}.$$

Para los valores de equilibrio calculamos



- a) $\theta = 0$, $\lambda = \pm \frac{1}{R} \sqrt{R(R\Omega^2 - g)}$, imaginario puro si $g > \Omega^2 R$ y es en ese caso centro estable.
- b) $\theta = \pi$, $\lambda = \pm \frac{1}{R} \sqrt{R(R\Omega^2 + g)}$ reales positivo y negativo, punto montura inestable.
- c) $\cos \theta_0 = \frac{g}{R\Omega^2}$, $\lambda = \pm \frac{1}{R} \sqrt{R\left(\frac{g^2}{R\Omega^2} - R\Omega^2\right)}$, imaginario puro si $g < \Omega^2 R$ y es en ese caso centro estable.

Oscilaciones pequeñas en torno a $\theta \simeq 0$ y $\theta \simeq \theta_0$

Expansión en torno a $(0, 0)$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mR^2}, \\ \dot{p}_\theta &= mR(R\Omega^2 - g)\theta, \\ \ddot{\theta} &= \left(\Omega^2 - \frac{g}{R}\right)\theta \\ \omega^2 &= \frac{g}{R} - \Omega^2.\end{aligned}$$

Expansión en torno a $\cos \theta_0 = \frac{g}{R\Omega^2}$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mR^2}, \\ \dot{p}_\theta &= \frac{m}{\Omega^2} (g - R\Omega^2) (g + R\Omega^2) \theta, \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{g}{R} - \Omega^2\right) \left(\frac{g}{R} + \Omega^2\right) \theta, \\ \omega^2 &= \frac{1}{\Omega^2} \left(\Omega^2 - \frac{g}{R}\right) \left(\Omega^2 + \frac{g}{R}\right).\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.6.2 Una partícula se mueve en una órbita circunferencial bajo un potencial central atractivo $V(r)$. Encuentre la condición para que una órbita circular sea estable.

Solución. Estabilidad de una órbita circular. En coordenadas polares r y θ el lagrangeano es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r),$$

de donde las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{V'(r)}{m} \quad (1.27)$$

$$r^2\dot{\theta} = \text{constante} = h. \quad (1.28)$$

La solución de órbita circular se obtiene con las condición iniciales

$$\begin{aligned} r(0) &= R, \\ \ddot{r}(0) &= 0, \\ v(0) &= R\dot{\theta}(0), \\ v(0) &= \sqrt{\frac{RV'(R)}{m}}, \\ h &= R\sqrt{\frac{RV'(R)}{m}}. \end{aligned}$$

La ecuación radial puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} &= -\frac{V'(r)}{m} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{R^3 V'(R)}{mr^3} &= -\frac{V'(r)}{m}. \end{aligned}$$

Supongamos una pequeña perturbación u , (sin cambiar la rapidez) de modo que

$$r = R + u,$$

luego

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{R^3 V'(R)}{m(R+u)^3} = -\frac{V'(R+u)}{m},$$

expandiendo hasta primer orden en u

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{V'(R)}{m} \left(1 - \frac{3}{R}u\right) = -\frac{V'(R)}{m} - \frac{u}{m}V''(R),$$

que se simplifica a

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{3V'(R)}{Rm} + \frac{1}{m}V''(R)\right)u = 0.$$

La órbita circular será estable en el sentido de u realice oscilaciones armónicas de pequeña amplitud y ello ocurre si

$$\omega^2 = \frac{3V'(R)}{R} + V''(R) > 0$$

lo que impone una restricción a la forma del potencial cerca de la órbita .

$$V''(R) > -\frac{3}{R}V'(R).$$

Si el potencial es del tipo

$$V(R) = -\frac{c}{R^n}, \text{ con } c > 0$$

resulta

$$\begin{aligned} V'(R) &= \frac{nc}{R^{n+1}}, \\ V''(R) &= -\frac{n(n+1)c}{R^{n+2}}, \end{aligned}$$

luego

$$-\frac{n(n+1)c}{R^{n+2}} > -\frac{3}{R} \frac{nc}{R^{n+1}},$$

de aquí una condición que debe cumplir n

$$(n+1) < 3 \Rightarrow n < 2,$$

cuestión que es satisfecha por el potencial inverso a la distancia. En efecto si

$$V(r) = -\frac{GMm}{r},$$

$$\omega^2 = \frac{3V'(R)}{Rm} + \frac{1}{m}V''(R) = \frac{3}{Rm} \frac{GMm}{R^2} + \frac{1}{m} \left(-\frac{2GMm}{R^3} \right) = \frac{GM}{R^3}$$

y entonces el periodo de oscilación será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} = \frac{2\pi R}{v(0)},$$

el mismo periodo de revolución en la órbita. En este caso, la solución perturbada puede ser encontrada exactamente y se trata de una elipse.

1.6.6. Otro punto de vista

La órbita circular será estable en $r = R$ si el potencial efectivo

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r),$$

tiene un mínimo local en $r = R$. Entonces debe ser

$$\begin{aligned} V'(R) - \frac{l_O^2}{\mu R^3} &= 0, \\ V''(R) + \frac{3l_O^2}{\mu R^4} &> 0 \end{aligned}$$

o bien, eliminando l_0^2

$$V''(R) + \frac{3}{R}V'(R) > 0$$

que es la misma condición obtenida anteriormente.

1.6.7. Un caso inestable

La inestabilidad de la órbita circular para el caso de un potencia atractivo inverso al cuadrado de la distancia (fuerza inversa al cubo de la distancia)

$$V(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad F(r) = -\frac{2k}{r^3}$$

es fácil de comprender. El Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2},$$

de donde siguen las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{2k}{r^3}\right) &= 0. \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} = \text{constante}. \end{aligned}$$

Eliminando $\dot{\theta}$ resulta

$$m\ddot{r} = \left(\frac{p_\theta^2}{m} - 2k\right)\frac{1}{r^3}.$$

Para este caso el radio de la órbita circular R satisface

$$\frac{p_\theta^2}{m} - 2k = 0,$$

es decir

$$mR^2v^2(0) = 2k.$$

Si R se incrementa una cantidad pequeña a $R + \epsilon$ entonces

$$p_\theta \rightarrow mv(0)(R + \epsilon),$$

y resulta

$$\ddot{r} > 0,$$

y si R se disminuye una cantidad pequeña a $R - \epsilon$ entonces

$$p_\theta \rightarrow mv(0)(R - \epsilon),$$

y

$$\ddot{r} < 0,$$

es decir el radio crece hasta infinito o disminuye hacia cero. Obviamente puede también constatarse que el potencial efectivo

$$U^{ef} = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{k}{r^2},$$

no tiene un mínimo.

1.6.8. Otro caso estable

Para la fuerza elástica con

$$V(r) = kr^2,$$

hay órbitas circulares estables. El potencial efectivo es

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + kr^2,$$

luego la condición de extremo en $r = R$ da

$$-\frac{l_O^2}{\mu R^3} + 2kR = 0 \Rightarrow R = \sqrt[4]{\frac{l_O^2}{2k\mu}},$$

y la segunda derivada es

$$(U^{ef})'' = \frac{3\ell_O^2}{\mu R^4} + 2k = 8k > 0.$$

Esto es se trata de un mínimo. Un gráfico de $\frac{1}{r^2} + r^2$ se muestra

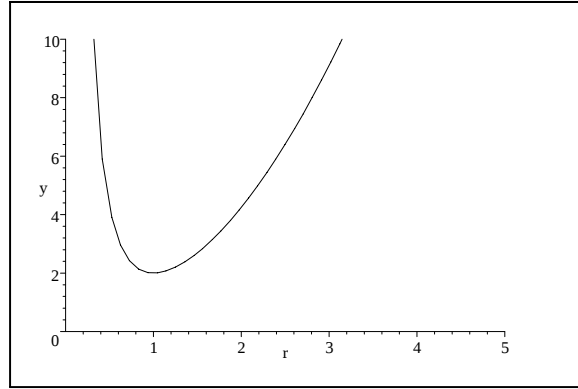


Figura 1.7: gráfico de $\frac{1}{r^2} + r^2$

1.6.9. El trompo dormido

Para el caso de un trompo cuyas ecuaciones son

$$s \equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante},$$

$$A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = \alpha = \text{constante},$$

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}C(s)^2 + mgh \cos \theta = \text{constante}.$$

Existe un estado de equilibrio con $\theta = 0$. Si eliminamos

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha - Cs \cos \theta}{A \sin^2 \theta},$$

en la energía resulta

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(\alpha - Cs \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} + \frac{1}{2}Cs^2 + mgh \cos \theta,$$

Pero $\alpha = Cs$ luego

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}\frac{C^2s^2}{A} + \frac{1}{2}Cs^2 + mgh \cos \theta$$

El potencial efectivo lo expandimos en torno a $\theta = 0$

$$V^{ef} = \frac{1}{2}\frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}\frac{C^2s^2}{A} + mgh \cos \theta \simeq mgh + \left(\frac{1}{8}C^2\frac{s^2}{A} - \frac{1}{2}mgh\right)\theta^2,$$

luego se trata de un mínimo si

$$\frac{1}{8}C^2\frac{s^2}{A} - \frac{1}{2}mgh > 0$$

luego el trompo dormido es estable si

$$\frac{C^2s^2}{A} > 4mgh.$$

1.7. Principio variacional de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange pueden ser obtenidas del llamado principio variacional de Hamilton. La acción S de un sistema se define mediante

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (1.29)$$

es decir una integral sobre un posible camino $q_i(t)$ que permita al sistema pasar entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 en forma compatible con los vínculos, y con las condiciones en t_1 y t_2 . Primero, su variación con extremos fijos, supuesta nula, conduce a las ecuaciones de movimiento.

1.7.1. Variación de la acción

La acción puede considerarse una funcional de los posibles caminos $q_i(t)$ compatible con los vínculos y las condiciones en t_1 y t_2 . El principio variacional de Hamilton establece que la acción es un extremo si y solo si el camino es la trayectoria física, solución de las ecuaciones de movimiento del sistema (conservativo).

Demostración:

En lo que sigue, llamaremos caminos físicos a los caminos extremales entre los puntos extremos fijos y caminos variados a otros caminos, próximos a los caminos extremales, entre los mismos puntos extremos. Se requieren elementos de cálculo variacional que no estudiaremos aquí, pero de los cuales haremos uso (ver [3]). Para que la acción sea un extremo se requiere que su variación δS sea cero, para variaciones $\delta q_i(t)$ infinitesimal, compatibles con los vínculos y nulas en los extremos y salvo por eso, arbitrarias entre ellos. Como se sabe, usando la “notación δ ”, se tiene que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt,$$

como

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q, \quad y \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0,$$

la primera variación de la acción puede escribirse

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (1.30)$$

- Si se cumplen las ecuaciones de movimiento, ecuaciones de Lagrange en su forma original, es decir

$$\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = \sum Q_i^{NC} \delta q_i,$$

y si además se trata de un sistema conservativo, donde por definición $Q_i^{NC} = 0, \forall i$, entonces $\delta S = 0$, lo que significa que S es un extremo.

- Si la acción S es un extremo, o sea $\delta S = 0$, tenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0,$$

o bien

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt \delta q_i = 0.$$

Si las variaciones δq_i son arbitrarias en el intervalo, serían cero los integrandos. Sin embargo admitimos la posibilidad de que hayan vínculos no holonómicos de un cierto tipo, satisfaciendo

$$\sum_i A_{ji} \dot{q}_i + A_{j0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Como las variaciones virtuales son a tiempo fijo se tiene

$$\sum_i A_{ji} \delta q_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

y también serán cero sus integrales

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} A_{ji} \delta q_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (1.31)$$

de modo que tenemos un problema de cálculo variacional, con restricciones adicionales (1.31), por lo que, haciendo uso de la técnica de los multiplicadores de Lagrange obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_j \lambda_j A_{ji},$$

que son las ecuaciones correctas de Lagrange para sistemas conservativos con vínculos adicionales no holonómicos del tipo que se estudiaron anteriormente.

1.7.2. Variación en los extremos

Consideremos variar la acción entre el camino extremal que satisface las ecuaciones de lagrange y caminos cercanos sin restringirse a extremos fijos, es decir

$$q'_i = q_i + \epsilon g_i(t),$$

pero ahora

$$g_i(t_1) \neq 0 \text{ y } g_i(t_2) \neq 0.$$

Resultará

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} (L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon g_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \frac{d}{dt} g_i(t) \right) dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon g_i(t) dt + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon g_i(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon g_i(t) dt.$$

Si la trayectoria es extremal, se satisfacen las ecuaciones de Lagrange cancelándose la primera y tercera integrales, resultando

$$\delta S = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon g_i(t) \Big|_{t_2} - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon g_i(t) \Big|_{t_1}.$$

Si el Lagrangiano es invariante ante la transformación $q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon g_i(t)$, entonces lo es también la acción por lo que $\delta S = 0$ y en consecuencia

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} g_i(t) = \text{constante},$$

que constituye otra demostración del teorema de Noether. Este fue establecido en 1.16 como: Si el Lagrangiano es invariante a la transformación

$$q_i \rightarrow Q_i(q, s) \text{ con } q_i = Q_i(q, 0),$$

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{dQ_j}{ds} \Big|_{s=0} = 0,$$

sería ahora $Q_i = s g_i(t)$.

1.8. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 1.8.1 *Si se considera la transformación*

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3),$$

siendo los q_i funciones del tiempo. Demuestre la identidad:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{v^2}{2} = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}.$$

Solución. Considere

$$\vec{v} = \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{v^2}{2} = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j},$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{v^2}{2} &= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \\ &= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_j} \\ &= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{v^2}{2}, \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.8.2 *Utilice la identidad señalada en el problema anterior para obtener las componentes de la aceleración de una partícula en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.*

Solución. En coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z\hat{k} + \rho\hat{\rho} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \hat{\rho}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \rho \hat{\phi} \\ v^2 &= \dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2, \end{aligned}$$

luego resultan

$$\begin{aligned} a_z &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{v^2}{2} = \ddot{z}, \\ a_\rho &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{v^2}{2} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2, \\ \rho a_\phi &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{v^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \frac{\rho^2 \dot{\phi}^2}{2} \\ &= \frac{d}{dt} \rho^2 \dot{\phi} = 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} + \rho^2 \ddot{\phi}. \\ a_\phi &= 2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}. \end{aligned}$$

Similarmente, para coordenadas esféricas e, θ, ϕ

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \hat{r}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\hat{\theta}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r(\sin \theta)\hat{\phi} \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2,\end{aligned}$$

luego resultan

$$\begin{aligned}a_r &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}} \frac{1}{2} - \frac{\partial v^2}{\partial r} \frac{1}{2} = \ddot{r}, \\ ra_{\theta} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\theta}} \frac{1}{2} - \frac{\partial v^2}{\partial \theta} \frac{1}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\partial r^2(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2}{2}, \\ &= \frac{d}{dt} r^2\dot{\theta} - r^2(\sin \theta \cos \theta)\dot{\phi}^2 = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2(\sin \theta \cos \theta)\dot{\phi}^2, \\ a_{\theta} &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r(\sin \theta \cos \theta)\dot{\phi}^2 \\ r(\sin \theta)a_{\phi} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\phi}} \frac{1}{2} - \frac{\partial v^2}{\partial \phi} \frac{1}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r^2(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2}{2} \\ &= \frac{d}{dt} r^2(\sin^2 \theta)\dot{\phi}, \\ a_{\phi} &= r(\sin \theta)\ddot{\phi} + 2\dot{r}(\sin \theta)\dot{\phi} + 2r(\cos \theta)\dot{\theta}\dot{\phi}\end{aligned}$$

EJERCICIO 1.8.3 Una argolla de masa $3m$ puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura. Unido a la argolla hay un péndulo doble, formado por dos partículas de masas m e hilos de largo a . Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja al sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura (1.8) en torno de la vertical.

- a) Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.
- b) Determine las aceleraciones cuando los desplazamientos angulares y las velocidades son pequeñas.

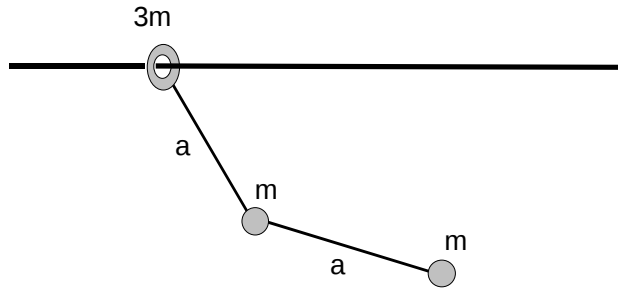


Figura 1.8:

Solución. Usemos como coordenadas generalizadas x de $3m$ y los ángulos θ y ϕ que forman los hilos con la vertical. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}x_2 &= x + a \sin \theta, \\y_2 &= -a \cos \theta, \\x_3 &= x + a \sin \theta + a \sin \phi, \\y_3 &= -a \cos \theta - a \cos \phi,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta, \\\dot{y}_2 &= a\dot{\theta} \sin \theta, \\\dot{x}_3 &= \dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta + a\dot{\phi} \cos \phi, \\\dot{y}_3 &= a\dot{\theta} \sin \theta + a\dot{\phi} \sin \phi,\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}L &= \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}a\dot{\theta} \cos \theta) \\&\quad + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{x}a\dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{x}a\dot{\phi} \cos \phi + 2a^2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi)) \\&\quad + 2mga \cos \theta + mga \cos \phi,\end{aligned}$$

derivando

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 5m\dot{x} + 2m(a\dot{\theta} \cos \theta) + m(a\dot{\phi} \cos \phi) = \text{constante}.$$

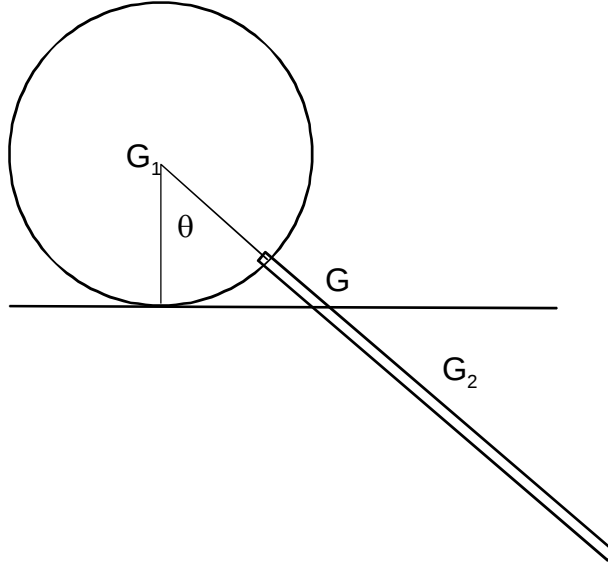
$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2ma^2\dot{\theta} + 3m\dot{x}a \cos \theta + ma^2\dot{\phi} \cos(\theta - \phi), \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= ma^2\dot{\phi} + m\dot{x}a \cos \phi + ma^2\dot{\theta} \cos(\theta - \phi), \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -2m\dot{x}a\dot{\theta} \sin \theta - ma^2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta - \phi) - 2mga \sin \theta, \\
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= -m\dot{x}a\dot{\phi} \sin \phi + ma^2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta - \phi) - mga \sin \phi,
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
0 &= 2a\ddot{\theta} + 3\ddot{x} \cos \theta + a\ddot{\phi} \cos(\theta - \phi) - a\dot{\phi}^2 \sin(\theta - \phi) + 2g \sin \theta, \\
0 &= a\ddot{\phi} + \ddot{x} \cos \phi + a\ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) - a\dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi) + g \sin \phi.
\end{aligned}$$



EJERCICIO 1.8.4 *Un disco de masa M y radio R puede rodar sin resbalar sobre un plano horizontal. Una barra de masa m y largo $2a$ está fija radialmente a un punto del borde del disco y ella causa que el disco oscile respecto a la posición de*



equilibrio $\theta = 0$.

EJERCICIO 1.8.5 *Determine la ecuación de movimiento y una expresión para el periodo de oscilación.*

Solución. La distancia de G_1 a G será llamada d

$$d = \frac{m(R+a)}{M+m},$$

y el momento de inercia respecto a ese punto obtenido por el teorema de Steiner será

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 + \frac{1}{3}ma^2 + m(R+a-d)^2$$

El momento de inercia respecto a G será

$$\begin{aligned} I_G &= \frac{1}{2}MR^2 + \left(\frac{1}{3}ma^2 + m(R+a)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{4}{3}ma^2 + mR^2 + 2mRa, \end{aligned}$$

Las coordenadas de G serán

$$\begin{aligned} x_G &= -R\theta + \frac{m(R+a)}{M+m} \sin \theta \\ y_G &= -\frac{m(R+a)}{M+m} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -R\dot{\theta} + \frac{m(R+a)}{M+m} \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_G &= \frac{m(R+a)}{M+m} \dot{\theta} \sin \theta, \end{aligned}$$

luego el Lagrangiano será

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{\theta}^2 \left(R^2 - \frac{2mR(R+a)}{M+m} \cos \theta + \frac{m^2(R+a)^2}{(M+m)^2}\right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{4}{3}ma^2 + mR^2 + 2mRa\right) \dot{\theta}^2 + (M+m) \frac{m(R+a)}{M+m} \cos \theta, \end{aligned}$$

la ecuación de movimiento será

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left((M+m)R^2 + \frac{m^2(R+a)^2}{(M+m)} + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{4}{3}ma^2 + mR^2 + 2mRa - 2mR(R+a) \cos \theta \right) \dot{\theta} + (M+m) \\ &\quad - \frac{1}{2}(M+m)\dot{\theta}^2 \left(\frac{2mR(R+a)}{M+m} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

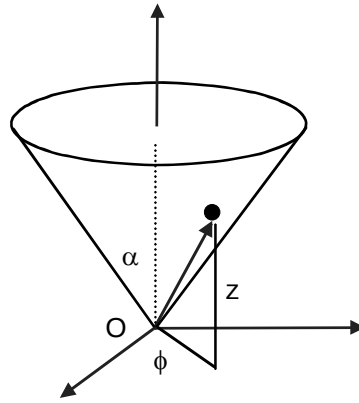
Para oscilaciones pequeñas

$$0 = ((M+m)R^2 + \frac{m^2(R+a)^2}{(M+m)} + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{4}{3}ma^2 + mR^2 + 2mRa - 2mR(R+a))\ddot{\theta} + m(R+a)\dot{\theta}$$

$$\omega^2 = \frac{m(R+a)}{(M+m)R^2 + \frac{m^2(R+a)^2}{(M+m)} + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{4}{3}ma^2 + mR^2 + 2mRa - 2mR(R+a)}$$

$$: 6m(R+a) \frac{M+m}{9R^2M^2 + 9R^2Mm + 6R^2m^2 + 12m^2Ra + 14m^2a^2 + 8ma^2M}$$

EJERCICIO 1.8.6 Una partícula está vinculada a una superficie lisa cónica con semi ángulo en el vértice α y cuyo eje está vertical. Usando coordenada cilíndricas z, ϕ



escriba las ecuaciones de Lagrange. ¿Hay órbitas circulares? ¿Son estables?

Solución. Las componentes de la velocidad son $\dot{r}, (r \sin \alpha)\dot{\phi}$ donde $r \cos \alpha = z$ entonces las componentes de la velocidad son

$$\frac{\dot{z}}{\cos \alpha}, \quad z \tan \alpha \dot{\phi}$$

y el Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{z}^2}{\cos^2 \alpha} + z^2 \dot{\phi}^2 \tan^2 \alpha\right) - mgz,$$

derivando construimos las ecuaciones de Lagrange

$$m \frac{\ddot{z}}{\cos^2 \alpha} - mz \dot{\phi}^2 \tan^2 \alpha + mg = 0,$$

$$p_\phi = mz^2 \dot{\phi} \tan^2 \alpha = \text{const.}$$

La ecuación para z se obtiene eliminando $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mz^2 \tan^2 \alpha}$ obteniéndose

$$\frac{\ddot{z}}{\cos^2 \alpha} - \frac{p_\phi^2}{m^2 z^3 \tan^2 \alpha} + g = 0,$$

que puede escribirse

$$\ddot{z} = \frac{p_\phi^2 \cos^2 \alpha}{m^2 z^3 \tan^2 \alpha} - g \cos^2 \alpha = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_\phi^2 \cos^2 \alpha}{2m^2 z^2 \tan^2 \alpha} + gz \cos^2 \alpha \right),$$

o sea el potencial efectivo en la dirección z es

$$V(z) = \frac{p_\phi^2 \cos^2 \alpha}{2m^2 z^2 \tan^2 \alpha} + gz \cos^2 \alpha.$$

Órbitas circulares, con $z = z_0$ constante corresponde a $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ o sea

$$\frac{p_\phi^2 \cos^2 \alpha}{m^2 z_0^3 \tan^2 \alpha} - g \cos^2 \alpha = 0$$

La segunda derivada es

$$V''(z) = \frac{3p_\phi^2 \cos^2 \alpha}{m^2 z^4 \tan^2 \alpha},$$

que es obviamente positiva. Luego el punto $z = z_0$ corresponde a un mínimo del potencial, luego se trata de una órbita estable. De

$$\frac{p_\phi^2}{m^2 g \tan^2 \alpha} = z_0^3$$

podemos despejar el valor de $\dot{\phi}$ adecuado

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{z_0 \tan^2 \alpha}}.$$

Un gráfico ilustrativo. $V(z) = \frac{1}{z^2} + z$



EJERCICIO 1.8.7 *Un péndulo formado por una barra liviana de longitud l , unida a dos masas iguales a m una de ellas que puede oscilar en un plano vertical, la otra restringida a moverse verticalmente unida a un resorte de constante k , como se ve en la figura (1.10). Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.*

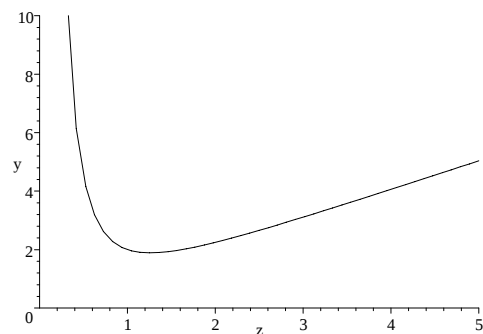


Figura 1.9: $V(z) = \frac{1}{z^2} + z$

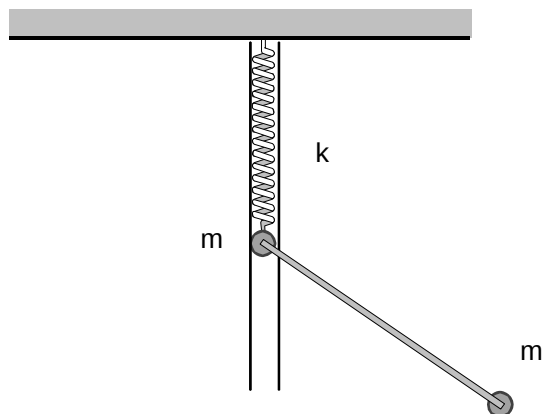


Figura 1.10:

Solución. Sea z la longitud del resorte y θ el ángulo que forma la barra con la vertical. Las coordenadas de la masa que oscila como péndulo son

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta, & y &= -z - l \cos \theta, \\ \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta, & \dot{y} &= -\dot{z} + l \dot{\theta} \sin \theta,\end{aligned}$$

luego

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 - 2l\dot{z}\dot{\theta} \sin \theta + l^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + mgz,$$

o sea

$$\begin{aligned}L &= m\dot{z}^2 - ml\dot{z}\dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(z^2 - 2zl_0 + l_0^2) + mgz, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} - ml\dot{\theta} \sin \theta, & \frac{\partial L}{\partial z} &= -k(z - l_0 - \frac{mg}{k}), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m(-l\dot{z} \sin \theta + l^2\dot{\theta}), & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -ml\dot{z}\dot{\theta} \cos \theta,\end{aligned}$$

si se define

$$u = z - l_0 - \frac{mg}{k},$$

las ecuaciones de lagrange serán

$$\begin{aligned}\ddot{u} - l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{k}{m}u &= 0, \\ -\ddot{u} \sin \theta + l\ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

EJERCICIO 1.8.8 Una partícula de masa m está vinculada suavemente a un tubo liso el cual se hace rotar en torno de la vertical con velocidad angular Ω constante, de modo que el ángulo de inclinación del tubo con la vertical es constante α . Para la coordenada generalizada r , la distancia de la partícula al punto fijo del tubo se pide

- a) Escribir la ecuación de movimiento.
- b) Determinar la posición dentro del tubo donde la partícula puede estar estacionaria, es decir sin moverse respecto al tubo.

- c) Si la partícula es colocada dentro del tubo en el punto fijo, determine la velocidad mínima que ella debe tener respecto al tubo, para que ella sobrepase la posición determinada en la pregunta (b).

Solución. Si llamamos r a la distancia de la partícula al origen se tiene

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha,$$

de donde sigue

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\Omega^2 \sin^2 \alpha - mg \cos \alpha,$$

y luego

$$\ddot{r} = r\Omega^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha. \quad ((a))$$

La partícula puede estar estacionaria donde $\ddot{r} = 0$ o sea a distancia

$$r = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha} \quad ((b))$$

del origen. Integrando la ecuación de movimiento entre $r = 0$ y r obtenemos

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}r^2\Omega^2 \sin^2 \alpha - gr \cos \alpha,$$

y la condición es que $\dot{r}$ en $r = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}$ de modo que resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_0^2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}\right)^2\Omega^2 \sin^2 \alpha + g\frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha} \cos \alpha, \\ v_0 &= \frac{g \cot \alpha}{\Omega}. \end{aligned} \quad ((c))$$

EJERCICIO 1.8.9 Una partícula de masa m está en reposo en el punto más alto de un hemisferio liso fijo de radio R . Si ella es perturbada levemente, comienza a resbalar sobre el hemisferio. Determine el punto donde ella abandona el contacto con el hemisferio.

Solución. Sea θ el ángulo que forma la línea desde el centro del hemisferio a la partícula. Entonces la energía es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta = mgR,$$

de donde

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta).$$

La reacción normal satisface

$$N - mg \cos \theta = -\frac{mv^2}{R},$$

y se anula cuando

$$mg \cos \theta = m2g(1 - \cos \theta) \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.1897^\circ.$$

EJERCICIO 1.8.10 Una partícula de masa M se coloca en reposo sobre el punto más alto de un hemisferio semicilíndrico de masa M y radio R , el cual descansa sobre un plano horizontal liso, como se indica en la figura (1.11). Si la partícula se perturba levemente, el sistema comienza a moverse. Determine la expresión que determina el ángulo para el cual la partícula perderá contacto con el hemisferio.

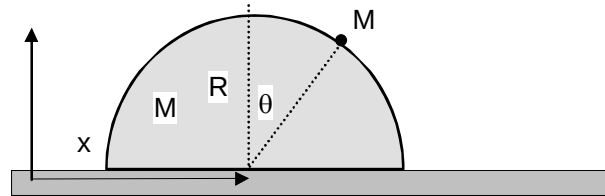


Figura 1.11:

Solución. Con relación a la figura las coordenadas de la partícula P son

$$\begin{aligned} x_P &= x + R \sin \theta, \\ y_P &= R \cos \theta, \end{aligned}$$

luego las componentes de la velocidad

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= \dot{x} + R\dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_P &= -R\dot{\theta} \sin \theta, \end{aligned}$$

de donde el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + 2\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta + R^2\dot{\theta}^2) - MgR\cos\theta.$$

Hay dos cantidades conservadas

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2M\dot{x} + MR\dot{\theta}\cos\theta = 0, \quad (1.32)$$

$$H = E = M\dot{x}^2 + M\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta = MgR \quad (1.33)$$

La condición de despegue usualmente se impone haciendo la Normal cero. Una alternativa es levantar el vínculo $r = R$ constante y hacer uso de la técnica de los multiplicadores de Lagrange para determinar N . Hay sin embargo otra alternativa. Obviamente cuando se pierda el contacto será

$$\ddot{x} = 0.$$

Se necesita entonces $\ddot{x}(\theta)$. Para ello en 5.5 elimine $\dot{x}$

$$\dot{x} = -\frac{R}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$

obteniendo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g(1 - \cos\theta)}{R(2 - \cos^2\theta)}.$$

Luego de la ecuación 5.4 se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{2}\dot{\theta}\cos\theta = -\frac{R}{2}\sqrt{\frac{4g(1 - \cos\theta)}{R(2 - \cos^2\theta)}}\cos\theta, \\ \ddot{x} &= \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\dot{x}, \end{aligned}$$

luego la condición de despegue será

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{\frac{(1 - \cos\theta)}{2 - \cos^2\theta}}\cos\theta\right) = 0,$$

de donde sigue

$$\cos^3\theta - 6\cos\theta + 4 = 0,$$

y evaluando numéricamente resulta

$$\cos\theta = 0,732\,051 \Rightarrow \theta = 42.941\,4^\circ.$$

EJERCICIO 1.8.11 *Dos partículas de masas m_1 y m_2 están en reposo sobre un plano horizontal liso unidas por una cuerda inextensible de largo L . Si a una de ellas se le da una rapidez inicial v_0 perpendicular a la línea que une las partículas, determine para el movimiento siguiente, la magnitud de la tensión en la cuerda.*

Solución. Realmente este problema no es adecuado para Lagrange. La velocidad inicial del centro de masa y que permanece constante es

$$V_G = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Las velocidades iniciales relativas a G serán

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_0 - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}, \\ v'_2 &= -\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Ellas describen circunferencias de radios

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}, \\ r_2 &= \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}, \end{aligned}$$

en torno al centro de masa. Luego, la segunda ley aplicada a cualquiera partícula da

$$\begin{aligned} T &= m_1 \frac{(v'_1)^2}{r_1}, \\ &= m_2 \frac{(v'_2)^2}{r_2}, \end{aligned}$$

y así resulta

$$T = m_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2 L} \left(\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0^2}{L}.$$

Sistema rígido de partículas

2.1. Cinemática de un sistema rígido

Un cuerpo rígido es por definición un sistema de partículas donde las distancias entre ellas son invariables durante su movimiento. También consideraremos sistemas continuos rígidos donde uno se olvida de la discreticidad de la materia y se considera un continuo donde las distancias entre sus puntos son invariable. También son considerados sistemas rígidos los sistemas de coordenadas, donde si el sistema se mueve, las distancias entre sus puntos permanecen invariables. Un cambio de posición de un sistema rígido, sea un cuerpo o un sistema de coordenadas, se conoce como un desplazamiento. Como veremos es suficiente estudiar dos tipos de desplazamientos, las traslaciones paralelas y las rotaciones.

En el estudio de las rotaciones el sistema puede ser el objeto físico, lo que se denomina punto de vista activo, o el sistema de coordenadas, punto de vista pasivo. Ambos puntos de vista difieren simplemente en el sentido de la rotación.

2.1.1. Rotaciones y traslaciones de un sistema de coordenadas

Entre los cambios de posición o desplazamientos que puede experimentar un sistema de coordenadas, o un cuerpo rígido, son importantes los casos

particulares conocidos como *traslaciones paralelas y rotaciones*. En una traslación, todas las posiciones cambian en un mismo vector desplazamiento $\vec{T}$ de modo que

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{T}. \quad (2.1)$$

Por otro lado, una rotación, mantiene inalterada las posiciones de todos los puntos pertenecientes al llamado eje de la rotación. Al respecto, cabe destacar el siguiente teorema debido a *Euler*:

► **TEOREMA 2.1**

Todo cambio de posición de un sistema que mantiene un punto fijo, puede ser logrado en forma equivalente mediante una rotación.

Un enunciado equivalente es:

► **TEOREMA 2.2**

Al cambiar de posición un cuerpo rígido (infinitamente extenso) manteniendo fijo uno de sus puntos, existe otro punto del cuerpo que recobra su posición original.

Una demostración simple de este teorema se encuentra en el libro de *Mecánica de Synge y Griffith*. [8]

2.1.2. Rotación de un vector en un ángulo ϕ respecto a un eje especificado por $\hat{n}$

Considere una rotación activa de un vector $\vec{r}$ en torno de un eje $\hat{n}$ en un ángulo ϕ en el sentido de avance de $\hat{n}$. (Esto equivale a una rotación pasiva con un ángulo de $-\phi$.) De la figura (2.1) es posible demostrar que el vector rotado $\vec{r}'$ puede escribirse

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\sin \phi) \hat{n} \times \vec{r} + (1 - \cos \phi) \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}). \quad (2.2)$$

Para lo que sigue, estaremos sólo interesados en el cambio de un vector cuando es rotado en un ángulo infinitésimo. Si en la expresión anterior hacemos $\phi \rightarrow d\phi$, tenemos que

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\phi \hat{n} \times \vec{r},$$

o

$$d\vec{r} = d\phi \hat{n} \times \vec{r},$$

es el cambio que experimenta un vector $\vec{r}$ al ser rotado en un ángulo infinitésimo $d\phi$ respecto al eje $\hat{n}$. Esto será usado en lo que sigue.

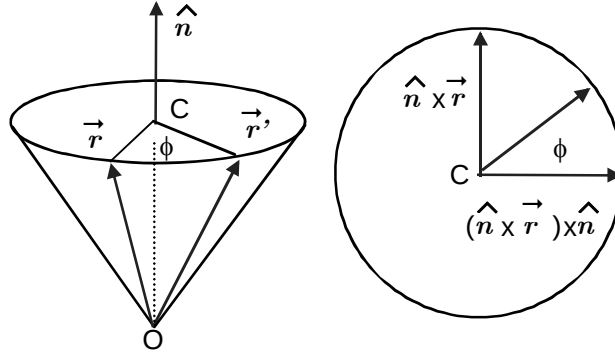


Figura 2.1: Rotación activa de vector

2.2. Descomposición del movimiento

Un cambio de posición arbitrario de un sistema o de un cuerpo rígido, puede ser en general logrado en forma equivalente mediante una traslación pura, que lleva alguno de sus puntos A a su posición final A' , seguido de una rotación pura en torno de un eje que pasa por el punto A' , en un cierto ángulo. Entonces el cambio de todo vector posición de un punto P perteneciente al cuerpo rígido, podrá escribirse:

$$\delta \overrightarrow{OP} = \delta \overrightarrow{OA}_{\text{traslación}} + \delta \overrightarrow{AP}_{\text{rotación}}.$$

Si el cambio de posición es finito, nada podemos decir de las posiciones intermedias que ocupó el cuerpo para pasar de su posición inicial a la final. Sin embargo, si el intervalo de tiempo transcurrido entre ambas posiciones es infinitésimo, dt , entonces la descomposición anterior, nos describe en forma continua las posiciones que ocupa el cuerpo mediante

$$d\overrightarrow{OP} = d\overrightarrow{OA} + d\overrightarrow{AP},$$

o sea

$$d\overrightarrow{OP} = d\overrightarrow{OA} + d\phi \hat{n} \times \overrightarrow{AP},$$

que si se divide por dt , constituye una relación entre velocidades de dos puntos A, P del cuerpo rígido, es decir

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \frac{d\phi}{dt} \hat{n} \times \overrightarrow{AP}.$$

Si definimos

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n}, \quad (2.3)$$

la denominada *velocidad angular instantánea* del cuerpo rígido, se obtiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}. \quad (2.4)$$

Lo anterior es algo engañoso. La existencia del ángulo de rotación y de su eje, está garantizada por el teorema de Euler, sin embargo en la práctica, su determinación no es obvia. En este contexto, es útil el llamado teorema de adición de velocidades angulares.

2.2.1. Teorema de adición de velocidades angulares

Si se tienen dos sistemas de referencia, S_0 y S_1 con origen común, y además un cuerpo rígido (CR) que mantiene un punto fijo en el origen común, ver figura (2.2), el siguiente teorema relaciona velocidades angulares relativas (*rel*):

► **TEOREMA 2.3**

La velocidad angular puede descomponerse de la siguiente forma

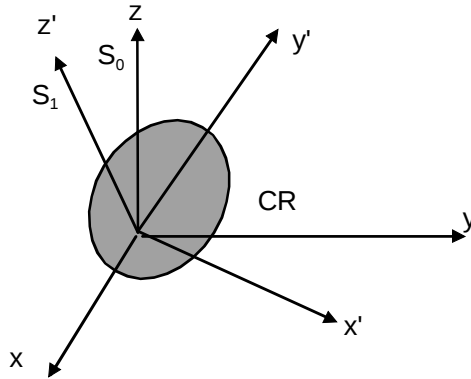


Figura 2.2: Adición velocidades angulares

$$= \vec{\omega}_{CR/S_1} + \vec{\omega}_{S_1/S_0},$$

donde con la notación $\vec{\omega}_{A/B}$ indicamos angular de A respecto a B .

DEMOSTRACION 2

Sea P un punto del CR . Usando el teorema de adición de velocidades lineales, tenemos que

$$\vec{v}_{P/S_0} = \vec{v}_{P/S_1} + \vec{\omega}_{S_1/S_0} \times \overrightarrow{OP},$$

pero

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P/S_0} &= \vec{\omega}_{CR/S_0} \times \overrightarrow{OP}, \\ \vec{v}_{P/S_1} &= \vec{\omega}_{CR/S_1} \times \overrightarrow{OP},\end{aligned}$$

de modo que para $\overrightarrow{OP}$ arbitrario se cumple que

$$\vec{\omega}_{CR/S_0} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega}_{CR/S_1} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_{S_1/S_0} \times \overrightarrow{OP},$$

de donde sigue el resultado

$$\vec{\omega}_{CR/S_0} = \vec{\omega}_{CR/S_1} + \vec{\omega}_{S_1/S_0}.$$

Las cantidades cinemáticas, que dependen de las velocidades de las partículas del cuerpo, adquieren una forma especial cuando se trata de un sistema rígido de partículas. La descripción del movimiento de un cuerpo rígido puede hacerse en términos de tres coordenadas que den cuenta de los desplazamientos de un punto del cuerpo y de tres ángulos o parámetros que den cuenta de las rotaciones del cuerpo. Por esa razón existen en general solo seis variables necesarias en la descripción del movimiento de un cuerpo rígido y por lo tanto, es suficiente considerar solamente las seis ecuaciones escalares

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext},$$

para el movimiento del centro de masas, y

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext},$$

o

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext},$$

es decir para punto fijo O de un sistema inercial, el centro de masas G o un punto A arbitrario, siendo entonces

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A. \quad (2.5)$$

o bien reemplazar alguna de ellas por el teorema de conservación de energía, si ello corresponde. Aquí solamente indicaremos las consideraciones especiales que permiten expresar tanto la energía cinética y el momentum angular de un cuerpo rígido, en términos de su velocidad angular y la matriz de inercia. Las ecuaciones dinámicas aplicables son aquellas recién citadas de un sistema de partículas. Considerando la relación básica entre las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido, ver fig.(2.3)

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

podemos expresar el momento angular de un sistema rígido de partículas que mantiene un punto O fijo como

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \quad (2.6)$$

o bien, para un cuerpo rígido continuo que mantiene un punto O fijo

$$\vec{L}_O = \int dm \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.7)$$

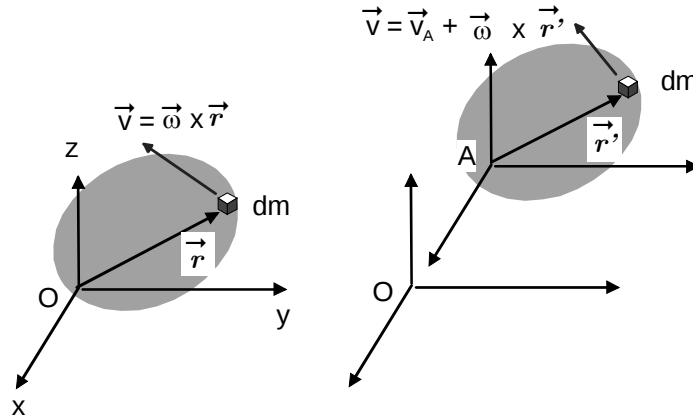


Figura 2.3: velocidades de un cuerpo rígido

Si se considera la siguiente forma de realizar un *producto cruz*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (\vec{a} \times) \vec{b},$$

donde se ha definido la matriz antisimétrica $(\vec{a} \times)$ mediante

$$(\vec{a} \times) = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces cualquiera de las dos expresiones (2.6) o (2.7) puede escribirse, al usar notación matricial, de la siguiente forma

$$\vec{L}_O = H_O \vec{\omega}.$$

donde H_O es una matriz 3×3 , la denominada *matriz de inercia del sistema relativa al origen O* y que, para el caso de un cuerpo rígido continuo, por definición es

$$H_O = - \int dm (\vec{r} \times)^2.$$

y para un sistema rígido de partículas

$$H_O = - \sum m_i (\vec{r}_i \times)^2.$$

La matriz $(\vec{r}_i \times)^2$ puede calcularse y resulta ser

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -z^2 - y^2 & yx & zx \\ yx & -z^2 - x^2 & zy \\ zx & zy & -y^2 - x^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

: de manera que

$$\begin{aligned} H_O &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int dm(z^2 + y^2) & -\int dm yx & -\int dm zx \\ -\int dm yx & \int dm(z^2 + x^2) & -\int dm zy \\ -\int dm zx & -\int dm zy & \int dm(y^2 + x^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

:

2.2.2. Energía cinética y momentum angular

Se deja como ejercicio, en este resumen, probar que:

EJERCICIO 2.2.1 *En el movimiento general de un sistema rígido de partículas, pruebe que:*

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + H_G\vec{\omega}, \\ \vec{L}_G &= H_G\vec{\omega}, \\ K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_G\vec{\omega}\end{aligned}$$

EJERCICIO 2.2.2 *En el caso que un punto 0 se mantenga fijo, pruebe que:*

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + H_G\vec{\omega} = H_O\vec{\omega}, \\ \vec{L}_G &= H_G\vec{\omega}, \\ K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_G\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_O\vec{\omega}.\end{aligned}$$

2.2.3. Algunas propiedades de la matriz de inercia

La expresión explícita de la matriz de inercia (sus componentes), depende del origen elegido, así como de la orientación de los ejes. Sus componentes las indicaremos de acuerdo a

$$H = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

siendo los elementos de la diagonal llamados *momentos de inercia* y los de fuera de la diagonal, *productos de inercia*

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int dm(y^2 + z^2), \quad I_{yy} = \int dm(x^2 + z^2), \quad \text{etc.} \\ I_{xy} &= I_{yx} = - \int xy dm, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Por ser la matriz de inercia una matriz real simétrica, ella puede ser diagonalizada. Las direcciones para las cuales ella es diagonal, se denominan direcciones o ejes principales de inercia del cuerpo, en el punto seleccionado.

Cuando hay dos valores propios repetidos, todos los ejes del plano correspondiente a esos dos vectores propios, son ejes principales de inercia. Si los tres valores propios son iguales, todo eje es en ese punto es principal de inercia. En cualquier caso, siempre es posible escoger tres direcciones principales de inercia ortogonales entre si. Las propiedades de simetría de un cuerpo, cuando existen, ayudan en la determinación de las direcciones principales de inercia. Para lo que sigue, consideraremos cuerpos rígidos homogéneos de modo que las propiedades de simetría del cuerpo coinciden con sus simetrías geométricas. Pueden entonces probarse los siguientes teoremas:

2.2.4. Teoremas

► TEOREMA 2.4

Todo eje de simetría, es principal de inercia en todos sus puntos.

► TEOREMA 2.5

Un eje perpendicular a un plano de simetría de reflexión, es principal de inercia donde se intersectan.

► TEOREMA 2.6

Un eje paralelo a un eje de simetría, es principal de inercia donde lo corta perpendicularmente el plano que contiene al centro de masas.

2.2.5. El elipsoide de inercia

Las consideraciones anteriores admiten una visualización gráfica. La forma cuadrática

$$\vec{r}^T \cdot H_O \vec{r} = 1,$$

o bien desarrollada explícitamente en la forma

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1$$

representa en general, un elipsoide centrado en el origen seleccionado del cuerpo pero rotado respecto a los ejes elegidos, ver figura (2.4). Los semiejes del elipsoide serán en consecuencia los ejes principales de inercia del cuerpo en ese origen, puesto que para esos ejes, la forma cuadrática no tiene productos de inercia. Este elipsoide puede degenerar desde un cilindro de sección elíptica si algún momento de inercia es cero, hasta una esfera si los tres momentos de inercia son iguales. Esta superficie, llamada elipsoide de inercia, que está

fija en el cuerpo, debe por lo tanto tener las mismas propiedades de simetría del cuerpo. Por ejemplo, si uno de los ejes elegidos es de simetría de rotación del cuerpo en el origen seleccionado, ese eje debe ser uno de los semiejes del elipsoide, es decir un eje de simetría es principal de inercia en todos sus puntos. Igualmente, si el origen está en un plano de simetría de reflexión del cuerpo, el elipsoide debe tener ese mismo plano como plano de simetría de reflexión. Es decir dos semiejes del elipsoide están sobre ese plano y el tercero es perpendicular a ese plano. En consecuencia todo eje perpendicular a un plano de simetría de reflexión es principal de inercia donde se intersectan con el plano. Otra consecuencia que se entiende con claridad cuando se piensa en el elipsoide de inercia es la siguiente. Si el origen está en un eje de simetría de rotación en un ángulo distinto de 180° , el elipsoide debe tener esa misma propiedad, por lo tanto los dos semiejes del elipsoide que son perpendiculares a ese eje deben ser iguales, o sea esos dos correspondientes momentos de inercia deben ser iguales.

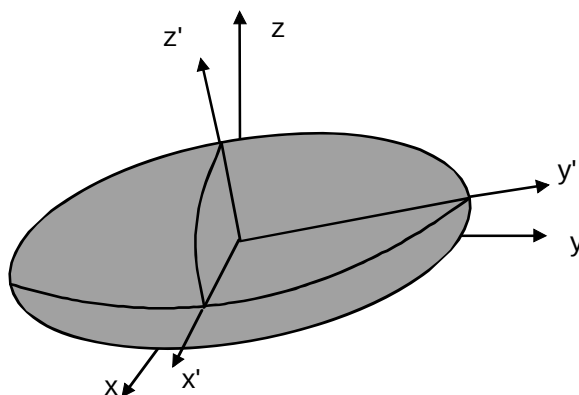


Figura 2.4: Elipsoide de inercia

Rotaciones de los ejes.

Si la matriz de inercia H es conocida en componentes para un sistema ortogonal de ejes en un punto de un cuerpo rígido, podemos obtener la matriz en componentes para ejes rotados ortogonales $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ en el mismo punto simplemente proyectando la matriz de inercia sobre estos nuevos ejes de acuerdo a

$$I_{e_1 e_2} = \hat{e}_1^T \cdot H \hat{e}_2 .$$

Debemos remarcar que la matriz de inercia en un punto de un cuerpo rígido es única. Lo que cambia al cambiar ejes en un punto, son sus elementos o componentes.

Traslaciones de los ejes, Teorema de Steiner

Si se consideran traslaciones (paralelas) de los ejes, la relación de transformación de la matriz de inercia es particularmente simple si uno de los orígenes es el centro de masas G . Tal relación de transformación, conocida como teorema de Steiner sigue del siguiente análisis. Considere que

$$H_O = - \int dm (\vec{r} \times)^2,$$

siendo

$$(\vec{r} \times)^2 = \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ yz & -x^2 - z^2 & yz \\ zx & zy & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos coordenada (x', y', z') relativas a G con origen en el punto (a, b, c) entonces

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + c, \end{aligned}$$

si consideramos además que

$$\int x' dm = \int y' dm = \int z' dm = 0,$$

entonces podemos no considerar los términos que resulten lineales en x' o y' o z' . Así entonces ($\triangleq$ significa equivalente bajo la integral)

$$\begin{aligned} xy &= (x' + a)(y' + b) \triangleq x'y' + ab, \\ y^2 + z^2 &= (y' + b)^2 + (z' + c)^2 \triangleq (y')^2 + (z')^2 + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 -(\vec{r} \times)^2 &= \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yz & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \\
 &\triangleq \begin{pmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'z' & x'^2 + z'^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & x'^2 + y'^2 \end{pmatrix} + \\
 &\quad \begin{pmatrix} c^2 + b^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2 + c^2 & -bc \\ -ca & -cb & a^2 + b^2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene el teorema

$$H_O = H_G + M \begin{pmatrix} c^2 + b^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2 + c^2 & -bc \\ -ca & -cb & a^2 + b^2 \end{pmatrix},$$

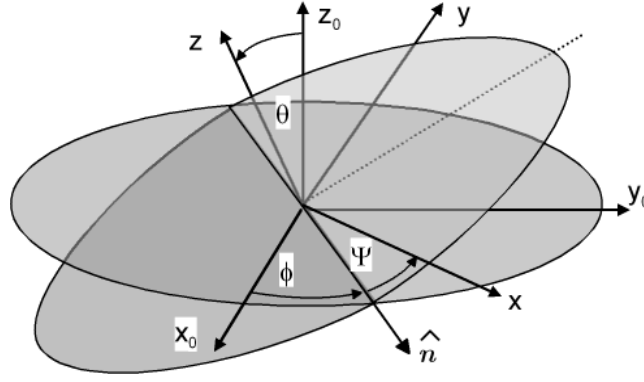
donde a, b, c son las coordenadas cartesianas de G respecto al origen O .

EJERCICIO 2.2.3 *Se tiene un sólido homogéneo en forma de un cono recto circular de altura h , radio basal a , masa m y semi ángulo en el vértice α . Demuestre que:*

- a) *En el vértice sus momentos principales de inercia son $A = B = \frac{3m}{20}(a^2 + 4h^2)$, $C = \frac{3ma^2}{10}$.*
- b) *En el centro de su base son $A = B = \frac{m}{20}(3a^2 + 2h^2)$, $C = \frac{3ma^2}{10}$.*
- c) *El momento de inercia en torno de una generatriz es $I = \frac{3mh^2}{4}(1 + \frac{1}{5} \sec^2 \alpha) \sin^2 \alpha$.*

2.2.6. Ángulos de Euler

Una de las diversas formas de parametrizar la orientación de un cuerpo rígido, es mediante los ángulos de Euler que definiremos de acuerdo a lo siguiente, ver figura (7.3).



Angulos de Euler

- Primero una rotación en ángulo ϕ en torno del eje z_0 original.
- Segundo una rotación en ángulo θ respecto al nuevo eje x (eje n) y
- finalmente una rotación en ángulo Ψ respecto a la posición del eje z de la rotación anterior y que es por lo tanto el eje z final.

El mismo efecto puede ser logrado haciendo una sucesión de tres rotaciones en esos mismos ángulos pero respecto a los ejes originales. La demostración analítica se deja como problema, aquí se establece el resultado desde un punto de vista intuitivo

$$R = R_z(\Psi)R_n(\theta)R_{z_0}(\phi) = R_{z_0}(\phi)R_{x_0}(\theta)R_{z_0}(\Psi), \quad (2.8)$$

de modo que la matriz de la rotación (activa) resultante será

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note cuidadosamente que se trata de rotaciones de un punto de vista activo (rotar el sistema físico). Si ellas son rotaciones de un punto de vista pasivo (rotar el sistema de coordenadas), todos los ángulos involucrados deben cambiarse de signo. Más adelante se deduce la velocidad angular cuando expresada vectorialmente.

2.2.7. Velocidad angular usando matrices

Si se considera un vector de magnitud constante $\vec{r}(t)$ obtenido mediante una rotación matriz de rotación $R(t)$ del vector inicial $\vec{r}(0)$, es decir

$$\vec{r}(t) = R(t)\vec{r}(0)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \frac{dR(t)}{dt}\vec{r}(0) = \frac{dR(t)}{dt}R^{-1}(t)\vec{r}(t) \\ &= \frac{dR(t)}{dt}R^T(t)\vec{r}(t), \end{aligned}$$

pero

$$RR^T = I,$$

de lo cual sale

$$\frac{dR}{dt}R^T + R\frac{dR^T}{dt} = 0,$$

o sea

$$\frac{dR}{dt}R^T = -R\frac{dR^T}{dt} = -\left(\frac{dR}{dt}R\right)^T,$$

que es una matriz antisimétrica $\Omega(t)$ tal que

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \Omega(t)\vec{r}(t),$$

y que ello equivale a

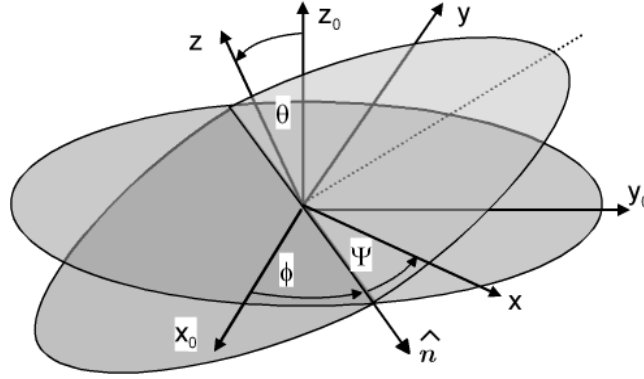
$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t),$$

donde $\vec{\omega}(t)$ es llamado el vector velocidad angular. La matriz Ω está dada por

$$\Omega(t) = \frac{dR(t)}{dt}R^T(t).$$

2.2.8. Velocidad angular usando vectores

Mucho más simple es usando vectores. En términos de los ángulos de Euler, la velocidad angular de un cuerpo puede expresarse



Angulos de Euler

$$\vec{\omega} = \dot{\Psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{n} + \dot{\phi} \hat{k}_0,$$

que nos proponemos expresar en la base fija $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ y en la base que se mueve junto al cuerpo $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$, Para ello debemos relacionar vectores unitarios. De la figura

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \cos \Psi \hat{i}' - \sin \Psi \hat{j}', \\ \hat{k}_0 &= \cos \theta \hat{k} + \sin \theta (\cos \Psi \hat{j} + \sin \Psi \hat{i}), \end{aligned}$$

luego, para ejes fijos al cuerpo

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\Psi} \hat{k} + \dot{\theta} (\cos \Psi \hat{i} - \sin \Psi \hat{j}) + \dot{\phi} (\cos \theta \hat{k} + \sin \theta (\cos \Psi \hat{j} + \sin \Psi \hat{i})) \\ \vec{\omega} &= (\dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi) \hat{i} + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \sin \Psi) \hat{j} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi}) \hat{k}, \end{aligned}$$

que prueba el primer grupo. Similarmente dado que la proyección de $\hat{k}$ en el plano $x_0 y_0$ forma un ángulo ϕ con el eje $-y_0$, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \cos \theta \hat{k}_0 + \sin \theta (\sin \phi \hat{i}_0 - \cos \phi \hat{j}_0), \\ \hat{n} &= \cos \phi \hat{i}_0 + \sin \phi \hat{j}_0, \end{aligned}$$

de donde, para ejes fijos en el espacio

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\Psi} (\cos \theta \hat{k}_0 + \sin \theta (\sin \phi \hat{i}_0 - \cos \phi \hat{j}_0)) + \dot{\theta} (\cos \phi \hat{i}_0 + \sin \phi \hat{j}_0) + \dot{\phi} \hat{k}_0, \\ &= (\dot{\Psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \hat{i}_0 + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\Psi} \sin \theta \cos \phi) \hat{j}_0 + (\dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \hat{k}_0. \end{aligned}$$

2.3. Lagrangiano de un cuerpo rígido

En general, si se usan como coordenadas generalizadas, las tres coordenadas del centro de masa x_G, y_G, z_G , y los tres ángulos de Euler, el Lagrangiano de un cuerpo rígido será

$$L = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_G\vec{\omega} - V.$$

Si los ejes fijos al cuerpo son principales de inercia tendremos

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}I_{xx}(\dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi)^2 + \\ & \frac{1}{2}I_{yy}(-\dot{\theta} \sin \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi)^2 + \frac{1}{2}I_{zz}(\dot{\Psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 - (V_{\text{LagCR}}) \end{aligned}$$

2.4. Ecuaciones dinámicas

Como se señaló, las ecuaciones dinámicas aplicables a un sistema de partículas y en particular a un cuerpo rígido son

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext},$$

y se puede reemplazar la segunda por

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext},$$

para el centro de masas G o un punto A arbitrario, siendo entonces

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A. \quad (2.9)$$

2.4.1. Movimiento Plano

Cuando todas las velocidades de un cuerpo rígido son paralelas a un plano fijo, por ejemplo el plano xy , se tiene un movimiento plano. La velocidad angular del cuerpo será de la forma

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k},$$

y en consecuencia el momentum angular en G estará dado por

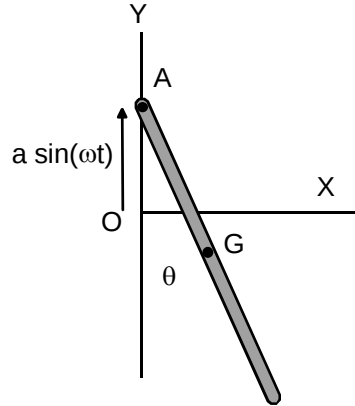
$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Si se trata de una lámina ($z = 0$) o bien simplemente si los ejes son principales de inercia entonces

$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = I_{zz}\omega\hat{k}.$$

Presentaremos algunos ejemplos de dinámica plana de un cuerpo rígido, los cuales permiten además una solución más simple si se usa la relación general (2.9). La utilización de la ecuación (??) normalmente involucra calcular el torque de alguna fuerza desconocida que debe ser finalmente eliminada utilizando la ecuación de movimiento de centro de masas. Compare ese método, con el método utilizado en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2.4.1 *Péndulo de longitud $2b$, masa M cuyo punto de suspensión A oscila verticalmente de la forma $y_A = a \sin \omega t$.*



Péndulo de Kapitza

Solución. Para este caso tenemos que el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgy_G,$$

donde

$$x_G = b \sin \theta, \quad y_G = a \sin \omega t - b \cos \theta,$$

derivando

$$\dot{x}_G = b\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_G = a\omega \cos \omega t + b\dot{\theta} \sin \theta,$$

resultando

$$L = \frac{1}{2}M(2a\omega b\dot{\theta} \cos \omega t \sin \theta + b^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mg(a \sin \omega t - b \cos \theta),$$

entonces

$$\frac{d}{dt}(M(a\omega b \cos \omega t \sin \theta + b^2\dot{\theta}) + I_G\dot{\theta}) - (M(a\omega b\dot{\theta} \cos \omega t \cos \theta) - Mg(b \sin \theta)) = 0,$$

o sea

$$(I_G + Mb^2)\ddot{\theta} = -Mgb \sin \theta + Mbaw^2 \sin \omega t \sin \theta.$$

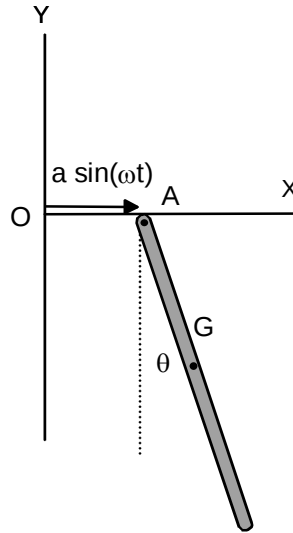
Es ilustrativo comparar con el uso de

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A,$$

obteniendo en dos pasos

$$I_A\ddot{\theta} = -Mgb \sin \theta + Mbaw^2 \sin \omega t \sin \theta.$$

EJEMPLO 2.4.2 *Péndulo de longitud $2b$, masa M cuyo punto de suspensión A oscila horizontalmente en la forma $x_A = a \sin \omega t$.*



Péndulo forzado

Solución. Para este caso

$$L = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgy_G,$$

donde

$$x_G = a \sin \omega t + b \sin \theta, \quad y_G = -b \cos \theta,$$

derivando

$$\dot{x}_G = a\omega \cos \omega t + b\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_G = b\dot{\theta} \sin \theta,$$

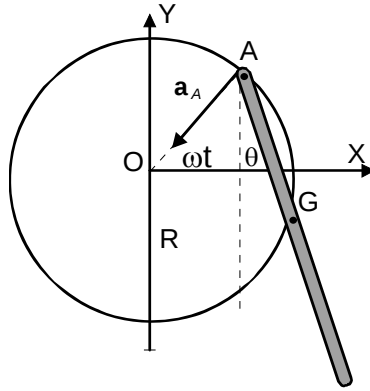
de donde

$$L = \frac{1}{2}M(2a\omega b\dot{\theta} \cos \omega t \sin \theta + b^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mg(-b \cos \theta),$$

resultando

$$(Mb^2 + I_G)\ddot{\theta} = -Mgb \sin \theta + a\omega^2 b \sin \omega t \sin \theta.$$

EJEMPLO 2.4.3 *Péndulo de longitud $2a$, masa M cuyo punto de suspensión A se mueve sobre una circunferencia vertical de radio R con velocidad angular constante ω .*



Barra extremo sobre circunferencia

Solución. Para este caso tenemos

$$x_G = R \cos \omega t + a \sin \theta, \quad y_G = R \sin \omega t - a \cos \theta,$$

derivando

$$\dot{x}_G = -R\omega \sin \omega t + a\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_G = R\omega \cos \omega t + a\dot{\theta} \sin \theta,$$

luego

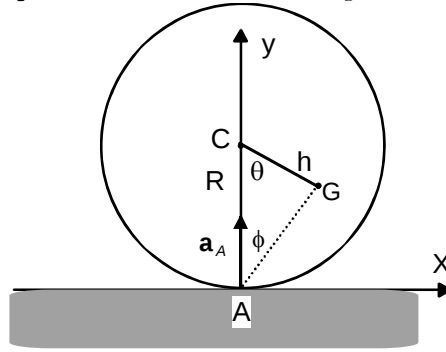
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M(-2R\omega a\dot{\theta} \sin \omega t \cos \theta + 2R\omega a\dot{\theta} \cos \omega t \sin \theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mg(R \sin \omega t - a \cos \theta) \\ &= R\omega a\dot{\theta}M(\sin(\theta - \omega t) + \frac{1}{2}(Ma^2 + I_G)\dot{\theta}^2 - Mg(R \sin \omega t - a \cos \theta), \end{aligned}$$

de donde

$$(Ma^2 + I_G)\ddot{\theta} = -Mga \sin \theta + RaM\omega^2 \cos(\theta - \omega t).$$



EJEMPLO 2.4.4 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio R y masa M sobre un plano horizontal. En este caso la aceleración del punto de contacto A del cuerpo con el suelo es de magnitud $a_A = R\dot{\theta}^2$ hacia arriba.*



Disco que rueda

Solución. El punto de contacto tiene velocidad nula, luego

$$v_G = |\vec{r}_G - \vec{r}_A| \dot{\theta} = \sqrt{R^2 + h^2 - 2Rh \cos \theta} \dot{\theta},$$

y el Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}M(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + Mgh \cos \theta.$$

De aquí

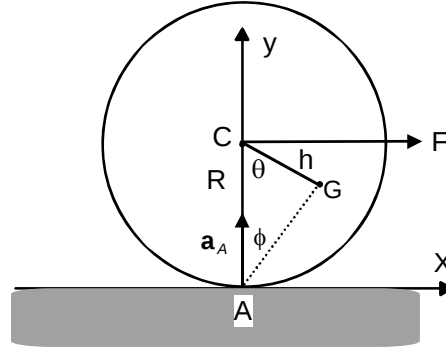
$$\frac{d}{dt}(M(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \theta)\dot{\theta} + I_G\dot{\theta}) - \left(\frac{1}{2}M(2Rh \sin \theta)\dot{\theta}^2 - Mgh \sin \theta\right) = 0,$$

o

$$(I_G + M(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \theta))\ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - MRh\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$



EJEMPLO 2.4.5 *El mismo ejemplo, pero la rueda es actuada por una fuerza horizontal constante de magnitud F sobre su centro.*



Disco tirado por fuerza

Solución. Simplemente agregamos al lado derecho de la ecuación de Lagrange

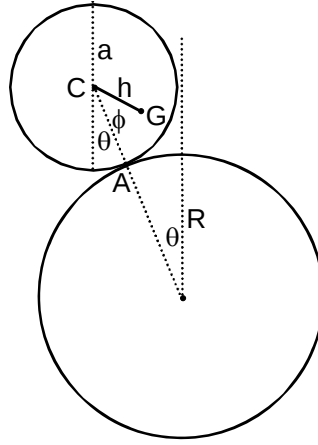
$$Q_\theta = -FR,$$

obteniendo

$$(I_G + M(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \theta))\ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - MRh\dot{\theta}^2 \sin \theta - FR.$$



EJEMPLO 2.4.6 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio a sobre un cilindro fijo de radio R .*



Rueda sobre cilindro

Solución. Aquí la velocidad angular de la rueda está relacionada con el ángulo θ mediante $\omega = (R + a)\dot{\theta}/a$ y $R\theta = a\phi$ suponiendo que inicialmente $\theta = 0, \phi = 0$. Además

$$\begin{aligned} x_G &= -(R + a)\sin\theta + h\sin(\theta + \phi) \\ &= -(R + a)\sin\theta + h\sin(1 + \frac{R}{a})\theta \\ y_G &= (R + a)\cos\theta - h\cos(\theta + \phi) \\ &= (R + a)\cos\theta - h\cos(1 + \frac{R}{a})\theta. \end{aligned}$$

Derivando

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -(R + a)\dot{\theta}\cos\theta + \frac{h}{a}(R + a)\dot{\theta}\cos(1 + \frac{R}{a})\theta, \\ \dot{y}_G &= -(R + a)\dot{\theta}\sin\theta + \frac{h}{a}(R + a)\dot{\theta}\sin(1 + \frac{R}{a})\theta. \end{aligned}$$

Calculamos el Lagrangiano

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M((-\cos\theta + \frac{h}{a}\cos(1 + \frac{R}{a})\theta)^2 + (-\sin\theta + \frac{h}{a}\sin(1 + \frac{R}{a})\theta)^2)\dot{\theta}^2(R + a)^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \\ &\quad - Mg((R + a)\cos\theta - h\cos(1 + \frac{R}{a})\theta), \end{aligned}$$

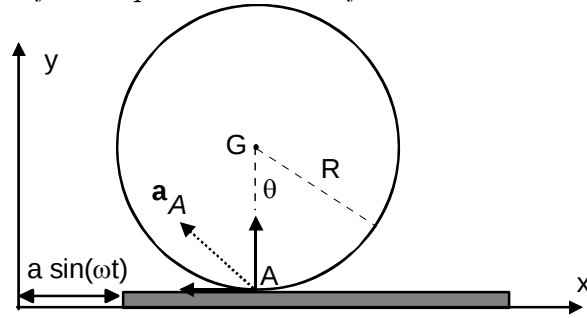
que se simplifica a

$$L = \frac{1}{2}M(R + a)^2(1 + \frac{h^2}{a^2} - 2\frac{h}{a}\cos(\frac{R}{a}\theta))\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mg((R + a)\cos\theta - h\cos(1 + \frac{R}{a})\theta).$$

Entonces

$$M\left(1 + \frac{h^2}{a^2} - 2\frac{h}{a} \cos\left(\frac{R}{a}\theta\right)\right)\ddot{\theta} + \frac{I_G \ddot{\theta}}{(R+a)^2} = \frac{Mg}{R+a} \left(\sin\theta - \frac{h}{a} \sin\left(1 + \frac{R}{a}\theta\right)\right) - M\frac{hR}{a^2} \dot{\theta}^2 \sin\left(\frac{R}{a}\theta\right).$$

EJEMPLO 2.4.7 *Movimiento de rodadura de una rueda de masa M y radio R , sobre una plataforma que oscila de la forma $a \sin \omega t$.*



Rueda sobre plataforma móvil

Solución. La coordenada

$$\begin{aligned} x_G &= a \sin \omega t + R\theta, \\ \dot{x}_G &= a\omega \cos \omega t + R\dot{\theta}, \end{aligned}$$

luego

$$L = \frac{1}{2}M(2a\omega R\dot{\theta} \cos \omega t + R^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2,$$

lo cual conduce a

$$\frac{d}{dt}(M(a\omega R \cos \omega t + R^2\dot{\theta}) + I_G\dot{\theta}) = 0,$$

o bien

$$(I_G + MR^2)\ddot{\theta} = -MaR\omega^2 \sin \omega t.$$

2.5. Movimiento en tres dimensiones

2.5.1. Ecuaciones de Euler

Consideremos primero, un cuerpo que se mueve sostenido de uno de sus puntos, bajo la acción de la reacción en el punto de suspensión y alguna otra fuerza que realice algún torque respecto al punto fijo. Además considere ejes principales $OXYZ$ móviles fijos al cuerpo rígido con origen en el punto fijo O . Como sabemos, podemos escribir

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Gamma}_0, \quad (2.10)$$

pero, en ejes principales

$$\vec{L}_0 = I_{xx}\omega_x\hat{i} + I_{yy}\omega_y\hat{j} + I_{zz}\omega_z\hat{k},$$

y su derivada será

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = I_{xx}\dot{\omega}_x\hat{i} + I_{yy}\dot{\omega}_y\hat{j} + I_{zz}\dot{\omega}_z\hat{k} + \vec{\omega} \times \vec{L}_0,$$

de modo que si tomamos las componentes de la ecuación (2.10) se obtendrá con algún trabajo las llamadas ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= \Gamma_x^{ext} \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= \Gamma_y^{ext} \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= \Gamma_z^{ext}. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones determinan completamente las componentes de la velocidad angular del cuerpo si el torque es conocido.

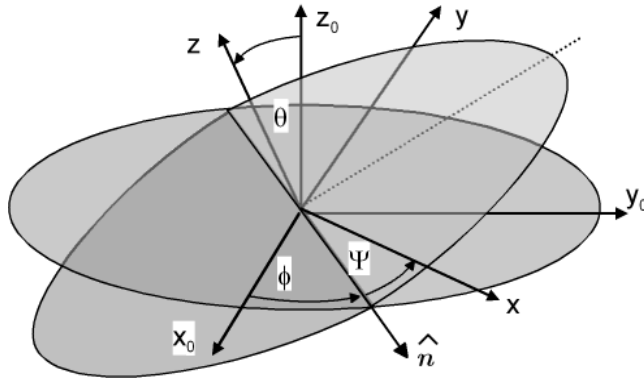
2.5.2. Ecuaciones de Euler a partir de ecuaciones de Lagrange

Cuando un cuerpo rígido se mueve manteniendo su centro de masa fijo y se utilizan ejes principales de Inercia fijos al cuerpo rígido, se tiene que el Lagrangiano es la energía cinética de rotación. De ?? cambiando la notación

$A = I_{xx}$, $B = I_{yy}$ y $C = I_{zz}$. Recordando que la velocidad angular de un cuerpo puede expresarse en el sistema de ejes móviles fijos al cuerpo:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi, \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \sin \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi, \\ \omega_z &= \dot{\Psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

el Lagrangiano se puede escribir



Trabajo virtual realizado por el torque para un cambio virtual $\delta\Psi$ es $\delta W = \Gamma_z \delta\Psi$, luego $Q_\Psi = \Gamma_z$. Considere

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}A\omega_x^2 + \frac{1}{2}B\omega_y^2 + \frac{1}{2}C\omega_z^2 = \\ &\frac{1}{2}A(\dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi)^2 + \\ &\frac{1}{2}B(\dot{\theta} \sin \Psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi)^2 + \frac{1}{2}C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi})^2.\end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} &= C\omega_z, \\ \frac{\partial L}{\partial \Psi} &= A\omega_x(-\dot{\theta} \sin \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi) + B\omega_y(\dot{\theta} \sin \Psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi), \\ &= A\omega_x\omega_y - B\omega_y\omega_x,\end{aligned}$$

luego

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = C\dot{\omega}_z - A\omega_x\omega_y + B\omega_y\omega_x = Q_\Psi = \Gamma_z.$$

Como el eje z es simplemente uno de los ejes principales de inercia, se deduce lo mismo para todos ellos

$$\begin{aligned} C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_y\omega_x &= \Gamma_z, \\ A\dot{\omega}_x - (B - A)\omega_y\omega_z &= \Gamma_x, \\ B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= \Gamma_y. \end{aligned}$$

2.5.3. Torque nulo

Consideremos segundo, un cuerpo que se mueve sostenido de su centro de masa fijo, bajo la acción de la reacción en el punto de suspensión solamente, de modo que el torque de las fuerzas externas respecto al punto de suspensión es nulo. Además considere ejes principales móviles fijos al cuerpo rígido con origen en el punto fijo O . Usando las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= 0 \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= 0 \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= 0. \end{aligned}$$

Además es de utilidad considerar que lo anterior es el reflejo de $\vec{L}_0 =$ constante. O sea

$$\vec{L}_0 = I_{xx}\omega_x\hat{i} + I_{yy}\omega_y\hat{j} + I_{zz}\omega_z\hat{k} = \text{constante}.$$

Si además no hay roce, se conserva la energía cinética de modo que

$$K = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2 = \text{constante}. \quad (2.11)$$

También sigue de las ecuaciones anteriores que

$$\vec{L}_0 \cdot \vec{\omega} = 2K = \text{constante},$$

de modo que la velocidad angular permanece sobre un plano fijo perpendicular a $\vec{L}_0$. Además la magnitud del momentum angular es constante, lo cual agrega otra condición (no es independiente)

$$L_0^2 = I_{xx}^2\omega_x^2 + I_{yy}^2\omega_y^2 + I_{zz}^2\omega_z^2 = \text{constante}. \quad (2.12)$$

EJERCICIO 2.5.1 *A partir de las ecuaciones de Euler pruebe las ecuaciones 2.11 y 2.12.*

Pensemos ahora como se ven las cosas para un observador que se mueve junto con el cuerpo rígido. Para él las direcciones de los ejes permanecen fijas y observa que la velocidad angular varía en esos ejes. De acuerdo a él, la punta del vector velocidad angular se mueve en un punto que es la intersección de dos elipsoides fijos al cuerpo.

$$I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 = 2K$$

y

$$L_0^2 = I_{xx}^2\omega_x^2 + I_{yy}^2\omega_y^2 + I_{zz}^2\omega_z^2 = L_0^2,$$

el primero de los cuales se denomina elipsoide de Poinsot. Además, como explicamos, la punta de vector velocidad angular permanece sobre un plano fijo. Notemos además que la normal al elipsoide de Poinsot donde está $\vec{\omega}$ es $\vec{n} = I_{xx}\omega_x\hat{i} + I_{yy}\omega_y\hat{j} + I_{zz}\omega_z\hat{k}$ o sea precisamente el momentum angular, de modo que el plano invariable es tangente al elipsoide de Poinsot. El cuadro que sigue de aquí es que el elipsoide de Poinsot, que se mueve junto con el cuerpo, rueda sin deslizar sobre el plano invariable. Este movimiento, bastante complicado, representa el movimiento de un cuerpo rígido con torque nulo. Desafortunadamente las ecuaciones para ω_x , ω_y , ω_z resultan elípticas (complicadas) por lo cual no ahondaremos más aquí. Si se interesa vea [8, (pag.378)]. Sin embargo, el problema se simplifica si el sólido rígido es de simetría de revolución.

2.5.4. Cuerpo simétrico

Supondremos ahora que el cuerpo tiene simetría de revolución de modo que

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{yy} = A, \\ I_{zz} &= C. \end{aligned}$$

Ahora las ecuaciones de Euler se simplifican a

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (A - C)\omega_y\omega_z &= 0 \\ A\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= 0 \\ C\dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$\begin{aligned}\omega_z &= \text{constante}, \\ \omega_x^2 + \omega_y^2 &= \text{constante}.\end{aligned}$$

Si denotamos por α el ángulo que $\vec{\omega}$ forma con el eje z , ver figura (2.5) sigue que

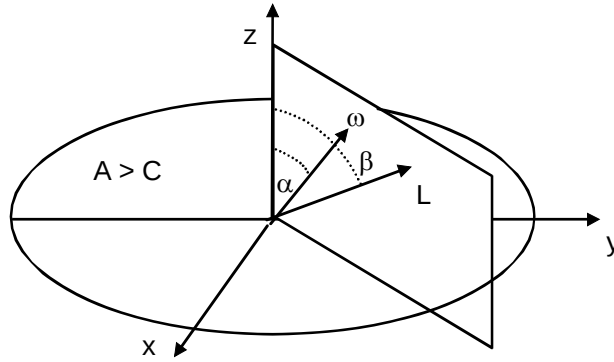


Figura 2.5: Cuerpo simétrico

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \text{constante}, \\ \omega_z &= \omega \cos \alpha, \\ \omega_\perp &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \omega \sin \alpha, \\ \tan \beta &= \frac{A}{C} \tan \alpha\end{aligned}$$

de modo que si se coloca

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_\perp \cos \phi, \\ \omega_y &= \omega_\perp \sin \phi,\end{aligned}$$

cualquiera de las dos primeras ecuaciones de Euler conduce a

$$-A\omega_\perp \sin \phi \dot{\phi} - (A - C)\omega_\perp \sin \phi \omega_z = 0,$$

o sea

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{(C - A)}{A} \omega_z, \\ \phi &= \frac{(C - A)}{A} \omega_z t.\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{\perp} \cos \frac{(C - A)}{A} \omega_z t, \\ \omega_x &= \omega_{\perp} \sin \frac{(C - A)}{A} \omega_z t.\end{aligned}$$

Movimiento en el espacio

De acuerdo a los resultados anteriores, se conoce como varía la velocidad angular del cuerpo respecto a ejes fijos al cuerpo. El movimiento del cuerpo en el espacio, al menos en su descripción cualitativa se deduce del hecho que el momentum angular es constante. La dirección del eje z , el momentum angular y la velocidad angular permanecen sobre un plano formando ángulos constantes entre ellos, de manera que ese plano debe girar en torno a la línea del momentum angular, con cierta velocidad angular que llamaremos Ω . Se forman entonces dos conos. El cono que describe $\vec{\omega}$ al girar en torno a $\vec{L}_0$, llamado cono del espacio porque es un cono fijo. El cono que describe $\vec{\omega}$ en torno al eje z , llamado cono del cuerpo, porque se mueve de la misma manera que el cuerpo. Las figuras siguientes ilustran esos conos para los dos casos, $A > C$ y $A < C$.

Entonces, mirado desde un sistema inercial, $\vec{\omega}$ precesa en torno de $\vec{L}$, formando un cono fijo en el espacio. Además el cono que forma $\vec{\omega}$ en torno a z , rueda sin deslizar sobre el cono fijo al espacio. Rueda sin deslizar porque todos los puntos del cuerpo rígido a lo largo de $\vec{\omega}$ tienen velocidad nula, ver figura (??).

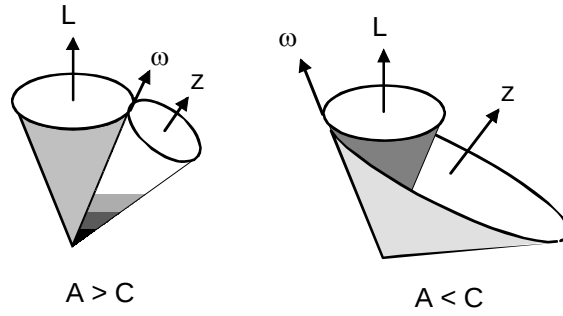
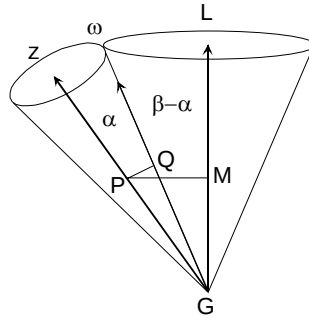


Figura 2.6: Conos del espacio y del cuerpo



Cono fijo y del espacio.

Tenemos entonces, un problema de cinemática. Sea Ω la velocidad angular de z en torno a $\vec{L}$, entonces

$$v_P = \Omega \cdot PM = \omega \cdot PQ$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{PG} &= \sin \alpha, \\ \frac{PM}{PG} &= \sin \beta, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Omega = \frac{PQ}{PM} \omega = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \omega,$$

pero $\tan \beta = (A/C) \tan \alpha$ y puede obtenerse

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\sin \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \beta}}{\tan \beta} \omega, \\ &= \omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}\end{aligned}$$

o bien con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}.$$

¿Es el movimiento del cuerpo periódico?

Con respecto a la figura anterior, la velocidad angular del cuerpo puede descomponerse de la siguiente manera

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k} + \Omega \hat{k}_0$$

donde $\hat{k}_0$ es unitario en la dirección de $\vec{L}_0$. De modo que

$$\vec{\omega} \cdot \hat{k} = \dot{\phi} + \Omega \hat{k}_0 \cdot \hat{k}$$

o sea

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \Omega \hat{k}_0 \cdot \hat{k} - \vec{\omega} \cdot \hat{k} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \omega \cos \beta - \omega \cos \alpha \\ &= \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \omega - \omega \cos \alpha \\ &= \frac{C - A}{A} \omega \cos \alpha,\end{aligned}$$

como ya sabíamos.

Como explicamos el eje de simetría del cuerpo da una vuelta completa en un tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}},$$

pero en ese tiempo el plano que contiene z , $\vec{L}_0$ y $\vec{\omega}$ ha girado respecto del cuerpo un ángulo

$$\phi = \frac{(C - A)}{A} \omega_z t = \frac{(C - A)}{A} \frac{2\pi \cos \alpha}{\sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}},$$

que no es necesariamente un múltiplo de 2π . Supongamos $\alpha = \pi/6$, $A = \frac{1}{4}MR^2$, $C = \frac{1}{2}MR^2$, resulta

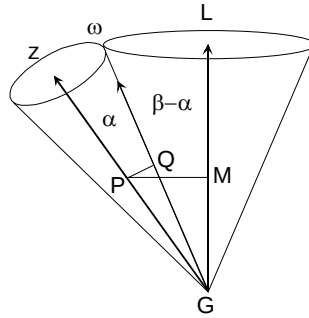
$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \frac{4}{13} \frac{\pi}{\omega} \sqrt{13},$$

$$\phi = \frac{(C - A)}{A} \frac{2\pi \cos \alpha}{\sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \frac{2\pi}{13} \sqrt{3} \sqrt{13} = 0,960\,769\pi$$

Otro modo de averiguar sobre el giro del cuerpo sobre su eje

El cono del cuerpo rueda sin deslizar sobre el cono del espacio. El punto Q describe una circunferencia de perímetro

$$2\pi GQ \sin(\beta - \alpha).$$



Cono fijo y del espacio.

Este perímetro debe igualar a ϕ veces el radio de la circunferencia del cono del cuerpo cuyo radio es

$$GQ \sin \alpha.$$

Al igualar se obtiene

$$\begin{aligned} \phi \omega \sin \alpha &= 2\pi \omega \sin(\beta - \alpha), \\ \tan \beta &= \frac{A}{C} \tan \alpha \end{aligned}$$

que junto con $\tan \beta = \frac{A}{C} \tan \alpha$, conduce a (haga el desarrollo)

$$\phi = \frac{(C - A)}{A} \frac{2\pi \cos \alpha}{\sqrt{\frac{C^2}{A^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}},$$

salvo un signo que es irrelevante.

2.5.5. Trompo simétrico.

Considere un trompo simétrico que mantiene su púa fija. Para los ángulos θ, ϕ, ψ indicados en la figura (2.7), siendo M su masa, h la distancia de la púa al centro de masa y A, C , los momentos de inercia, para un eje perpendicular al eje de simetría y respecto al eje de simetría, en el origen. Escriba las ecuaciones de movimiento.

Se puede deducir que el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} A (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} C (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgh \cos \theta,$$

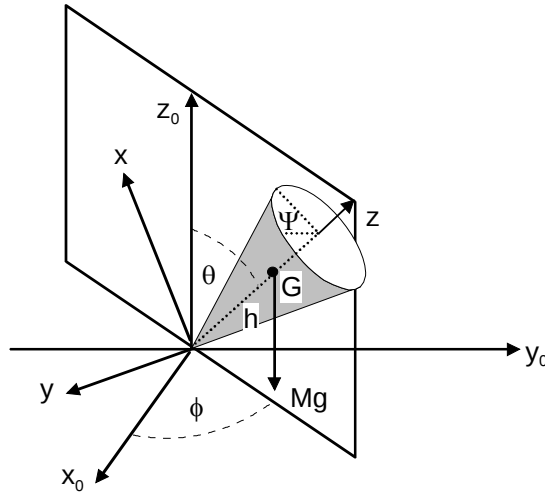


Figura 2.7: Trompo simétrico

Solución. de allí

$$p_\theta = A\dot{\theta},$$

$$p_\phi = A(\sin^2 \theta)\dot{\phi} + C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta,$$

$$p_\psi = C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}),$$

considerando que el lagrangiano es cíclico en ψ , y φ , y que no contiene el tiempo en forma explícita, se conservan $H = E$, p_ψ , y p_ϕ . Por lo tanto, tenemos

$$s \equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante},$$

$$A(\sin^2 \theta)\dot{\phi} + Cs \cos \theta = \alpha = \text{constante},$$

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}C(s)^2 + mgh \cos \theta = \text{constante}.$$

Una ecuación que determina los cambios de la inclinación del eje del trompo, ángulo θ , puede obtenerse al eliminar $\dot{\phi}$ a través de α en la ecuación de la energía. Si se define $u = \cos \theta$, se obtiene (ver apéndice)

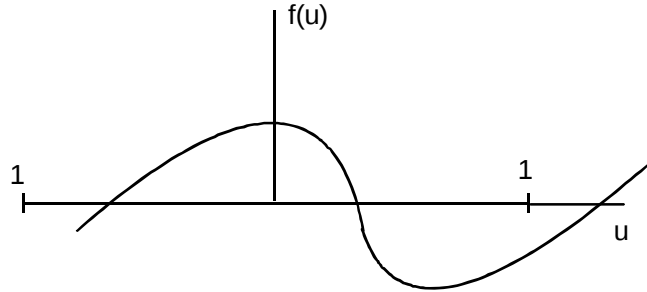
$$\dot{u}^2 = f(u) = (2E - Cs^2 - 2mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2,$$

polinomio cúbico, cuyas raíces entre -1 y 1 tienen importancia en la determinación de la inclinación del eje del trompo en su movimiento. Nuevo hasta aquí

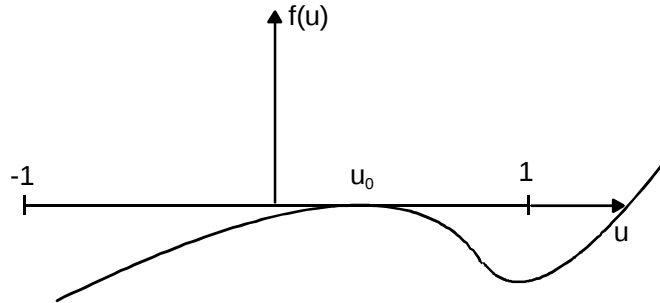


$$\dot{u}^2 = f(u) = (2E - Cs^2 - 2Mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2,$$

polinomio cúbico en u , cuyas dos raíces entre -1 y 1 tienen importancia en la determinación de la inclinación del eje del trompo en su movimiento. En las figuras siguientes se muestran tres casos particulares donde la forma de $f(u)$, la cual está determinada por las condiciones iniciales, determina el tipo de movimiento que se realiza.

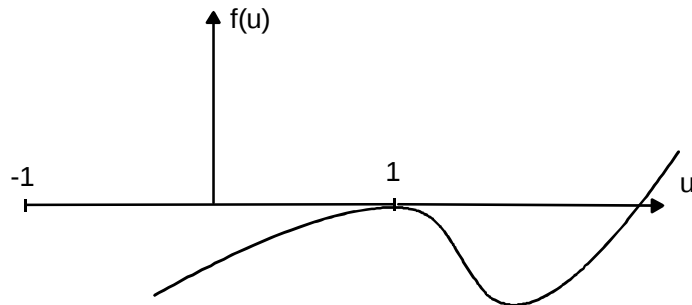
Raíces de $f(u)$, caso genérico

En el primer caso, hay dos raíces en el intervalo $-1, 1$ y la tercera, como es lo usual es mayor que uno. El eje el trompo oscila entre las inclinaciones dadas por esas dos raíces.



Precesión uniforme

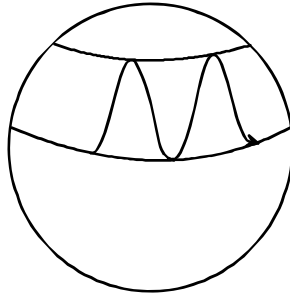
El segundo caso corresponde a una inclinación constante θ_0 del eje del trompo, caso llamado de precesión uniforme que se caracteriza por ser $f(u_0) = 0$ y $f'(u_0) = 0$.



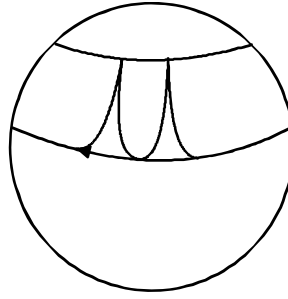
Trompo dormido

El último caso corresponde al caso de trompo dormido estable, es decir donde el eje del trompo permanece vertical y está caracterizado por ser

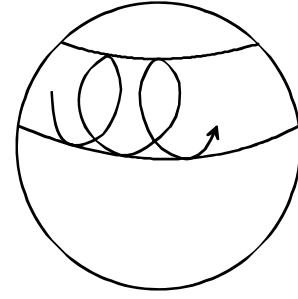
$f(1) = 0$ y $f'(1) = 0$. Otras características del movimiento del trompo se visualizan mejor siguiendo el movimiento del centro de masas, el cual se mueve sobre una esfera, como se indica en la figura siguiente para tres casos posibles. En el primero $\dot{\phi} > 0$, en el segundo $\dot{\phi}$ se anula en el punto más alto



precesión positiva



movimiento cuspidal



movimiento con loops

y en el tercero $\dot{\phi}$ se anula y por lo tanto cambia de signo entre las inclinaciones máximas y mínimas del eje del trompo.

La solución completa para condiciones iniciales arbitrarias es complicada pero esbozaremos lo que se necesita hacer. Las condiciones iniciales de posición y velocidad del trompo determinan las constantes E , s y α . La inclinación del eje polar θ se obtendría integrando la última ecuación que tiene la forma

$$dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

y que conduce a funciones elípticas. En efecto $f(u)$ que es un polinomio cúbico puede escribirse

$$f(u) = \frac{2Mgh}{A}(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3),$$

donde supondremos que hemos ordenado las raíces de acuerdo a

$$-1 < u_1 < u_2 < 1 < u_3.$$

Sea además $z = \sqrt{u - u_1}$ de modo que $2z\dot{z} = \dot{u}$ entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{2Mgh}{A}(z^2)(z^2 + u_1 - u_2)(z^2 + u_1 - u_3), \\ du &= 2zdz \end{aligned}$$

de modo que

$$dt = \sqrt{\frac{2A}{Mgh}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - (u_2 - u_1))(z^2 - (u_3 - u_1))}},$$

que nos proponemos reducir a la forma canónica (ver apéndice)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad (0 < k^2 < 1).$$

Para ello la escribimos

$$\frac{2A}{Mgh} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = ((u_2 - u_1) - z^2)((u_3 - u_1) - z^2),$$

sea además $z = \sqrt{(u_2 - u_1)}w$ entonces

$$\frac{2A}{Mgh(u_3 - u_1)} \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = (1 - w^2)\left(1 - \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}w^2\right),$$

de aquí, puede obtenerse

$$w = \operatorname{sn}(p(t - t_0)),$$

donde p y el módulo de la función elíptica sn están dados por

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{Mgh(u_3 - u_1)}{2A}, \\ k^2 &= \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}. \end{aligned}$$

Así finalmente la solución será

$$\begin{aligned} \cos \theta &= u_1 + z^2 \\ &= u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2(p(t - t_0)). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.5.1 *Considere un trompo simétrico con momentos de inercia C , A , masa m y distancia h de su púa fija al centro de masas, que durante su movimiento tiene valores extremos para θ iguales a θ_1 y θ_2 . Determine valores iniciales adecuados de la precesión en términos del spin s para que ello ocurra, y analice la posibilidad de que la precesión $\dot{\phi}$ se anule en el intervalo.*

Solución. Dado que son conocidos los extremos del ángulo polar θ_1 y θ_2 , una primera condición es que $\dot{\theta}$ se anule en θ_1 y θ_2 , de donde las constantes del movimiento son

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2mgh \cos \theta_1 \\ &= A\dot{\phi}_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2mgh \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= A(\sin^2 \theta_1) \dot{\phi}_1 + Cs \cos \theta_1 \\ &= A(\sin^2 \theta_2) \dot{\phi}_2 + Cs \cos \theta_2\end{aligned}$$

de modo que al eliminar $\dot{\phi}_2$ y simplificando se puede obtener

$$(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \Omega^2 - 2 \frac{Cs}{A} \Omega + \frac{2mgh \sin^2 \theta_2}{A \sin^2 \theta_1} - \frac{C^2 s^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}{A^2 \sin^2 \theta_1} = 0,$$

ecuación de segundo grado que relaciona la precesión inicial $\dot{\phi}_1 = \Omega$ con el spin s para que en el movimiento se realicen los extremos de θ dados. Si llamamos $a = mghA/(Cs)^2$ la solución de la ecuación anterior puede escribirse como

$$\Omega = \frac{Cs}{A(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)} \left(1 \mp \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \sqrt{1 - 2a(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)} \right).$$

La condición para que existan valores reales de Ω es $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 < \frac{1}{2}a$. Puede además observarse que si $\theta_1 = \theta_2$ se obtiene entonces una condición para el movimiento llamado de precesión uniforme, donde θ permanece constante

$$\Omega^2 \cos \theta - \frac{Cs}{A} \Omega + \frac{2mgh}{A} = 0.$$

En el capítulo de cuerpo rígido se analizan, en diversos ejemplos, las condiciones para que el trompo realice “loops” partiendo de cualquiera de las posiciones extremas de inclinación del ángulo θ .



EJEMPLO 2.5.2 *Considere un trompo simétrico con momentos de inercia C , A , masa m y distancia h de su púa fija al centro de masas, que baila dormido con $\theta = 0$. Analice la estabilidad de este movimiento.*

Solución. Aquí

$$2E - Cs^2 = A\dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta + 2mgh \cos \theta = 2mgh,$$

$$\alpha = A(\sin^2 \theta) \dot{\phi} + Cs \cos \theta = Cs,$$

de donde

$$\dot{u}^2 = f(u) = (2mgh - 2mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left(\frac{Cs - Csu}{A} \right)^2,$$

o bien

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{2mgh}{A}(1-u)^2 \left(u - \left(\frac{C^2 s^2}{2mghA} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{2mgh}{A}(1-u)^2(u-u_3). \end{aligned}$$

El movimiento del trompo será estable si $f(u) < 0$ en el rango $-1 < u < 1$, por lo cual la tercera raíz debe ser mayor que uno, o sea $u_3 = C^2 s^2 / (2mghA) - 1 > 1$, entonces $C^2 s^2 > 4mghA$, es la condición de estabilidad del trompo dormido. Si esta condición no se cumple, el trompo se moverá de acuerdo a

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{\frac{2mgh}{A}}(1-u)\sqrt{(u-u_3)},$$

que integraremos como sigue

$$t = -\sqrt{\frac{A}{2mgh}} \int_1^u \frac{du}{(1-u)\sqrt{u-u_3}}.$$

Sea $u = 1 - (1-u_3)\sin^2 \psi$, $du = -2(1-u_3)\sin \psi \cos \psi d\psi$ entonces

$$t = -\sqrt{\frac{A}{2mgh}} \int_0^\psi \frac{-2(1-u_3)d\psi}{(1-u_3)\sin \psi \sqrt{(1-u_3)}},$$

o bien

$$t = \frac{2A}{\sqrt{2mghA}\sqrt{(1-u_3)}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sin \psi} = \infty,$$

o sea el trompo tarda infinito tiempo en alcanzar la inclinación dada por $\cos \theta = C^2 s^2 / (2mghA) - 1$.

2.5.6. Bola que rueda sobre un plano, sometida en su centro a una fuerza

Suponga que una bola homogénea de masa M , radio R , rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, plano OXY , actuada en su centro G por una fuerza (elástica) hacia el eje OZ , $-k\vec{r}$, además del peso, la reacción normal

y la fuerza de roce en el punto de contacto P , suponiendo que ella no realiza trabajo en la situación de no deslizamiento, ver figura (2.8). Utilizando las componentes de la velocidad angular en los ejes fijo, en términos de los ángulos de Euler, θ, ϕ , y ψ , el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

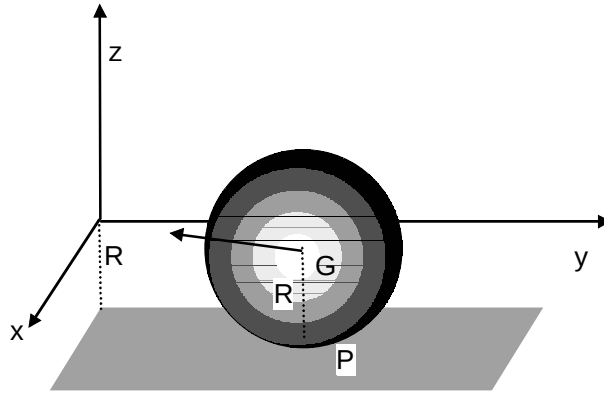


Figura 2.8: Esfera atraída hacia el origen

o sea

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2),$$

y las restricciones adicionales no holonómicas debido a que el punto de contacto tiene velocidad cero son

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (-R\hat{k}) = 0,$$

es decir

$$\dot{x} - R\omega_y = 0, \quad \dot{y} + R\omega_x = 0. \quad (2.13)$$

Considerando las componentes de la velocidad angular en ejes fijos al espacio en términos de los ángulos de Euler

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{aligned}$$

El lagrangiano resulta

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\Psi}\cos\theta) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2),$$

y las dos relaciones de vínculos

$$\dot{x} - R(-\dot{\Psi}\cos\phi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\phi) = 0,$$

$$\dot{y} + R(\dot{\Psi}\sin\phi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\phi) = 0.$$

Además

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = M\ddot{x} + kx,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = M\ddot{y} + ky,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} + I\dot{\phi}\dot{\Psi}\sin\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = I\frac{d}{dt}((\dot{\phi} + \dot{\Psi}\cos\theta))$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = I\frac{d}{dt}(\dot{\Psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$$

Al utilizar dos multiplicadores de Lagrange, se tiene

$$M\ddot{x} + kx = \lambda_1, \quad (2.14)$$

$$M\ddot{y} + ky = \lambda_2, \quad (2.15)$$

$$I(\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\Psi}\sin\theta) = -\lambda_1 R\sin\phi + \lambda_2 R\cos\phi, \quad (2.16)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{d}{dt}(\dot{\phi} + \dot{\Psi}\cos\theta) = 0, \quad (2.17)$$

$$I(\ddot{\Psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta) = \lambda_1 R\cos\phi\sin\theta + \lambda_2 R\sin\phi\sin\theta. \quad (2.18)$$

De aquí, el álgebra es algo tediosa. De la ecuación (2.17) obtenga $\ddot{\phi}$

$$\ddot{\phi} = -\ddot{\Psi}\cos\theta + \dot{\Psi}\dot{\theta}\sin\theta$$

y reemplacemos en la ecuación (2.18). En seguida, de las ecuaciones (5.27) y (2.18) obtenga λ_1 y λ_2 . Despejemos

$$-\lambda_1\sin\phi + \lambda_2\cos\phi = \frac{I}{R}(\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\Psi}\sin\theta),$$

$$\lambda_1\cos\phi + \lambda_2\sin\phi = \frac{I}{R}(\ddot{\Psi}\sin\theta + \dot{\Psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta})$$

Compruebe que se obtiene

$$\lambda_1 = \frac{I}{R}(\ddot{\Psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\Psi} \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\Psi} \sin \phi \sin \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi - \ddot{\theta} \sin \phi),$$

$$\lambda_2 = \frac{I}{R}(\ddot{\Psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\Psi} \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta + \dot{\phi} \dot{\Psi} \cos \phi \sin \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \phi + \ddot{\theta} \cos \phi),$$

o sea

$$\lambda_1 = -\frac{I}{R}\dot{\omega}_y = -\frac{I}{R^2}\ddot{x}, \quad \lambda_2 = \frac{I}{R}\dot{\omega}_x = -\frac{I}{R^2}\ddot{y}, \quad (2.19)$$

de allí es fácil obtener, un sorprendentemente simple resultado para las ecuaciones de movimiento de las coordenadas del centro de masas de la esfera, es decir

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{x} + kx = 0, \quad (2.20)$$

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{y} + ky = 0, \quad (2.21)$$

que, para el caso especial de la esfera con $I = \frac{2}{5}MR^2$ y una fuerza $\vec{F} = (F_x, F_y)$ es

$$M\vec{a}_G = \frac{5}{7}\vec{F},$$

para una fuerza cualquiera $\vec{F}$ aplicada al centro, paralelamente al plano horizontal. Las ecuaciones diferenciales para los ángulos de Euler no las analizaremos aquí.

Es ilustrativo sin embargo, comparar con el planteamiento usual, newtoniano.

Las ecuaciones dinámicas son más simples. Si $\vec{f}$ denota la fuerza de roce, entonces

$$M\vec{a}_G = \vec{F} + \vec{f}, \quad (2.22)$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -R\hat{k} \times \vec{f}, \quad (2.23)$$

además aplica la restricción de no resbalamiento

$$0 = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (-R\hat{k}). \quad (2.24)$$

Derivando la (2.24) respecto al tiempo y reemplazando en ella las aceleraciones, se obtiene

$$0 = \vec{F} + \left(1 + \frac{MR^2}{I}\right) \vec{f}, \quad (2.25)$$

de donde la ecuación de movimiento del centro de masas es:

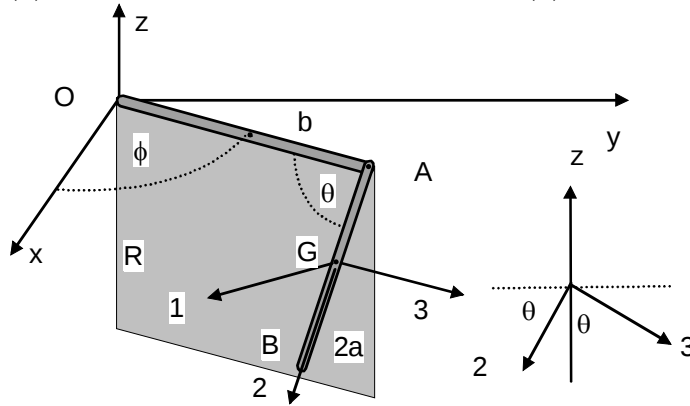
$$M\vec{a}_G = \frac{\vec{F}}{1 + I/(MR^2)}.$$

COROLARIO 1 *No siempre el método de Lagrange simplifica el problema.*

NOTA 2.1 La esfera que resbala, no es susceptible de un tratamiento con el método de Lagrange.

EJEMPLO 2.5.3 *Este ejemplo se desarrollará por método tradicional y por el método de Lagrange para comprender las diferencias y ventajas de un método sobre otro. Considere una barra de masa m y de longitud $2a$, la cual puede oscilar libremente en torno a un articulación en A variando sólo el ángulo de inclinación θ definido con la barra horizontal OB de longitud b la cual gira en torno al eje OZ con velocidad angular constante ω . La barra AB permanece sobre el plano gris que rota en torno al eje OZ con velocidad angular constante ω . Determine la ecuación de movimiento para el ángulo θ .*

Solución. En la figura se ilustran ejes principales (1), (2) y (3) fijos a la barra en su centro de masa (2) a lo largo de la barra, (1) perpendicular al plano gris y (3) sobre ese plano y perpendicular a (2).



Solución. Método de Lagrange: La velocidad angular de la barra es

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_1 \\ &= -\omega(\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_2) + \dot{\theta} \hat{e}_1.\end{aligned}$$

La velocidad del centro de masa puede escribirse

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (a\hat{e}_2) \\ &= -b\omega\hat{e}_1 + (-\omega \cos \theta \hat{e}_3 + \dot{\theta}\hat{e}_1) \times (a\hat{e}_2) \\ &= (\omega a \cos \theta - b\omega)\hat{e}_1 + a\dot{\theta}\hat{e}_3.\end{aligned}$$

Si I indica el momento de inercia de la barra para un eje perpendicular a ella en G , entonces

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m((\omega a \cos \theta - b\omega)^2 + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\omega a \cos \theta - b\omega)^2 + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta),\end{aligned}$$

luego el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m((\omega a \cos \theta - b\omega)^2 + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta) + mga \sin \theta,$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ma^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m(\omega a \cos \theta - b\omega)\omega a \sin \theta - I(\omega^2 \cos \theta \sin \theta) + mga \cos \theta,\end{aligned}$$

y resulta la ecuación de movimiento

$$(ma^2 + I)\ddot{\theta} + m(\omega a \cos \theta - b\omega)\omega a \sin \theta + I(\omega^2 \cos \theta \sin \theta) - mga \cos \theta = 0,$$

que puede simplificarse a

$$(ma^2 + I)\ddot{\theta} + \omega^2(ma^2 + I) \cos \theta \sin \theta - mb\omega^2 a \sin \theta - mga \cos \theta = 0.$$



2.6. Ejemplos

EJEMPLO 2.6.1 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h se coloca en movimiento con su eje inclinado en $\pi/2$. Con un movimiento de spin s . Determine la precesión inicial $\dot{\phi}(0) = \Omega$ para el trompo pase por $\theta = 0$.*

Solución. Podemos evaluar las constantes

$$\begin{aligned}s &\equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante}, \\ \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + Mgh \cos \theta + \frac{1}{2}Cs^2 \\ &= \frac{1}{2}Cs^2 + \frac{1}{2}A\Omega^2\end{aligned}$$

entonces

$$f(u) = (A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{(1 - u^2)}{A} - \left(\frac{A\Omega - Csu}{A} \right)^2.$$

Una raíz es

$$u_1 = 0,$$

y la otra debe ser $u = 1$ por lo tanto

$$A\Omega - Cs = 0.$$



EJEMPLO 2.6.2 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h se coloca en movimiento con su eje vertical hacia arriba. Con un movimiento de spin s solamente. Determine la condición para que el movimiento sea estable.*

Solución. De acuerdo a las condiciones iniciales podemos evaluar las constantes

$$\begin{aligned}s &\equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante}, \\ \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A(\sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + Mgh \cos \theta + \frac{1}{2}Cs^2 \\ &= Mgh + \frac{1}{2}Cs^2,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 f(u) &= (2Mgh - 2Mghu) \frac{(1-u^2)}{A} - \left(\frac{Cs - Csu}{A} \right)^2, \\
 &= 2Mgh(1-u) \frac{(1-u^2)}{A} - \frac{C^2 s^2}{A^2} (1-u)^2, \\
 &= \frac{(1-u)^2}{A} \left(2Mgh(1+u) - \frac{C^2 s^2}{A} \right).
 \end{aligned}$$

O sea hay dos raíces repetidas $u = 1$, y la tercera raíz es

$$u_3 = \frac{C^2 s^2}{2MghA} - 1.$$

Si la tercera raíz fuera menor que 1 entonces el eje del trompo se movería entre $\theta = 0$ y el valor de $\cos \theta = u_3$. Para que ello no ocurra, trompo estable, debe ocurrir que $u_3 > 1$ y eso impone

$$\frac{C^2 s^2}{2MghA} > 2.$$



EJEMPLO 2.6.3 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo $\theta = \pi/2$, Con un movimiento de spin s y precesión inicial $\dot{\phi}(0) = \Omega$ solamente. Determine la condición para que en el movimiento θ no varíe.*

Solución. Nuevamente, de acuerdo a las condiciones iniciales podemos evaluar las constantes

$$\begin{aligned}
 s &\equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{constante}, \\
 \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} A (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 + Mgh \cos \theta + \frac{1}{2} C s^2 \\
 &= \frac{1}{2} A \Omega^2 + \frac{1}{2} C s^2,
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= (A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{(1-u^2)}{A} - \left(\frac{A\Omega - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{(1-u^2)}{A} - \left(\Omega - \frac{Cs}{A}u \right)^2. \end{aligned}$$

Obviamente una solución es $u = 0$ correspondiente a $\theta = \pi/2$. Para que θ no varíe, $f(u)$ debe ser negativo en la vecindad de $u = 0$ y eso requiere que $f(0)$ sea un máximo relativo. Entonces la condición es

$$f'(0) = 0.$$

Haciendo el cálculo correspondiente resulta

$$\begin{aligned} (-2Mgh) \frac{1}{A} + \frac{2Cs}{A} \Omega &= 0 \\ Cs\Omega &= Mgh \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.6.4 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo θ_0 , Con un movimiento de spin s y precesión inicial $\dot{\phi}(0) = \Omega$ solamente. Determine la condición para que en el movimiento θ no varíe, aumente o disminuya.*

Solución. Evaluamos las constantes en términos de las condiciones iniciales, esto es

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0, \\ 2E - Cs^2 &= A(\sin^2 \theta_0)\Omega^2 + 2Mgh \cos \theta_0, \end{aligned}$$

luego $f(u)$ será

$$\begin{aligned} f(u) &= (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2Mgh \cos \theta_0 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \\ &\quad \left(\frac{A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0 - Csu}{A} \right)^2. \end{aligned}$$

Como $f(u_0) = 0$, θ_0 es un extremo y el ángulo variará hacia la región donde $f(u)$ sea positiva. De ello se deduce que la condición será $f'(u_0) = 0$, $f'(u_0) < 0$ o $f'(u_0) > 0$ para los tres casos señalados. Entonces, derivando y evaluando en $u_0 = \cos \theta_0$ resulta

$$\begin{aligned} f'(u_0) &= (-2Mgh)\frac{1-u_0^2}{A} + (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0)\frac{-2u_0}{A} + \frac{2Cs}{A^2}A\Omega \sin^2 \theta_0 \\ &= \frac{2\sin^2 \theta_0}{A} (-Mgh - (A\Omega^2)u_0 + Cs\Omega), \end{aligned}$$

entonces si

$$-A\Omega^2 u_0 + Cs\Omega - Mgh = 0,$$

hay precesión uniforme con $\theta = \theta_0$, si

$$A\Omega^2 u_0 - Cs\Omega + Mgh > 0,$$

el ángulo de inclinación θ aumenta y si es negativa, disminuye.



EJEMPLO 2.6.5 *Un trompo con $A = Mh^2$, $C = 2Mh^2$, baila con precesión uniforme con $\theta = \pi/2$ y precesión Ω . Si repentinamente la precesión se duplica, determine el movimiento siguiente.*

Solución. Para precesión uniforme tenemos

$$\begin{aligned} -A\Omega^2 u_0 + Cs\Omega - Mgh &= 0, \\ u_0 &= 0, \end{aligned}$$

de donde despejamos el spin

$$Cs = \frac{Mgh}{\Omega}.$$

Calculamos ahora con $\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\phi}_0 = 2\Omega$

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv A\dot{\phi} \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0 = 2A\Omega, \\ 2E - Cs^2 &= 4A\Omega^2, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 f(u) &= (4A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{2A\Omega - Csu}{A} \right)^2, \\
 &= (4A\Omega^2 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{2A\Omega - \frac{Mgh}{\Omega}u}{A} \right)^2, \\
 &= (Mghu - 2A\Omega^2) u \frac{2A\Omega^2u - Mgh}{\Omega^2 A^2},
 \end{aligned}$$

de donde las raíces son

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0, \\
 u_2 &= \frac{2A\Omega^2}{Mgh} = \frac{2h\Omega^2}{g}, \\
 u_3 &= \frac{Mgh}{2A\Omega^2} = \frac{g}{2h\Omega^2}.
 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 A\dot{\phi} \sin^2 \theta &= 2A\Omega - Cs \cos \theta, \\
 &= 2Mh^2 \left(\Omega - \frac{g}{2h\Omega} \cos \theta \right).
 \end{aligned}$$

Hay dos casos:

-
- • $\frac{2h\Omega^2}{g} > 1$, las raíces son que dan los extremos son

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0, \\
 u_3 &= \frac{g}{2h\Omega^2} < 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}(\theta_3) &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_3} \left(\Omega - \frac{g}{2h\Omega} \cos \theta_3 \right), \\
 &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_3} \left(\Omega - \frac{g^2}{4h^2\Omega^3} \right),
 \end{aligned}$$

$$\frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_3} \Omega \left(1 - \frac{g^2}{4h^2\Omega^4} \right) > 0.$$

EJEMPLO 2.6.6 *Solución.*

- $\frac{g}{2h\Omega^2} > 1$, las raíces que dan los extremos son

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \frac{2h\Omega^2}{g} < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\theta_2) &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_2} \left(\Omega - \frac{g}{2h\Omega} \cos \theta_2 \right), \\ &= \frac{2Mh^2}{A \sin^2 \theta_2} \left(\Omega - \frac{g}{2h\Omega} \frac{2h\Omega^2}{g} \right) = 0, \end{aligned}$$

es un movimiento cuspidal



2.7. Movimiento con loops

Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados m y h se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo θ_1 , con $\dot{\theta}_1 = 0$, con un cierto spin s y precesión inicial $\dot{\phi}(0) = \Omega$. La condición para que debe cumplirse para que en el movimiento siguiente el trompo haga loops puede establecerse de la siguiente forma. Supongamos que las raíces están ordenadas de modo que $u_1 > u_2$. Las constantes serán

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = A\Omega^2 \sin^2 \theta_1 + 2mgh \cos \theta_1, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega \sin^2 \theta_1 + Cs \cos \theta_1 = A\dot{\phi}_3 + Csu_3, \end{aligned}$$

donde u_3 corresponde al valor intermedio $u_1 > u_3 > u_2$ donde $\dot{\phi}_3 = 0$. En resumen queremos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(u_3) &= \frac{A\Omega \sin^2 \theta_1 + Cs \cos \theta_1 - Csu_3}{A(1 - u_3^2)} = 0, \\ f(u_3) &> 0. \end{aligned}$$

La segunda condición corresponde a que u_3 esté entremedio. Entonces $f(u_3)$ debe ser positivo, de otra manera ese ángulo no se alcanzaría durante el movimiento.

$$\begin{aligned} f(u_3) &= (2E - Cs^2 - 2mghu_3) \frac{1 - u_3^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu_3}{A} \right)^2 > 0, \\ 0 &< (2E - Cs^2 - 2mghu_3) \frac{1 - u_3^2}{A}, \\ 0 &< A\Omega^2 \sin^2 \theta_1 + 2mgh \cos \theta_1 - 2mghu_3, \end{aligned}$$

pero

$$\cos \theta_1 - u_3 = -\frac{A\Omega \sin^2 \theta_1}{Cs}$$

entonces la condición es

$$\begin{aligned} 0 &< A\Omega^2 \sin^2 \theta_1 + 2mgh \left(-\frac{A\Omega \sin^2 \theta_1}{Cs} \right), \\ 0 &< \Omega - \left(\frac{2mgh}{Cs} \right), \\ s &> \frac{2mgh}{\Omega C}. \end{aligned}$$

Veamos un cálculo numérico. Sean $A = \frac{5}{4}mh^2$, $C = \frac{1}{2}mh^2$, $\Omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$, $s > \frac{2mgh}{\frac{1}{2}mh^2\sqrt{\frac{g}{h}}} = 4\frac{g}{\sqrt{gh}}$, $s = 8\frac{g}{\sqrt{gh}}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\theta}_1 = 0$.

calculando resultan

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= \left(\frac{5}{16} + \sqrt{3} \right) mgh \\ \alpha &= \frac{1}{16} mh^{\frac{3}{2}} \sqrt{g} \left(5 + 32\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

luego $f(u)$ resulta

$$f(u) = \frac{1}{400} g \left(320u^2 - 2098u + 999\sqrt{3} \right) \frac{2u - \sqrt{3}}{h},$$

con raíces

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,967\,53, \\ u_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866\,03. \end{aligned}$$

La velocidad angular de precesión será

$$\dot{\phi} = \frac{1}{20} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{5 + 32\sqrt{3} - 64u}{1 - u^2},$$

y evaluando

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(0,967\,53) &= -1.171\,1, \\ \dot{\phi}(0,866\,03) &= 0,999\,97.\end{aligned}$$

2.7.1. Movimiento cuspidal

Una forma trivial de hacer bailar un trompo con movimiento cuspidal, es colocándolo en alguna posición con un spin solamente, esto es $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$. No tan trivial es hacerlo bailar en forma cuspidal pero partiendo de otra posición con θ_2 , $\dot{\theta}_2(0) = 0$ y $\dot{\phi}(\theta_2) = \Omega \neq 0$. Por ejemplo hacerlo iniciar su movimiento de la posición de máxima inclinación respecto a la vertical. Como veremos basta que el spin sea

$$s = \frac{2mgh}{\Omega C}.$$

Verifiquemos esto. Las constantes serán

$$\begin{aligned}2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = A\Omega^2 \sin^2 \theta_2 + 2mgh \cos \theta_2, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega \sin^2 \theta_2 + C \frac{2mgh}{\Omega C} \cos \theta_2.\end{aligned}$$

Debemos verificar que $\dot{\phi}(\theta_1) = 0$ siendo θ_1 el otro extremo. Evaluemos

$$\begin{aligned}f(u) &= (2E - Cs^2 - 2mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2, \\ &= \left(\Omega^2 \sin^2 \theta_2 + \frac{2mgh}{A} (\cos \theta_2 - u) \right) (1 - u^2) - \left(\Omega \sin^2 \theta_2 + \frac{2mgh}{A\Omega} (\cos \theta_2 - u) \right)^2.\end{aligned}$$

Es simple verificar que una raíz es

$$u_2 = \cos \theta_2.$$

Con algo de álgebra, las otras raíces satisfacen

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{2mgh}{A\Omega^2} - \cos \theta_2, \\ u_1 &= \frac{A\Omega^2}{2mgh} \sin^2 \theta_2 + \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Evaluemos $\dot{\phi}$ en $u_1 = \cos \theta_1$. Resulta

$$A\dot{\phi} \sin^2 \theta = A\Omega \sin^2 \theta_2 + \frac{2mgh}{\Omega} \cos \theta_2 - \frac{2mgh}{\Omega} u_1 = 0.$$

Sin embargo debe cumplirse que

$$u_1 = \frac{A\Omega^2}{2mgh} \sin^2 \theta_2 + \cos \theta_2 < 1,$$

y de allí

$$\Omega^2 < \frac{2mgh}{A(1 + \cos \theta_2)}.$$

2.8. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 2.8.1 Una barra de longitud $2l$ se balancea sin deslizarse sobre un cilindro horizontal de radio a , como se indica en la figura (2.9) de modo el centro de la barra toca al cilindro en el punto más alto. Demuestre que:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g(h - a \cos \theta - a\theta \sin \theta)}{l^2 + 3a^2\theta^2}$$

siendo h una constante.

Solución. Debido a que la barra no desliza, la distancia desde el punto de apoyo de la barra al centro de masa es

$$s = a\theta,$$

luego

$$x_G = a \sin \theta - a\theta \cos \theta, \quad y_G = a \cos \theta + a\theta \sin \theta,$$

luego

$$\dot{x}_G = a\theta\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y}_G = a\theta\dot{\theta} \cos \theta,$$

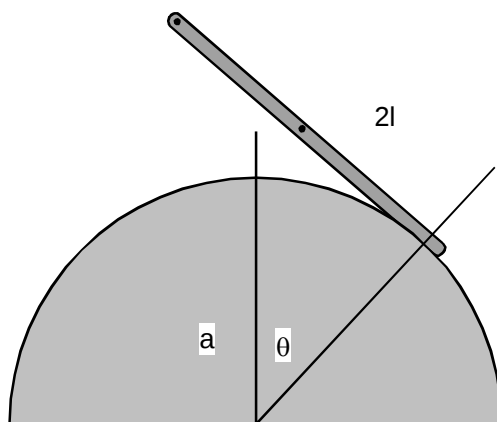


Figura 2.9:

entonces la energía será

$$E = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + mg(a \cos \theta + a\theta \sin \theta),$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{\frac{6E}{m} - 6g(a \cos \theta + a\theta \sin \theta)}{(3a^2\theta^2 + l^2)} \\ &= \frac{6g(\frac{E}{mg} - a \cos \theta - a\theta \sin \theta)}{(3a^2\theta^2 + l^2)}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.8.2 Considere una barra de masa m , largo $2a$ que se mueve en un plano vertical bajo acción de su peso de modo que su extremo A puede moverse libremente sobre una corredera lisa OX . Escriba las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas generalizadas x el desplazamiento del punto A , y el ángulo θ que forma la barra con la vertical.

Solución. Las coordenadas de G serán

$$x_G = x + a \sin \theta, \quad y_G = -a \cos \theta,$$

de donde

$$\dot{x}_G = \dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_G = a\dot{\theta} \sin \theta, \quad v_G^2 = \dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + a^2\dot{\theta}^2,$$

y entonces el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta,$$

de donde calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + ma\dot{\theta} \cos \theta, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ma\dot{x} \cos \theta + \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -ma\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mga \sin \theta, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} m\dot{x} + ma\dot{\theta} \cos \theta &= \text{constante}, \\ \frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} + ma\ddot{x} \cos \theta + mga \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.8.3 *El extremo de una barra uniforme de largo l está montado sobre un eje de modo que la barra puede rotar libremente en un plano normal al eje, como se indica en la figura (2.10). Si el eje se hace rotar sobre un plano horizontal con velocidad de rotación constante Ω , permaneciendo fija la unión de la barra al eje, demuestre que el ángulo que la barra forma con la vertical descendente satisface:*

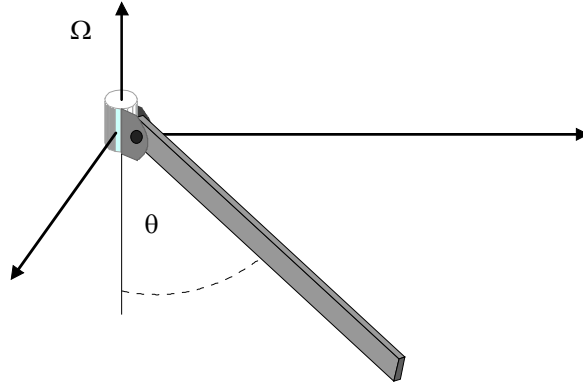
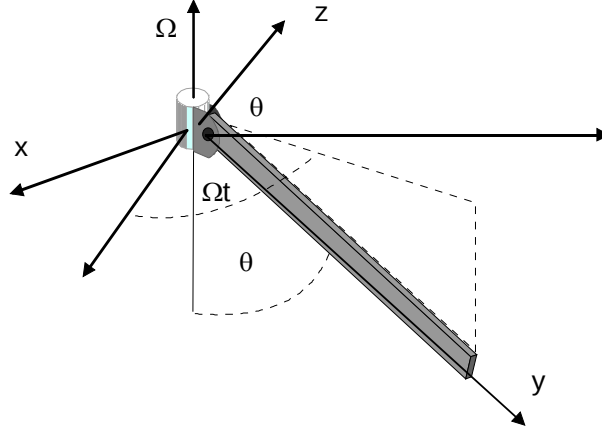


Figura 2.10:

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

Solución. Tomando ejes principales de inercia xyz en el extremo superior de la barra, y sobre la barra, z en el plano vertical que contiene Ω y la barra, x perpendicular a la barra y horizontal.



tenemos

$$\omega_x = \dot{\theta}, \quad \omega_y = -\Omega \cos \theta, \quad \omega_z = \Omega \sin \theta,$$

entonces

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + m g \frac{l}{2} \cos \theta,$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{3} m l^2 (\Omega^2 \sin \theta \cos \theta) - m g \frac{l}{2} \sin \theta,$$

y sigue

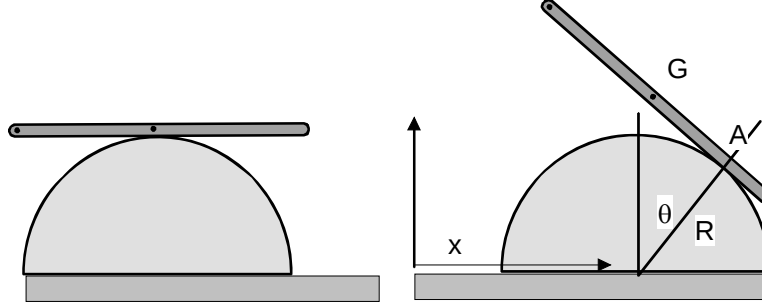
$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{3} m l^2 (\Omega^2 \sin \theta \cos \theta) + m g \frac{l}{2} \sin \theta = 0,$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

EJERCICIO 2.8.4 Una barra de longitud $2a$ y masa M se coloca horizontalmente sobre el punto más alto de un hemisferio rugoso de radio R y masa igual M que puede deslizar sobre un plano horizontal liso, y se perturba levemente. Determine las ecuaciones de movimiento para el sistema. La barra no desliza sobre el hemisferio.

Solución. Con respecto a la figura



usamos como coordenadas generalizadas el ángulo θ y el desplazamiento x del hemisferio. Debido al no deslizamiento de la barra $AG = R\theta$ de manera que

$$\begin{aligned}x_G &= x + R \sin \theta - R\theta \cos \theta, \\y_G &= R \cos \theta + R\theta \sin \theta,\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= \dot{x} + R\dot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \theta + R\theta\dot{\theta} \sin \theta = \dot{x} + R\theta\dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y}_G &= -R\dot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta} \sin \theta + R\theta\dot{\theta} \cos \theta = R\theta\dot{\theta} \cos \theta, \\ v_G^2 &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}R\theta\dot{\theta} \sin \theta + R^2\theta^2\dot{\theta}^2,\end{aligned}$$

entonces el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + 2\dot{x}R\theta\dot{\theta} \sin \theta + R^2\theta^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ma^2\right)\dot{\theta}^2 - Mg(R \cos \theta + R\theta \sin \theta),$$

derivando

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 2M\dot{x} + M\dot{x}R\theta\dot{\theta} \sin \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= M(\dot{x}R\theta \sin \theta + R^2\theta^2\dot{\theta}) + \left(\frac{1}{3}Ma^2\right)\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= M(\dot{x}R\theta\dot{\theta} \cos \theta + R^2\theta\dot{\theta}^2) - Mg(R\theta \cos \theta),\end{aligned}$$

y finalmente resultan las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}2\ddot{x} + \ddot{x}R\theta\dot{\theta} \sin \theta + \dot{x}R\dot{\theta}^2 \sin \theta + \dot{x}R\theta\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{x}R\theta\dot{\theta}^2 \cos \theta &= 0, \\ \ddot{x}R\theta \sin \theta + \dot{x}R\dot{\theta} \sin \theta + R^2\theta\dot{\theta}^2 + R^2\theta^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}a^2\ddot{\theta} + gR\theta \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

EJERCICIO 2.8.5 Considere un disco de masa m radio r que rueda sin deslizar con su plano vertical sobre un plano horizontal tirado de su centro con una fuerza horizontal constante F .

- a) Resuelva el problema por el método de Lagrange considerando que el sistema es holonómico con un grado de libertad.
- b) Resuelva el mismo problema, tratando al sistema como si fuera no holonómico con la restricción adicional: $\dot{x} - r\dot{\theta} = 0$.

Solución. Considerado el vínculo hay un grado de libertad y

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{3}{4}m\dot{x}_G^2,$$

de donde sigue

$$\frac{3}{2}m\dot{x}_G = F.$$

Alternativamente consideramos que hay dos grados de libertad con

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right),$$

y la restricción adicional

$$\ddot{x}_G = r\ddot{\theta},$$

o

$$\delta x_G - r\delta\theta = 0,$$

luego la expresión

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \right) \delta q_j &= \sum_j Q_j \delta q_j \\ m\ddot{x}_G \delta x_G + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\delta\theta &= F\delta x_G, \\ \delta x_G - r\delta\theta &= 0, \end{aligned}$$

multiplicando por λ y sumando

$$(m\ddot{x}_G - F + \lambda)\delta x_G + \left(\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} - \lambda r\right)\delta\theta = 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G - F + \lambda &= 0, \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} - \lambda r &= 0, \end{aligned}$$

la última da

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_G - \lambda = 0,$$

y luego

$$m\ddot{x}_G - F + \frac{1}{2}m\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x}_G = F.$$



EJERCICIO 2.8.6 *Un disco de masa m y radio a está inicialmente en reposo apoyado en el punto más alto de un hemisferio rugoso de radio R . Si el disco es perturbado levemente, el comienza a rodar sin resbalar. Escriba la ecuación de movimiento del disco, para el ángulo θ indicado en la figura (2.11). Determine además el ángulo para el cual el disco abandona el contacto con el hemisferio.*

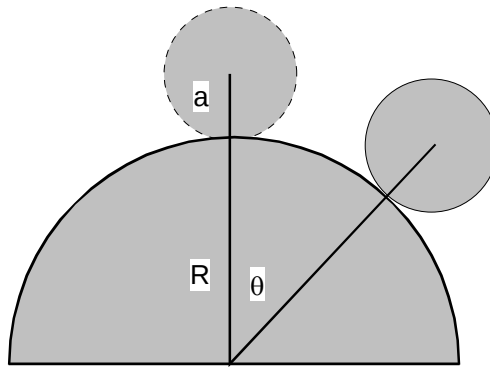


Figura 2.11:

Solución. (En los problemas resueltos este problema está resuelto por el método de Newton) Podemos calcular la rapidez del CM de dos maneras,

$$v_{CM} = (R + a)\dot{\theta} = a\omega,$$

de donde

$$\omega = \frac{R + a}{a}\dot{\theta},$$

El lagrangiano será

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(R + a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{R + a}{a}\dot{\theta}\right)^2 - mg(R + a)\cos\theta \\ &= \frac{3}{4}m(R + a)^2\dot{\theta}^2 - mg(R + a)\cos\theta \end{aligned}$$

de donde la ecuación de movimiento será

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(R + a)\ddot{\theta} - g\sin\theta &= 0, \\ \ddot{\theta} &= \frac{2g\sin\theta}{3(R + a)}. \end{aligned}$$

Por integración podemos obtener $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g(1 - \cos\theta)}{3(R + a)},$$

La condición de despegue es cuando no hay contacto

$$N = 0,$$

pero

$$N - mg\cos\theta = -(R + a)^2\dot{\theta}^2,$$

de donde

$$mg\cos\theta - \frac{4mg(1 - \cos\theta)}{3} = 0,$$

de donde

$$\cos\theta = \frac{4}{7}, \theta = 55.1501^\circ$$



EJERCICIO 2.8.7 Un cono recto de semiángulo en el vértice α y generatriz de longitud l rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo β respecto del plano horizontal. Si θ es el ángulo que forma la línea de máxima pendiente con la generatriz de contacto, demuestre que:

$$\ddot{\theta} + \frac{5g \sin \beta}{l(1 + 5 \cos^2 \alpha)} \sin \theta = 0.$$

Solución. Si H es la altura del cono, el momento de inercia respecto a su generatriz en el vértice es $I = \frac{3}{4}mH^2(1 + \frac{1}{5} \sec^2 \alpha) \sin^2 \alpha$, la magnitud de la velocidad angular es $\omega = \dot{\theta} \cot \alpha$, la energía del cono puede escribirse como $E = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{3}{4}H(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \cos \theta)$ y de allí derivando sigue el resultado.

EJERCICIO 2.8.8 En el movimiento de un cuerpo rígido simétrico (es decir con $A = B$) bajo la acción de la reacción en el centro de masas solamente, ver fig.(2.12), pruebe que:

- a) La magnitud de la velocidad angular del cuerpo permanece constante.
- b) La velocidad angular $\vec{\omega}$ del cuerpo describe un cono en torno del eje de simetría de cuerpo (eje z) con velocidad angular relativa al cuerpo $\vec{n} = (C - A)\omega_z \hat{k}/A$.
- c) El eje de simetría del cuerpo (eje z) describe un cono en torno a la dirección fija del momentum angular $\vec{L}_G$, con velocidad angular de magnitud $\Omega = \omega \sqrt{\sin^2 \alpha + (C/A)^2 \cos^2 \alpha}$ siendo α el ángulo constante que forma $\vec{\omega}$ con el eje z .

Solución. Para ejes principales $GXYZ$ fijos al cuerpo, podemos utilizar las ecuaciones de Euler donde el torque es nulo, por lo tanto

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G = 0 \Rightarrow \vec{L}_G = \text{constante}.$$

En componentes

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z &= 0, \\ B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= 0, \\ C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y &= 0, \end{aligned}$$

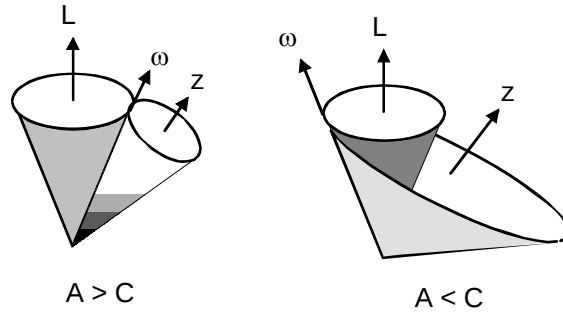


Figura 2.12: Conos del espacio y del cuerpo

pero $A = B$, de modo que

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (A - C)\omega_y\omega_z &= 0, \\ A\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= 0, \\ C\dot{\omega}_z &= 0, \end{aligned}$$

de aquí se deduce ω_z es constante. De las dos primeras se deduce que

$$\omega_x\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\omega}_y = 0,$$

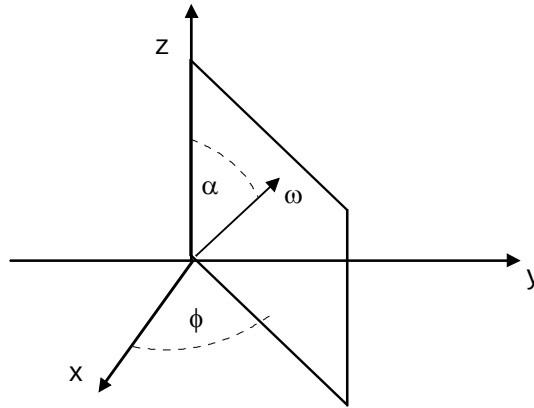
de donde

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{constante},$$

y luego

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \text{ es constante.}$$

La figura



nos dice entonces que

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega \sin \alpha \cos \phi, \\ \omega_y &= \omega \sin \alpha \sin \phi,\end{aligned}$$

reemplazando en la primera ecuación de Euler $A\dot{\omega}_x - (A-C)\omega_y\omega_z = 0$ resulta

$$-A\omega \sin \alpha (\sin \phi) \dot{\phi} - (A-C)(\omega \sin \alpha \sin \phi)(\omega \cos \alpha) = 0,$$

de donde

$$\dot{\phi} = \frac{(C-A)(\omega \cos \alpha)}{A} = \frac{(C-A)\omega_z}{A}.$$

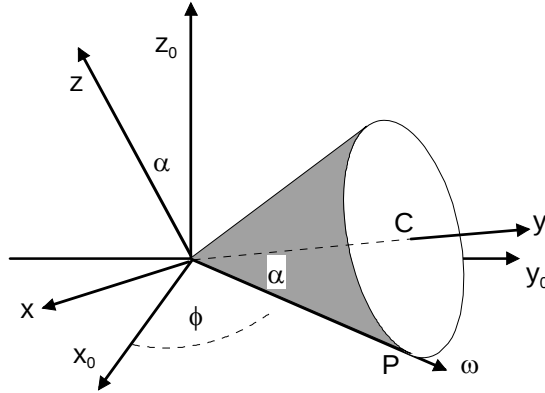
EJERCICIO 2.8.9 (*Synge y Griffith, [8]*) Un cono sólido de altura b y semi ángulo en el vértice α rueda en movimiento estacionario sobre un plano rugoso horizontal de modo que la línea de contacto rota con velocidad angular Ω en torno de la vertical. Demuestre que la reacción de la superficie sobre el cono equivale a una fuerza que corta la generatriz de contacto a distancia

$$\frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{k^2 \Omega^2}{g} \cot \alpha$$

de su vértice, siendo k el radio de giro del cono ($I = mk^2$) en torno a la generatriz. Deduzca que el valor máximo posible de Ω es

$$\frac{1}{2k \cos \alpha} \sqrt{gb(1 + 3 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}.$$

Solución. Con relación a la figura



usemos los ejes principales $OXYZ$. La matriz de inercia en O será de la forma

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \text{ con } I_{xx} = I_{zz}.$$

La velocidad angular del cuerpo está en la dirección de la generatriz de contacto de modo que

$$\vec{\omega} = \omega \cos \alpha \hat{j} - \omega \sin \alpha \hat{k},$$

y resulta

$$\vec{L}_0 = \omega I_{yy} \cos \alpha \hat{j} - \omega I_{zz} \sin \alpha \hat{k}.$$

Las derivadas de los vectores unitarios son

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{j}}{dt} &= \Omega \hat{k}_0 \times \hat{j} = -\Omega \sin(90 - \alpha) \hat{i}, \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= \Omega \hat{k}_0 \times \hat{k} = \Omega \sin(\alpha) \hat{i}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \omega I_{yy} \cos \alpha (-\Omega \sin(90 - \alpha) \hat{i}) - \omega I_{zz} \sin \alpha (\Omega \sin(\alpha) \hat{i}) \\ &= -\omega \Omega (I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha) \hat{i}. \end{aligned}$$

Por otro lado no hay aceleración vertical del centro de masa por lo tanto la reacción $R = mg$. El centro de masa está a distancia horizontal $\frac{3}{4}b \cos \alpha$ del vértice 0 por lo tanto si llamamos h a la distancia a la cual actúa R tenemos que

$$\vec{\Gamma} = (-mg \frac{3}{4}b \cos \alpha + Rh) \hat{i} = -\omega \Omega (I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha) \hat{i},$$

de aquí, usando $R = mg$, despejamos h

$$h = \frac{3}{4}b \cos \alpha - \frac{\omega \Omega}{g} \left(\frac{I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha}{m} \right).$$

Falta determinar ω . Si evaluamos la velocidad del centro de la base del cono ella es

$$\omega b \sin \alpha = -\Omega b \cos \alpha,$$

luego

$$h = \frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{\Omega^2 \cos \alpha}{g \sin \alpha} \left(\frac{I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha}{m} \right).$$

Pero el momento de inercia respecto a la generatriz de contacto es

$$I = \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} H_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} = I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{zz} \sin^2 \alpha,$$

lo que prueba lo solicitado

$$h = \frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{k^2 \Omega^2}{g} \cot \alpha.$$

Obviamente $h \leq OP = \frac{b}{\cos \alpha}$ de manera que

$$\frac{3}{4}b \cos \alpha + \frac{k^2 \Omega^2}{g} \cot \alpha \leq \frac{b}{\cos \alpha},$$

de donde

$$\begin{aligned} \Omega^2 &\leq \frac{g}{k^2} \left(b \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} - \frac{3}{4} b \cos \alpha \tan \alpha \right), \\ &= \frac{gb}{k^2 \cos^2 \alpha} \left(\sin \alpha - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha \sin \alpha \right), \\ \Omega &\leq \frac{1}{2k \cos \alpha} \sqrt{gb} \sqrt{4 \sin \alpha - 3(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{2k \cos \alpha} \sqrt{gb} \sqrt{\sin \alpha + 3 \sin^3 \alpha}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.8.10 (*Synge y Griffith*) Una placa delgada elíptica de semieje a, b ($a \geq b$) puede moverse libremente en torno de su centro que está fijo. Es colocada en movimiento dándole una velocidad angular de magnitud n en torno de un eje sobre su plano, igualmente inclinado respecto a ambos semiejes de la elipse. Demuestre que el eje instantáneo de rotación, volverá a estar sobre el plano de la elipse después de un tiempo

$$T = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 - x^4}} dx,$$

siendo

$$\lambda^2 = \frac{n^2 a^2 - b^2}{2 a^2 + b^2}.$$

Solución. Las ecuaciones de Euler darán con $C = A + B$

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (B - A - B)\omega_y\omega_z &= 0, \\ B\dot{\omega}_y - (A + B - A)\omega_z\omega_x &= 0, \\ (A + B)\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y &= 0, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z &= 0, \\ \dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x &= 0, \\ (A + B)\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y &= 0, \end{aligned}$$

de las dos primeras

$$\omega_x\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\omega}_y = 0,$$

de donde

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{constante} = n^2.$$

Sea además

$$\omega_x = n \cos \Psi/2, \quad \omega_y = n \sin \Psi/2$$

sustituimos en $\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z = 0$ y obtenemos

$$-n \frac{\dot{\Psi}}{2} \sin \frac{\Psi}{2} + n \sin \frac{\Psi}{2} \omega_z = 0 \Rightarrow \omega_z = \frac{\dot{\Psi}}{2},$$

sustituimos en la tercera ecuación de Euler

$$(A + B) \frac{\ddot{\Psi}}{2} - (A - B) n^2 \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Psi}{2} = 0, \quad \text{con } \dot{\Psi}(0) = 0, \quad \Psi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

que puede escribirse

$$\ddot{\Psi} + \frac{(B - A)n^2}{(A + B)} \sin \Psi = 0, \quad \text{con } \dot{\Psi}(0) = 0, \quad \Psi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

que corresponde a la ecuación de un péndulo simple con $\Omega^2 = \frac{(B-A)n^2}{(A+B)}$ que partió del reposo en posición horizontal. Podemos integrar obteniendo

$$\dot{\Psi}^2 - 2\Omega^2 \cos \Psi = 0 \Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = -\Omega\sqrt{2}\sqrt{\cos \Psi}$$

reordenando

$$\frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = -\Omega\sqrt{2}dt$$

y el tiempo necesario para que $\Psi \rightarrow -\pi/2$ será

$$T = -2\frac{1}{\Omega\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^0 \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = \frac{2}{\Omega\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}}.$$

Si elegimos los semiejes de la elipse como eje X, Y los momentos de inercia serán

$$A = I_{xx} = \int_R y^2 dm, \quad B = I_{yy} = \int_R x^2 dm, \quad C = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy},$$

notemos que para la frontera R de la región de integración

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

además

$$\begin{aligned} A &= I_{xx} = \frac{M}{\pi ab} \int_R y^2 dx dy, \\ B &= I_{yy} = \frac{M}{\pi ab} \int_R x^2 dx dy \end{aligned}$$

para reducir la región a un círculo unitario R' tomemos $x = ax', y = by'$ luego

$$\begin{aligned} A &= I_{xx} = \frac{Mb^2}{\pi} \int_{R'} y'^2 dx' dy' = \frac{Mb^2}{\pi} \frac{1}{2} \int_{R'} r'^2 r' dr' d\theta = \frac{Mb^2}{4}, \\ B &= I_{yy} = \frac{Ma^2}{\pi} \int_{R'} x'^2 dx' dy' = \frac{Ma^2}{4}. \end{aligned}$$

(Hemos usado $\int_{R'} y'^2 dx' dy' = \int_{R'} x'^2 dx' dy' = \frac{1}{2} \int_{R'} r'^2 r' dr' d\theta$). Entonces

$$\Omega^2 = \frac{(a^2 - b^2)n^2}{(a^2 + b^2)} = 2\lambda^2$$

o sea nuestro resultado es

$$T = -2\frac{1}{\Omega\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^0 \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = \frac{2}{\Omega\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}}.$$

El resultado propuesto es

$$T = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 - x^4}} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x'^4}} dx'$$

Me dio lata demostrarlo, pero un cálculo numérico indica que son iguales porque

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi}} = 2.622\,06, \quad 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} dx = 2.622\,06.$$

EJERCICIO 2.8.11 Considere dos cuerpos rígidos que chocan de modo que existe una tangente común a las superficies en el punto de contacto, donde se desarrolla una fuerza normal y posiblemente otra tangente (de roce), ver fig.(??). Establezca la equivalencia entre conservación de energía (choque elástico) y coeficiente de restitución unidad ($e = 1$). Otros ejemplos de la

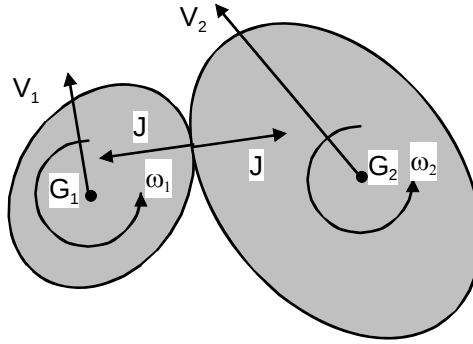


Figura 2.13: Choque cuerpos rígidos

dinámica de los cuerpos rígidos, tales como el movimiento del trompo simétrico bajo la acción de su peso y de la reacción en su púa, se estudiarán en el capítulo sobre ecuaciones de Lagrange, pues ese método tiene, en general, ventajas respecto a la formulación newtoniana usual.

Solución. Si llamamos $\vec{J}$ a la interacción impulsiva y P_1 (y P_2) al punto de contacto, 1 y 2 a los centros de masas e indicamos con $+$ y $-$ a valores de

las diversas cantidades justo después y justo antes de la colisión, tenemos que

$$M_1(\vec{v}_1^+ - \vec{v}_1^-) = \vec{J}, \quad (2.26)$$

$$M_2(\vec{v}_2^+ - \vec{v}_2^-) = -\vec{J}, \quad (2.27)$$

$$H_1(\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^-) = G_1 \vec{P} \times \vec{J}, \quad (2.28)$$

$$H_2(\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^-) = -G_2 \vec{P} \times \vec{J}, \quad (2.29)$$

y conservación de energía

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_1v_1^{+2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{+2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ = \\ \frac{1}{2}M_1v_1^{-2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{-2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^-. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De las ecuaciones (7.5) y (7.6) se obtiene

$$\vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- = (\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \cdot G_1 \vec{P} \times \vec{J},$$

$$\vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^- = -(\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \cdot G_2 \vec{P} \times \vec{J}.$$

De aquí, con algo de álgebra, puede obtenerse de la ecuación de conservación de la energía

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1^+ + \vec{v}_1^-) \cdot \vec{J} - (\vec{v}_2^+ + \vec{v}_2^-) \cdot \vec{J} = -(\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \times G_1 \vec{P} \cdot \vec{J} + \\ + (\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \times G_2 \vec{P} \cdot \vec{J}, \end{aligned}$$

pero

$$\vec{v}_{P_1}^+ = \vec{v}_1^+ + \vec{\omega}_1^+ \times G_1 \vec{P},$$

y similarmente las otras, entonces

$$(\vec{v}_{P_1}^+ + \vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^+ - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J},$$

es decir

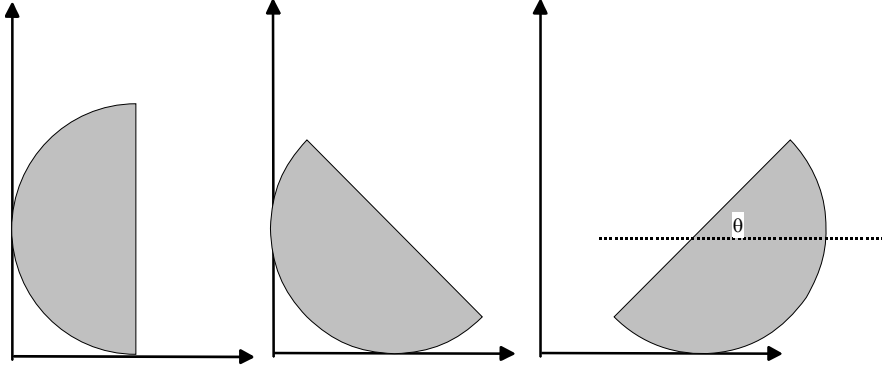
$$(\vec{v}_{P_1}^+ - \vec{v}_{P_2}^+) \cdot \vec{J} = -(\vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J}.$$

que significa coeficiente de restitución unidad, en la dirección del impulso de interacción.



EJERCICIO 2.8.12 Una semiesfera homogénea de radio a está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa, sobre la cual la superficie semi esférica, se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son $\omega = \sqrt{\frac{15}{8}g/a}$, $v = \frac{3}{8}a\omega$ respectivamente. Demuestre además durante el movimiento siguiente, el ángulo entre la base y la horizontal no excede de $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$.

Solución.



El centro de masa del cuerpo está a distancia $3a/8$ del centro. Mientras no despegue, el cuerpo mantiene su centro fijo, y la única fuerza que realiza torque respecto a ese punto es el peso. Si en la segunda figura θ es el ángulo que ha girado la línea que contiene el centro de masa, entonces

$$I_C \ddot{\theta} = Mg \frac{3}{8} a \cos \theta,$$

donde el momento de inercia es $I = 2Ma^2/5$, luego

$$\frac{2Ma^2}{5} \ddot{\theta} = Mg \frac{3}{8} a \cos \theta,$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \frac{15g}{16a} \cos \theta,$$

que podemos integrar porque

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \dot{\theta}^2,$$

obteniendo

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{15}{16}\frac{g}{a}\sin\theta,$$

y cuando la base se coloca horizontal $\theta = \pi/2$ resultando

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}},$$

y

$$v_{CM} = \frac{3}{8}a\omega.$$

Puede probarse que en esta posición el cuerpo despega y tiene una energía inicial (respecto a la posición inicial del centro)

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3}{8}a = 0,$$

y su momentum en la dirección horizontal es

$$P_x = M\frac{3}{8}a\omega = M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}.$$

Esas dos cantidades son conservadas, pero ahora todo el cuerpo se traslada y rota, de manera que la coordenada x del centro de masa varía. Así la energía se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0,$$

además

$$\begin{aligned} M\dot{x} &= M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}, \\ y_{CM} &= \frac{3a}{8}\cos\theta, \\ \dot{y}_{CM} &= -\frac{3a}{8}\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Cuando θ sea un extremo, $\dot{\theta} = 0$, y en ese caso, $\dot{y}_{CM} = 0$ y la ecuación de energía da

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}\right)^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0$$

que se reduce a

$$\cos \theta = \frac{45}{128},$$

o sea $\theta = 69.417^\circ$.

EJERCICIO 2.8.13 *Un disco uniforme de radio a que está rotando con rapidez angular inicial Ω alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es μ . Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$.*

Solución. Si la fuerza normal está distribuida uniformemente, la que actúa sobre un elemento de área $dA = r dr d\theta$ en polares será

$$dN = \frac{mg}{\pi a^2} r dr d\theta,$$

la cual produce un torque retardador

$$d\Gamma = -\mu r dN = -\frac{\mu mg}{\pi a^2} r^2 dr d\theta,$$

siendo el torque total

$$\Gamma = -\frac{\mu mg}{\pi a^2} \frac{a^3}{3} 2\pi = -\frac{2}{3} \mu m g a$$

luego la desaceleración angular estará dada por

$$\frac{1}{2} m a^2 \alpha = -\frac{2}{3} \mu m g a \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{3} \frac{\mu g}{a},$$

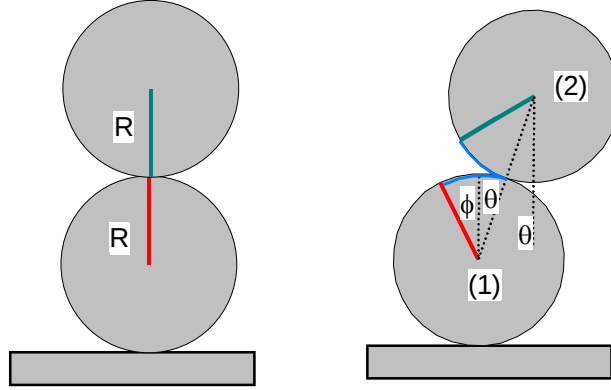
luego frena cuando

$$0 = \Omega - \frac{4}{3} \frac{\mu g}{a} t \Rightarrow t = \frac{3\Omega a}{4\mu g}.$$

EJERCICIO 2.8.14 *Un cilindro sólido de radio R , descansa sobre otro igual que a su vez se apoya sobre el suelo, en equilibrio inestable. Si el sistema se perturba levemente y no hay deslizamiento en las superficies de contacto, demuestre que mientras los cilindros permanecen en contacto, el ángulo θ que forma la línea que une los centros con la vertical satisface*

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1 - \cos \theta)}{a(17 + 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta)}.$$

Solución. La figura ilustra que si el cilindro de abajo gira un ángulo ϕ , el de arriba gira un ángulo $2\theta + \phi$. Note que los arcos azules son iguales.



Las coordenadas de los centros de masa son

$$\begin{aligned} x_1 &= -R\phi, \\ y_1 &= R, \\ x_2 &= -R\phi + 2R\sin\theta, \\ y_2 &= R + 2R\cos\theta, \end{aligned}$$

luego las componentes de velocidad son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -R\dot{\phi}, \\ \dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= -R\dot{\phi} + 2R\dot{\theta}\cos\theta, \\ \dot{y}_2 &= -2R\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

luego la energía cinética será

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}M((-R\dot{\phi} + 2R\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \\ &\quad 4R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(2\dot{\theta} + \dot{\phi})^2, \\ &= \frac{3}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + 3MR^2\dot{\theta}^2 - 2MR^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + MR^2\dot{\theta}\dot{\phi}, \end{aligned}$$

y la potencial será

$$V = Mg2R\cos\theta,$$

de aquí

$$L = \frac{3}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + 3MR^2\dot{\theta}^2 - 2MR^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} - Mg2R\cos\theta,$$

luego se conserva

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 3MR^2\dot{\phi} - 2MR^2\dot{\theta} \cos \theta + MR^2\dot{\theta} = 0,$$

despejamos

$$\dot{\phi} = \frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta},$$

la energía también es constante

$$E = \frac{3}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + 3MR^2\dot{\theta}^2 - 2MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + MR^2\dot{\theta}\dot{\phi} + Mg2R \cos \theta = Mg2R,$$

reemplazamos $\dot{\phi}$ resultando

$$\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta}\right)^2 + 3\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta}\right) \cos \theta + \dot{\theta}\left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta}\right) = \frac{2g}{R} - \frac{2g}{R} \cos \theta,$$

de donde sigue que

$$\dot{\theta}^2 = 12g \frac{1 - \cos \theta}{R(17 + 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta)}$$



EJERCICIO 2.8.15 *Un trompo con momentos de inercia $A = 5Mh^2/4$, $C = Mh^2/2$ se coloca en movimiento con su eje horizontal $\theta = \pi/2$. El spin s es dado. Determine los valores de la precesión inicial $\dot{\phi}(0) = \Omega$ para los cuales θ aumentará, disminuirá o permanecerá constante.*

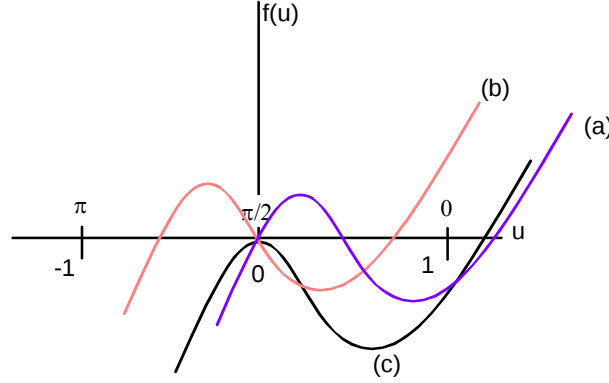
Solución. como siempre se evalúan las constantes

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = A\Omega^2, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2 \\ &= (A\Omega^2 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{A\Omega - Csu}{A}\right)^2 \end{aligned}$$

como se ilustra en la figura



θ aumentará (b) si $f'(0) < 0$, permanecerá constante si (c) $f'(0) = 0$, disminuirá (a) si $f'(0) > 0$. Evaluamos

$$f'(0) = (-2mgh)\frac{1}{A} + \frac{2Cs}{A}(\Omega) = \frac{2Cs}{A}\left(\Omega - \frac{mgh}{Cs}\right),$$

de donde θ aumentará si $\Omega < \frac{mgh}{Cs}$, permanecerá constante si $\Omega = \frac{mgh}{Cs}$, disminuirá si $\Omega > \frac{mgh}{Cs}$.

EJERCICIO 2.8.16 *Un trompo con momentos de inercia $A = 5Mh^2/4$, $C = Mh^2/2$ se coloca en movimiento con su eje horizontal $\theta = \pi/2$. El spin s es dado. Si la precesión inicial es $\dot{\phi}(0) = 0$ determine los extremos del ángulo θ para el movimiento siguiente.*

Solución. Similarmente resulta

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2Mgh \cos \theta = 0, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2Mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2 \\ &= (-2Mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{-Csu}{A}\right)^2 = u\frac{2MghAu^2 - C^2s^2u - 2MghA}{A^2} \end{aligned}$$

una raíz es $u_1 = 0$ ($\theta_1 = \pi/2$) y las otras satisfacen

$$\begin{aligned} 0 &= 2MghAu^2 - C^2s^2u - 2MghA, \\ 0 &= 10gu^2 - hs^2u - 10g \\ \cos \theta_2 &= \frac{s^2h}{20g} - \sqrt{1 + \frac{s^4h^2}{400g^2}}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.8.17 *Un trompo con momentos de inercia $A = 5Mh^2/4$, $C = Mh^2/2$ se coloca en movimiento con su eje inclinado en $\theta = \pi/3$. El spin s es dado. Si la precesión inicial es $\dot{\phi}(0) = 0$ determine los extremos del ángulo θ para el movimiento siguiente.*

Solución. De nuevo la misma rutina

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2Mgh \cos \theta = 2Mgh \cos \frac{\pi}{3} = Mgh, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}Cs, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2Mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2 \\ &= Mgh(1 - 2u) \frac{1 - u^2}{A} - \frac{C^2s^2}{4A^2} (1 - 2u)^2 \\ &= (-1 + 2u) \frac{4MghAu^2 - 4MghA + C^2s^2 - 2C^2s^2u}{4A^2} \end{aligned}$$

de donde $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ y las otras satisfacen

$$\begin{aligned} 0 &= 4Mgh \frac{5Mh^2}{4} u^2 - 2 \frac{M^2h^4}{4} s^2 u - 4Mgh \frac{5Mh^2}{4} + \frac{M^2h^4}{4} s^2, \\ 0 &= -2s^2uh + s^2h + 20gu^2 - 20g \Rightarrow \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{20g} \left(s^2h - \sqrt{s^4h^2 - 20s^2hg + 400g^2} \right). \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.8.18 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h se coloca en movimiento con su eje inclinado en θ . Determine la relación que debe haber entre el spin s y la precesión inicial $\dot{\phi}(0) = \Omega$ para que el ángulo θ no varíe. (Precesión uniforme)*

Solución. Sea θ_0 el ángulo constante. Debe ser

$$f'(u_0) = 0.$$

Derivando

$$f'(u) = (2E - Cs^2 - 2Mghu) \frac{-2u}{A} + (-2Mgh) \frac{1-u^2}{A} + \frac{2Cs}{A^2}(\alpha - Csu),$$

Pero

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2Mgh \cos \theta_0, \\ \alpha &= A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0, \end{aligned}$$

evaluando en $u_0 = \cos \theta_0$ resulta

$$\begin{aligned} f'(u_0) &= (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0) \frac{-2 \cos \theta_0}{A} + (-2Mgh) \frac{\sin^2 \theta_0}{A} + \frac{2Cs}{A^2}(A\Omega \sin^2 \theta_0) \Rightarrow \\ 0 &= A\Omega^2 (\cos \theta_0) - Cs\Omega + Mgh. \end{aligned}$$

la relación pedida,



EJERCICIO 2.8.19 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h se coloca en movimiento con su eje inclinado en θ_0 . Si el trompo tiene spin solamente, determine los valores extremos del ángulo θ . (Movimiento cuspidal)*

Solución. Nuevamente

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = 2mgh \cos \theta_0, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs \cos \theta_0, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (2mgh \cos \theta_0 - 2mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{Cs \cos \theta_0 - Csu}{A} \right)^2, \\ &= \frac{(-\cos \theta_0 + u)}{A^2} (2mghAu^2 - 2mghA + C^2s^2 \cos \theta_0 - C^2s^2u), \end{aligned}$$

de donde $\theta_1 = \theta_0$ y las otras satisfacen

$$0 = 2mghAu^2 - C^2s^2u - 2mghA + C^2s^2 \cos \theta_0,$$

de donde resulta

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{4mghA} \left(C^2s^2 - \sqrt{C^4s^4 + 16m^2g^2h^2A^2 - 8mghAC^2s^2 \cos \theta_0} \right).$$



EJERCICIO 2.8.20 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h se coloca en movimiento con su eje vertical hacia arriba ($\theta_0 = 0$). Si el trompo tiene spin solamente, determine los valores del spin para los cuales el trompo baila establemente. (Movimiento de trompo dormido)*

Solución. Evaluamos

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2Mgh \cos \theta = 2Mgh, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(u) &= (2Mgh - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{Cs - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (1-u)^2 \frac{2MghAu - C^2s^2 + 2MghA}{A^2} \end{aligned}$$

donde hay dos raíces repetidas $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y la otra debe ser mayor que uno, es decir

$$u = \frac{1}{2} \frac{C^2s^2 - 2MghA}{MghA} > 1 \implies C^2s^2 > 4MghA.$$



EJERCICIO 2.8.21 *Un trompo con momentos de inercia dados A , C y dados M y h baila en precesión uniforme $\dot{\phi} = \Omega$ con su eje inclinado un ángulo θ_0 . Si repentinamente el spin s_0 se duplica determine los ángulos extremos de inclinación del eje del trompo.*

Solución. Para precesión uniforme en ángulo θ_0 se tiene que

$$0 = A\Omega^2 (\cos \theta_0) - Cs_0\Omega + Mgh.$$

de donde

$$\Omega = \frac{1}{2A(\cos \theta_0)} \left(Cs_0 \pm \sqrt{C^2 s_0^2 - 4AMgh(\cos \theta_0)} \right),$$

supondremos que ambas soluciones son reales. Las nuevas condiciones serán

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2A(\cos \theta_0)} \left(Cs_0 \pm \sqrt{C^2 s_0^2 - 4AMgh(\cos \theta_0)} \right), \\ s &= 2s_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \end{aligned}$$

Ahora evaluamos

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh \cos \theta = A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2mgh \cos \theta_0, \\ \alpha &= A\dot{\phi} \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= (2E - Cs^2 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A} \right)^2, \\ &= (A\Omega^2 \sin^2 \theta_0 + 2mgh \cos \theta_0 - 2Mghu) \frac{1-u^2}{A} \\ &\quad - \left(\frac{A\Omega \sin^2 \theta_0 + Cs \cos \theta_0 - Csu}{A} \right)^2, \end{aligned}$$

$f(u)$ puede ser factorizada por $\cos \theta_0 - u$ y la otra solución satisface

$$\begin{aligned} 0 &= 2MghAu^2 + (-C^2s^2 - A^2\Omega^2 \sin^2 \theta_0)u + C^2s^2 \cos \theta_0 - 2A\Omega Cs \cos^2 \theta_0 \\ &\quad - A^2\Omega^2 \cos \theta_0 + A^2\Omega^2 \cos^3 \theta_0 + 2A\Omega Cs - 2MghA. \end{aligned}$$

Lamentablemente esto no se simplifica nada aún sin reemplazamos $\Omega =$

$$\frac{1}{2A(\cos \theta_0)} \left(Cs_0 + \sqrt{C^2 s_0^2 - 4AMgh(\cos \theta_0)} \right) \text{ y } s = 2s_0.$$



Oscilaciones pequeñas

3.1. La energía potencial

Estudiaremos el movimiento de sistemas conservativos holonómicos con vínculos constantes cerca de una posición de equilibrio estable. En términos de las coordenadas generalizadas q_i , la energía potencial del sistema que es independiente del tiempo será escrita

$$V(q) = V(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Los valores de las coordenadas generalizadas en la posición de equilibrio los denotaremos por q_i^0 .

3.2. La energía cinética

Como se sabe, la energía cinética es

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2,$$

que expresada en términos de coordenadas generalizadas q_i solamente de acuerdo a

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q),$$

que no depende explícitamente del tiempo porque los vínculos son constantes. Entonces podemos escribir

$$K = \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

expresión que escribiremos

$$K = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k K_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (3.1)$$

siendo

$$K_{jk}(q) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_k} = K_{kj}(q),$$

elementos de una matriz simétrica, positiva definida porque la energía cinética no puede ser negativa. Esta expresión para la energía cinética la aproximaremos tomando en las coordenadas los valores de equilibrio, es decir

$$K \simeq \frac{1}{2} \sum_j \sum_k K_{jk}(q^0) \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

La condición para que el sistema tenga una posición de equilibrio estable, es que $V(q)$ tenga un mínimo. Ello es consecuencia de las ecuaciones de Lagrange que para este caso son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_k K_{jk}(q^0) \dot{q}_k \right) + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} &= 0, \\ \sum_k K_{jk}(q^0) \ddot{q}_k &= - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Posición de equilibrio significa que si el sistema es colocado allí con velocidades nulas $\dot{q}_j = 0$, el sistema permanezca ahí, es decir que las aceleraciones son todas nulas, $\ddot{q}_k = 0$. Las ecuaciones 3.2 implican para una posición de equilibrio q^0

$$0 = \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q_j^0} = 0.$$

3.2.1. Posición de equilibrio

Configuración de equilibrio significa que el sistema permanece con sus coordenadas iniciales q_k^0 sin variar, si se coloca allí con velocidades nulas. Es decir que ellas no varían si inicialmente no varían. Es decir que para $\dot{q}_k^0(0) = 0$ debe tenerse $\ddot{q}_k^0(0) = 0$. De las ecuaciones de Lagrange se deduce entonces que tales puntos se caracterizan por

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q_j^0} = 0.$$

De acuerdo a lo que se analiza a continuación, si se trata de un punto de equilibrio estable, ellos corresponden a mínimos de la energía potencial.

3.2.2. Estabilidad

El concepto de estabilidad está relacionado al comportamiento del sistema para condiciones iniciales próximas a la de equilibrio. El equilibrio se dice estable si para condiciones iniciales $q_j(0) = q_j^0 + \delta q_j$, $\dot{q}_j(0) = 0$, con $\delta q_j > 0$, entonces $\ddot{q}_j(0) < 0$, $\forall j$, es decir las coordenadas deben variar hacia los valores de equilibrio. Ello impone algunas condiciones a la energía potencial. Utilizando la ecuación (??), se tiene

$$\sum_k K_{jk}(q^0) \ddot{q}_k = - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}.$$

y colocando

$$\begin{aligned} q_j &= q_j^0 + \delta q_j, \\ \dot{q}_j &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum_k K_{jk}(q^0) \delta \ddot{q}_k = - \frac{\partial V(q_j^0 + \delta q_j)}{\partial q_j} = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q_j^0} - \sum_k \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \delta q_k.$$

O sea

$$\sum_k K_{jk}(q_j^0) \delta \ddot{q}_k \simeq - \sum_k \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \delta q_k.$$

Pero K_{jk} es positiva definida. El equilibrio será estable si $\delta \ddot{q}_k$ y δq_k tienen distinto signo. Se deduce entonces que

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} > 0, \quad \forall j, k,$$

es decir se trata de un mínimo de la energía potencial.

3.3. Linealización

De aquí en adelante, salvo que se advierta lo contrario, se usará la notación donde índice repetido significa sumatoria sobre ese índice. Para movimientos en una vecindad de una posición de equilibrio estable con ,

$$q_i = q_i^0 + \eta_i(t),$$

expandiremos la energía cinética y potencial para tener las ecuaciones de movimiento apropiadas para esta aproximación. Así resulta hasta segundo orden en las cantidades pequeñas η_i

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} K_{jk}(q^0) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k, \\ V &= V(q^0) + \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q^0} \eta_j + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \eta_j \eta_k, \end{aligned}$$

donde podemos olvidar el término constante $V(q^0)$, y los coeficientes de los términos lineales en η son cero, de modo que la energía potencial aproximada será

$$V = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \eta_j \eta_k,$$

3.4. El lagrangiano aproximado

Del desarrollo anterior, tenemos el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} K_{jk}(q^0) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0} \eta_j \eta_k,$$

que escribiremos en términos de elementos de matrices simétricas

$$L = \frac{1}{2} K_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - \frac{1}{2} V_{jk} \eta_j \eta_k,$$

siendo

$$K_{jk}(q^0) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left. \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_k} \right|_{q^0}, \quad V_{jk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q^0},$$

elementos de matriz constantes, simétricos K_{jk} positiva definida y $V_{jk} > 0$. De aquí resultan ecuaciones de movimiento, llamadas de oscilaciones pequeñas

$$K_{jk}\ddot{\eta}_k + V_{jk}\eta_k = 0, \quad (3.3)$$

que son ecuaciones lineales acopladas, válidas para η , y $\dot{\eta}$ suficientemente pequeños.

3.5. Solución de las ecuaciones de movimiento

Un primer paso hacia la solución del sistema (3.3) consiste en eliminar la dependencia en el tiempo que puede adivinarse exponencial, de modo que trataremos una solución de la forma

$$\eta_k = a_k e^{-i\omega t},$$

siendo los a_k complejos constantes y se entiende además que la solución final es la parte real de la que se determine. Al reemplazar resulta

$$-\omega^2 K_{jk} a_k + V_{jk} a_k = 0,$$

que es un sistema lineal homogéneo que tiene solución distinta de la trivial si los coeficientes (en realidad ω) cumplen determinadas condiciones, que determinaremos. En términos simples, alguna de las ecuaciones es una combinación lineal de las otras, lo que significa además que dichas ecuaciones no pueden determinar todas las incógnitas a_k . En términos matriciales, si $\mathbf{a}$ denota la matriz columna con elementos a_k entonces el sistema de ecuaciones es

$$\omega^2 \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{V} \mathbf{a}. \quad (3.4)$$

3.5.1. Los ω^2 son reales

Los elementos de $\mathbf{K}$ y $\mathbf{V}$ son reales y simétricos. Ello trae como primera consecuencia que ω^2 debe ser real. En efecto considere

$$\omega^2 \sum_k K_{jk} a_k = \sum_k V_{jk} a_k,$$

si conjugamos y usamos la realidad y simetría tenemos que

$$(\omega^2)^* \sum_k a_k^* K_{kj} = \sum_k a_k^* V_{kj}.$$

De ambas siguen

$$\omega^2 \sum_{jk} a_j^* K_{jk} a_k = \sum_{jk} a_j^* V_{jk} a_k, \quad (3.5)$$

y

$$(\omega^2)^* \sum_{jk} a_k^* K_{kj} a_j = \sum_{jk} a_k^* V_{kj} a_j. \quad (3.6)$$

Pero las sumatorias son iguales de modo que

$$((\omega^2)^* - (\omega^2)) \sum_{jk} a_j^* K_{jk} a_k = 0.$$

Con el siguiente desarrollo donde u_j , y v_j son las partes real e imaginaria de a_j , veremos que en realidad los a_j son reales. Desarrolle

$$\begin{aligned} \sum_{jk} a_j^* K_{jk} a_k &= \sum_{jk} (u_j - iv_j) K_{jk} (u_k + iv_k) \\ &= \sum_{jk} K_{jk} u_j u_k + \sum_{jk} K_{jk} v_j v_k + i \left(\sum_{jk} K_{jk} u_j v_k - \sum_{jk} K_{jk} v_j u_k \right) \\ &= \sum_{jk} K_{jk} u_j u_k + \sum_{jk} K_{jk} v_j v_k > 0, \end{aligned}$$

Que muestra que $\sum_{jk} a_j^* K_{jk} a_k$ es real y positivo definido. De allí sigue

$$\omega^2 = (\omega^2)^*,$$

o sea los ω^2 son reales. Si el sistema lineal se escribe

$$(\omega^2 K_{jk} - V_{jk}) a_k = 0,$$

los n valores reales de ω^2 están determinados por la condición de que el determinante de los coeficientes sea cero, es decir

$$\det(\omega^2 K_{jk} - V_{jk}) = 0.$$

Supondremos en lo que sigue que dichos valores son todos diferentes. Además, debido a que los valores ω^2 son todos reales, el sistema (3.4) tiene soluciones reales para todos los a_k , si el que está indeterminado se toma real. Por ello, en los desarrollos que siguen se suponen todos los a_k reales.

3.5.2. Diagonalización

Para valores distintos de ω , ω_k con $k = 1, 2, \dots, n$, cada conjunto solución a_k dependen del valor de ω considerado. De modo que introducimos un segundo índice que indica la dependencia en alguno de los ω . Así a_{jk} indica la solución a_j para $\omega = \omega_k$. En términos más precisos

$$\omega_l^2 \sum_k K_{jk} a_{kl} = \sum_k V_{jk} a_{kl}.$$

Si consideramos otro ω_m y trasponemos se obtiene similarmente

$$\omega_m^2 \sum_k a_{km} K_{kj} = \sum_k a_{km} V_{kj}$$

de donde siguen

$$\begin{aligned} \omega_l^2 \sum_{j,k} a_{jm} K_{jk} a_{kl} &= \sum_{j,k} a_{jm} V_{jk} a_{kl}, \\ \omega_m^2 \sum_{j,k} a_{km} K_{kj} a_{jl} &= \sum_{j,k} a_{km} V_{kj} a_{jl}, \end{aligned}$$

y que en términos de la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ pueden ser escritas como

$$\omega_l^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ml} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ml}, \quad (3.7)$$

$$\omega_m^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ml} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ml},$$

donde $\mathbf{A}^T$ indica la traspuesta de la matriz $\mathbf{A}$. Si las dos ecuaciones anteriores se restan, resulta

$$(\omega_l^2 - \omega_m^2) (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ml} = 0.$$

Esto significa que la matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$ es diagonal. Como cada columna de la matriz $\mathbf{A}$ tiene un elemento indeterminado (el sistema es homogéneo), podemos fijar arbitrariamente ese valor de modo que la matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$ tenga unos en la diagonal principal, es decir

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (3.8)$$

De la relación (3.7), se tiene que la matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A}$ también es diagonal con elementos ω_i^2 en la diagonal principal, cuestión que puede escribirse

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ij} = \omega_i^2 \delta_{ij}.$$

3.5.3. Solución del sistema

Supongamos entonces que se ha resuelto la ecuación de valores propios.

$$\omega^2 \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{V} \mathbf{a},$$

donde la condición para solución no trivial

$$\det (\omega^2 K_{jk} - V_{jk}) = 0,$$

nos conduce a n diferentes ω^2 . En cada conjunto solución hay uno que está indeterminado y lo elegimos normalizando los vectores $\mathbf{a}$ (que son las columnas de $\mathbf{A}$) de modo que

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{ij} &= \delta_{ij}, \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})_{ij} &= \omega_i^2 \delta_{ij}. \end{aligned}$$

entonces la solución de nuestro problema es una combinación lineal de las soluciones correspondientes a los diversos ω .

$$\eta_k = \operatorname{Re} \sum_j a_{kj} C_j e^{-i\omega_j t} = \sum_j a_{kj} \operatorname{Re} C_j e^{-i\omega_j t},$$

faltando considerar las condiciones iniciales.

Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales son los $2n$ valores $\eta_k(0)$, y $\dot{\eta}_k(0)$ que permiten determinar finalmente las $2n$ constantes, las partes real e imaginaria de C_k . Así resultará

$$\begin{aligned} \eta_k(0) &= \sum_j a_{kj} \operatorname{Re} (C_j), \\ \dot{\eta}_k(0) &= \sum_j a_{kj} \operatorname{Re} (-i\omega_j C_j) = \sum_j a_{kj} \omega_j \operatorname{Im} (C_j). \end{aligned}$$

Las propiedades de la matriz $\mathbf{A}$, permiten escribir expresiones explícitas para la parte real e imaginaria de C_k en términos de las condiciones iniciales, como explicamos a continuación. En efecto si definimos una matriz columna $\mathbf{c}_1$ con

componentes $\text{Re}(C_j)$ y otra matriz columna $\mathbf{c}_2$ con componentes $\omega_j \text{Im}(C_j)$, las dos relaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{A}\mathbf{c}_1, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = \mathbf{A}\mathbf{c}_2,$$

de modo que al usar (3.8) se obtendrá

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}(0), \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\eta}}(0),$$

que al ser desarrolladas en componentes determinan

$$\text{Re } C_j = \sum_{k,l} a_{kj} K_{kl} \eta_l(0), \quad \text{Im } C_j = \frac{1}{\omega_j} \sum_{k,l} a_{kj} K_{kl} \dot{\eta}_l(0),$$

donde se ha vuelto a la notación usual de sumatoria para que quede claro que no se suma en el índice j . Así se tiene finalmente la solución de nuestro sistema

$$\eta_k(t) = \sum_j a_{kj} (\text{Re } C_j e^{-i\omega_j t}) = \sum_j a_{kj} (\text{Re } C_j \cos \omega_j t + \text{Im } C_j \sin \omega_j t).$$

No se ahondará aquí en el procedimiento a seguir cuando hay valores repetidos de ω_k .

3.5.4. Coordenadas normales

Recordando que la solución (sin tomar la parte real) es

$$\eta_k = \sum_j a_{kj} C_j e^{-i\omega_j t}$$

y si llamamos

$$\varsigma_j = C_j e^{-i\omega_j t}$$

tenemos que

$$\eta_k = \sum_j a_{kj} \varsigma_j, \quad \dot{\eta}_k = \sum_j a_{kj} \dot{\varsigma}_j, \quad (3.9)$$

de modo que en términos de estas variables resulta

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k, \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} K_{jk} a_{jl} \dot{\zeta}_l a_{km} \dot{\zeta}_m, \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})_{lm} \dot{\zeta}_l \dot{\zeta}_m, \\
 &= \frac{1}{2} \sum_l \dot{\zeta}_l^2,
 \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} V_{jk} \eta_j \eta_k \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} V_{jk} a_{jl} \zeta_l a_{km} \zeta_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} (\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V})_{lm} \zeta_l \zeta_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} \omega_l^2 \delta_{lm} \zeta_l \zeta_m \\
 &= \frac{1}{2} \sum_l \omega_l^2 \zeta_l^2.
 \end{aligned}$$

3.5.5. El sistema general de dos grados de libertad

Hemos intentado, pero no se logra simplificación especial. Para tal sistema tendremos

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}, \\
 V &= \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}K_{11}\dot{\eta}_1^2 + K_{12}\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \frac{1}{2}K_{22}\dot{\eta}_2^2 + \\ -\frac{1}{2}V_{11}\eta_1^2 - V_{12}\eta_1\eta_2 - \frac{1}{2}V_{22}\eta_2^2,$$

de donde las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} K_{11}\ddot{\eta}_1 + K_{12}\ddot{\eta}_2 + V_{11}\eta_1 + V_{12}\eta_2 &= 0, \\ K_{12}\ddot{\eta}_1 + K_{22}\ddot{\eta}_2 + V_{12}\eta_1 + V_{22}\eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} V_{11}a_1 - \omega^2 K_{11}a_1 + V_{12}a_2 - \omega^2 K_{12}a_2 &= 0, \\ V_{12}a_1 - \omega^2 K_{12}a_1 + V_{22}a_2 - \omega^2 K_{22}a_2 &= 0. \end{aligned}$$

la condición de determinante nulo es

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 K_{11} + V_{11} & -\omega^2 K_{12} + V_{12} \\ -\omega^2 K_{12} + V_{12} & -\omega^2 K_{22} + V_{22} \end{pmatrix} = 0$$

o bien

$$\omega^4(K_{22}K_{11} - K_{12}^2) + \omega^2(2K_{12}V_{12} - K_{22}V_{11} - K_{11}V_{22}) + V_{11}V_{22} - V_{12}^2 = 0.$$

Llamemos

$$\begin{aligned} K_{11}K_{22} - K_{12}^2 &= k, \\ V_{11}V_{22} - V_{12}^2 &= v, \\ -(2K_{12}V_{12} - K_{22}V_{11} - K_{11}V_{22}) &= q \end{aligned}$$

luego

$$\omega^4 k - \omega^2 q + v = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2k} \left(q \pm \sqrt{q^2 - 4kv} \right) \\ \left(\frac{a_1}{a_2} \right) &= \frac{(\omega^2 K_{12} - V_{12})}{(V_{11} - \omega^2 K_{11})} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right)_+ = \frac{\left(\frac{1}{2k} \left(q + \sqrt{q^2 - 4kv} \right) K_{12} - V_{12} \right)}{\left(V_{11} - \frac{1}{2k} \left(q + \sqrt{q^2 - 4kv} \right) K_{11} \right)} = -\frac{(-q - \sqrt{q^2 - 4kv})K_{12} + 2kV_{12}}{2V_{11}k - K_{11}q - K_{11}\sqrt{q^2 - 4kv}}$$

:

3.5.6. Acoplamiento a través de la energía potencial:

$$K_{12} = 0$$

La condición anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \omega^4 K_{22} K_{11} - \omega^2 (K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22}) + V_{11} V_{22} - V_{12}^2 &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22} + \sqrt{(K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22})^2 - 4 K_{11} K_{22} (V_{11} V_{22} - V_{12}^2)}}{2 K_{22} K_{11}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) &= \frac{(\omega^2 K_{12} - V_{12})}{(V_{11} - \omega^2 K_{11})} = \frac{-V_{12}}{(V_{11} - \omega^2 K_{11})} \\ \left(\frac{a_1}{a_2} \right)_+ &= -\frac{1}{2 V_{12} K_{11}} (K_{22} V_{11} - K_{11} V_{22} + \sqrt{(K_{22} V_{11} - K_{11} V_{22})^2 + 4 K_{22} K_{11} V_{12}^2}) \end{aligned}$$

sea

$$V_{12} = f$$

3.5.7. Acoplamiento a través de la energía cinética:

$$V_{12} = 0$$

La condición anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \omega^4 (K_{22} K_{11} - K_{12}^2) - \omega^2 (K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22}) + V_{11} V_{22} &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{(K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22}) + \sqrt{(K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22})^2 - 4 V_{11} V_{22} (K_{22} K_{11} - K_{12}^2)}}{2 (K_{22} K_{11} - K_{12}^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) &= \frac{(\omega^2 K_{12} - V_{12})}{(V_{11} - \omega^2 K_{11})} \\ \left(\frac{a_1}{a_2} \right)_+ &= \end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned} K_{12}^2 &= f K_{22} K_{11} \\ \omega^2 &= \frac{(K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22}) + \sqrt{(K_{22} V_{11} + K_{11} V_{22})^2 - 4 V_{11} V_{22} K_{22} K_{11} (1 - f)}}{2 K_{22} K_{11} (1 - f)} \end{aligned}$$

no se simplifica nada.

3.5.8. Las ecuaciones de Lagrange se desacoplan

De modo que en estas coordenadas ς_l , denominadas coordenadas normales, el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} \sum_l \dot{\varsigma}_l^2 - \frac{1}{2} \sum_l \omega_l^2 \varsigma_l^2,$$

que muestra que las coordenadas normales varían independientemente cada una con una de las frecuencias propias de oscilación del sistema, de acuerdo a

$$\ddot{\varsigma}_l + \omega_l^2 \varsigma_l = 0.$$

Las coordenadas normales en términos de las coordenadas originales se obtiene invirtiendo la ecuación (3.9), es decir

$$\varsigma = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \eta,$$

o en forma explícita como

$$\varsigma_k(t) = \sum_{j,m} a_{jk} K_{jm} \eta_m(t).$$

3.6. Oscilaciones forzadas

El sistema que oscila puede estar sometido a fuerzas externas perturbadoras. Considere por ejemplo un sistema de dos bloques unidos a resortes que pueden oscilar sobre un plano horizontal liso. Si el extremo izquierdo del resorte de constante elástica k_1 está fijo, podemos tener oscilaciones libres. Si en cambio, el extremo izquierdo se mueve de alguna manera conocida

$$x = f(t),$$

tendremos oscilaciones forzadas. Mediante este ejemplo explicaremos conceptos más o menos generales.

Si x_1 y x_2 representan los desplazamientos de los bloques a partir de sus posiciones de equilibrio sin perturbación, el Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1 - f(t))^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2,$$

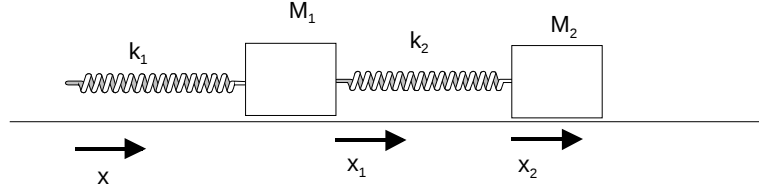


Figura 3.1:

de aquí las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - f(t)) - k_2(x_2 - x_1) &= 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) &= k_1 f(t), \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

ecuaciones en general similares a las de oscilaciones libres, pero no homogéneas. Como es bien sabido, la solución general es la solución de la parte homogénea (oscilaciones libres) más una solución particular de las ecuaciones no homogéneas. Para la parte homogénea, al igual que antes, se suponen soluciones exponenciales

$$\begin{aligned} x_1 &= Ae^{i\omega t}, \\ x_2 &= Be^{i\omega t}, \end{aligned}$$

resultan entonces dos ecuaciones algebraicas homogéneas para A , B

$$\begin{aligned} (k_2 + k_1 - M_1\omega^2)A - k_2B &= 0, \\ -k_2A + (k_2 - M_2\omega^2)B &= 0, \end{aligned}$$

que con la condición de determinante nulo conduce a

$$-\frac{k_2}{M_1}\omega^2 + \frac{k_1k_2}{M_1M_2} - \frac{k_1}{M_1}\omega^2 - \omega^2\frac{k_2}{M_2} + \omega^4 = 0.$$

Sean

$$\Omega_{21}^2 = \frac{k_2}{M_1}, \quad \Omega_1^2 = \frac{k_1}{M_1}, \quad \Omega_2^2 = \frac{k_2}{M_2},$$

entonces las frecuencias propias o normales son las raíces de

$$\omega^4 - (\Omega_{21}^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 = 0,$$

y son

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\Omega_{21}^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_2^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(\Omega_1^2 + \Omega_{21}^2 - 2\Omega_1\Omega_2 + \Omega_2^2)(\Omega_1^2 + \Omega_{21}^2 + 2\Omega_1\Omega_2 + \Omega_2^2)},$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\Omega_{21}^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_2^2 - \frac{1}{2}\sqrt{(\Omega_1^2 + \Omega_{21}^2 - 2\Omega_1\Omega_2 + \Omega_2^2)(\Omega_1^2 + \Omega_{21}^2 + 2\Omega_1\Omega_2 + \Omega_2^2)}.$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}), \\ x_2 &= \operatorname{Re}(B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t}), \end{aligned}$$

donde las razones entre A y B para ω_1 y ω_2 resultan ser

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= \frac{\Omega_2^2 - \omega_1^2}{\Omega_2^2} = r_1, \\ \frac{A_2}{B_2} &= \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2}{\Omega_2^2} = r_2, \end{aligned}$$

luego la solución homogénea es

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 B_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 B_2 e^{i\omega_2 t}, \\ x_2 &= B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t}, \end{aligned}$$

en general resultarán

$$B_1 = |B_1| e^{i\phi_1}, \quad B_2 = |B_2| e^{i\phi_2}$$

luego

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 &= |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

3.6.1. Movimiento forzado

Un caso particular pero importante ocurre si la perturbación es armónica

$$x = C \sin \Omega t,$$

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) &= k_1 f(t), \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

dividiendo por las masas y usando las definiciones previas las podemos escribir

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 - \Omega_{21}^2(x_2 - x_1) &= \Omega_1^2 C \sin \Omega t, \\ \ddot{x}_2 + \Omega_2^2(x_2 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

probamos una solución particular de la forma

$$x_1 = D \sin \Omega t, \quad x_2 = E \sin \Omega t,$$

y al sustituir resulta

$$\begin{aligned} -\Omega^2 D + \Omega_1^2 D - \Omega_{21}^2(E - D) &= \Omega_1^2 C, \\ -\Omega^2 E + \Omega_2^2(E - D) &= 0, \end{aligned}$$

que resolvemos para E y D

$$\begin{aligned} E &= \frac{\Omega_2^2 \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C \\ D &= \frac{\Omega_1^2 (\Omega_2^2 - \Omega^2)}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C \end{aligned}$$

3.6.2. Resonancia

La resonancia ocurre cuando la frecuencia forzadora Ω coincide con alguna de las frecuencias propias ω_1 o ω_2 . Algunos textos dicen que entonces E , D tienden a infinito. Sin embargo un análisis más cuidadoso debe ser hecho. ¿Cómo se van a infinito?

La solución general, parte forzada más solución no forzada será la suma

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{\Omega_1^2 (\Omega_2^2 - \Omega^2)}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C \sin \Omega t, \\ x_2 &= |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{\Omega_2^2 \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C \sin \Omega t, \\ 0 &= \omega^4 - (\Omega_{21}^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2) \omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 \end{aligned}$$

Supongamos que inicialmente el sistema está en la posición de equilibrio y en reposo

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

Esto determina las constantes $|B_1|$, ϕ_1 , $|B_2|$, ϕ_2

$$\begin{aligned} 0 &= r_1 |B_1| \cos(\phi_1) + r_2 |B_2| \cos(\phi_2), \\ 0 &= |B_1| \cos(\phi_1) + |B_2| \cos(\phi_2), \\ 0 &= -r_1 |B_1| \omega_1 \sin(\phi_1) - r_2 |B_2| \omega_2 \sin(\phi_2) + \frac{\Omega_1^2 (\Omega_2^2 - \Omega^2)}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C\Omega, \\ 0 &= -|B_1| \omega_1 \sin(\phi_1) - |B_2| \omega_2 \sin(\phi_2) + \frac{\Omega_2^2 \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C\Omega, \end{aligned}$$

de donde resultan $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ y

$$\begin{aligned} 0 &= -r_1 |B_1| \omega_1 - r_2 |B_2| \omega_2 + \frac{\Omega_1^2 (\Omega_2^2 - \Omega^2)}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C\Omega, \\ 0 &= -|B_1| \omega_1 - |B_2| \omega_2 + \frac{\Omega_2^2 \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} C\Omega, \end{aligned}$$

que se resuelven

$$\begin{aligned} |B_2| &= \Omega_1^2 C\Omega \frac{r_1 \Omega_2^2 + \Omega^2 - \Omega_2^2}{\omega_2 (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2) (r_1 - r_2)}, \\ |B_1| &= -(\Omega^2 - \Omega_2^2 + \Omega_2^2 r_2) \Omega_1^2 C \frac{\Omega}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2) \omega_1 (r_1 - r_2)}, \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_2^2 - \omega_1^2}{\Omega_2^2} &= r_1, \\ \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2}{\Omega_2^2} &= r_2, \\ r_1 - r_2 &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\Omega_2^2}, \end{aligned}$$

luego

$$|B_2| = \Omega_1^2 \Omega_2^2 \frac{\Omega^2 - \omega_1^2}{\omega_2 (\Omega^2 - \omega_1^2) (\Omega^2 - \omega_2^2) (\omega_2^2 - \omega_1^2)} C \Omega,$$

$$|B_1| = -(\Omega^2 - \omega_2^2) \Omega_1^2 \Omega_2^2 C \frac{\Omega}{\omega_1 (\Omega^2 - \omega_1^2) (\Omega^2 - \omega_2^2) (\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

y finalmente después de bastante álgebra se obtiene la solución completa.

$$x_1 = \frac{C \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2) (\Omega^2 - \omega_2^2)} \left(\begin{aligned} & \frac{(\Omega_2^2 - \omega_1^2) (\Omega^2 - \omega_2^2)}{\omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \Omega \sin(\omega_1 t) \\ & - \frac{(\Omega_2^2 - \omega_2^2) (\Omega^2 - \omega_1^2)}{\omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \Omega \sin(\omega_2 t) + (\Omega_2^2 - \Omega^2) \sin \Omega t \end{aligned} \right),$$

$$x_2 = \frac{C \Omega_2^2 \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2) (\Omega^2 - \omega_2^2)} \left(\begin{aligned} & \frac{(\Omega^2 - \omega_2^2)}{\omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \Omega \sin(\omega_1 t) \\ & - \frac{\Omega^2 - \omega_1^2}{\omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \Omega \sin(\omega_2 t) + \sin \Omega t \end{aligned} \right),$$

3.6.3. resonancia $\Omega = \omega_1$

Es necesario tomar límite. Al aplicar L'Hopital, aparecen términos lineales en el tiempo t y esas amplitudes crecen con el tiempo.

$$x_1 = \frac{C \Omega_1^2}{2 \omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} \left(\begin{aligned} & -(\omega_2^2 - \omega_1^2) (\Omega_2^2 - \omega_1^2) t \cos \omega_1 t + 2 (\Omega_2^2 - \omega_2^2) \frac{\omega_1^2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \\ & + \frac{(\omega_2^2 - 3\omega_1^2) \Omega_2^2 + (-\omega_2^2 + 3\omega_1^2 + 2) \omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t \end{aligned} \right),$$

$$x_2 = \frac{C \Omega_2^2 \Omega_1^2}{2 \omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} \left(\begin{aligned} & -(\omega_2^2 - \omega_1^2) t \cos \omega_1 t + 2 \frac{\omega_1^2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \\ & - \frac{-\omega_2^2 + 3\omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t \end{aligned} \right),$$

3.6.4. resonancias $\Omega = \omega_2$

también es necesario tomar límite. Al aplicar L'Hopital, aparecen términos lineales en el tiempo t y esas amplitudes crecen con el tiempo.

$$x_1 = \frac{C \Omega_1^2}{2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 \omega_2} \left((\Omega_2^2 - \omega_2^2) (\omega_2^2 - \omega_1^2) t (\cos \omega_2 t) + 2 (\Omega_2^2 - \omega_1^2) \frac{\omega_2^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{-3\Omega_2^2 \omega_2^2 + \omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_2 t \right),$$

$$x_2 = \frac{C \Omega_2^2 \Omega_1^2}{2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 \omega_2} \left((\omega_2^2 - \omega_1^2) t \cos \omega_2 t + 2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{3\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right),$$

3.6.5. Para tiempos largos

Para tiempos largos, podemos quedarnos sólo con las partes cuyas amplitudes crecen sin límite proporcionalmente al tiempo

1. resonancias $\Omega = \omega_1$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{C\Omega_1^2(\Omega_2^2 - \omega_1^2)}{2\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}t \cos \omega_1 t, \\ x_2 &= -\frac{C\Omega_2^2\Omega_1^2}{2\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}t \cos \omega_1 t, \end{aligned}$$

2. resonancias $\Omega = \omega_2$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{C\Omega_1^2(\Omega_2^2 - \omega_2^2)}{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)\omega_2}t \cos \omega_2 t, \\ x_2 &= \frac{C\Omega_2^2\Omega_1^2}{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)\omega_2}t \cos \omega_2 t. \end{aligned}$$

3.7. Ejemplos

EJEMPLO 3.7.1 Considere el péndulo doble indicado en la figura (3.2), donde el largo natural del resorte sin masa es L_0 , que coincide con la separación de las masas en su posición de equilibrio. La constante elástica es k y la longitud de los hilos es L . Estudie las oscilaciones pequeñas en torno a los valores de equilibrio $\theta = 0$ y $\phi = 0$.

Solución. Para valores pequeños de θ y ϕ , la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}mgL(\theta^2 + \phi^2) + \frac{1}{2}kL^2(\theta - \phi)^2,$$

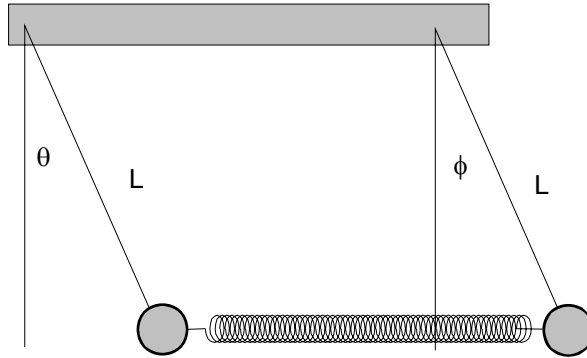


Figura 3.2:

por lo cual las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{V}$ son

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} mgL + kL^2 & -kL^2 \\ -kL^2 & mgL + kL^2 \end{pmatrix},$$

de aquí el sistema lineal de ecuaciones es

$$\begin{aligned} & \omega^2 \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mgL + kL^2 & -kL^2 \\ -kL^2 & mgL + kL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y las frecuencias propias satisfacen

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2(mL^2) - mgL - kL^2 & kL^2 \\ kL^2 & \omega^2(mL^2) - mgL - kL^2 \end{pmatrix} = 0,$$

con soluciones

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{L}, \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{L} + \frac{2k}{m}. \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, una fila del sistema de ecuaciones es redundante por lo cual elegimos la primera, que es

$$\omega^2 mL^2 a_1 = (mgL + kL^2)a_1 - kL^2 a_2$$

o bien, para cada frecuencia

$$\begin{aligned} \frac{g}{L} mL^2 a_{11} &= (mgL + kL^2)a_{11} - kL^2 a_{21}, \\ \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right) mL^2 a_{12} &= (mgL + kL^2)a_{12} - kL^2 a_{22}, \end{aligned}$$

que se simplifican a

$$a_{11} = a_{21}, \quad a_{12} = -a_{22},$$

por lo cual la matriz $\mathbf{A}$ sin normalizar aun es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}.$$

Normalización requiere que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & -a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = I,$$

o bien

$$mL^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & -a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde sigue

$$mL^2 a_{11}^2 = 1, \quad mL^2 a_{12}^2 = 1.$$

De donde finalmente, la matriz $\mathbf{A}$ ha sido determinada

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Condiciones iniciales permitirían seguir con la rutina de expresar las coordenadas θ y ϕ en función del tiempo. Nos limitaremos a dejarlas expresadas como

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \operatorname{Re}(C_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_2 t}), \\ \phi &= \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \operatorname{Re}(C_1 e^{-i\omega_1 t} - C_2 e^{-i\omega_2 t}). \end{aligned}$$

Por último, las coordenadas normales, están dadas por

$$\varsigma = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{mL^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix},$$

que se reducen (salvo un factor irrelevante) a

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \theta + \phi, \\ \varsigma_2 &= \theta - \phi. \end{aligned}$$

Estos dos modos son independientes, por lo cual se puede establecer cada uno de ellos independientemente, y variarán con las frecuencias propias ω_1 y ω_2 . Es decir

$$\begin{aligned} \theta + \phi &= D \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t - \delta \right), \\ \theta - \phi &= E \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}} t - \varepsilon \right), \end{aligned}$$

con constantes D , E , δ , ε determinables con las condiciones iniciales que se tengan. Debe notarse que la diferencia de los ángulos es el modo de mayor frecuencia.



EJEMPLO 3.7.2 *Resuelva el problema anterior sin hacer uso de la teoría general elaborada.*

Solución. En algunos casos sencillos como este ejemplo, una solución directa puede ser más simple. En efecto del lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} mL^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) - \frac{1}{2} mgL (\theta^2 + \phi^2) - \frac{1}{2} kL^2 (\theta - \phi)^2,$$

siguen las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m} \right) \theta - \frac{k}{m} \phi &= 0, \\ \ddot{\phi} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m} \right) \phi - \frac{k}{m} \theta &= 0, \end{aligned}$$

de donde por simple inspección resultan

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} - \ddot{\phi} + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)(\theta - \phi) &= 0, \\ \ddot{\theta} + \ddot{\phi} + \frac{g}{L}(\theta + \phi) &= 0,\end{aligned}$$

que corroboran los resultados obtenidos por el método general.

EJEMPLO 3.7.3 *Con relación a la figura (3.3), dos partículas de igual masa m oscilan horizontalmente unidas a resortes iguales con constante elástica k , de modo que los extremos exteriores de los resortes están fijos. Analice las oscilaciones pequeñas de las partículas en torno a sus posiciones de equilibrio estable.*

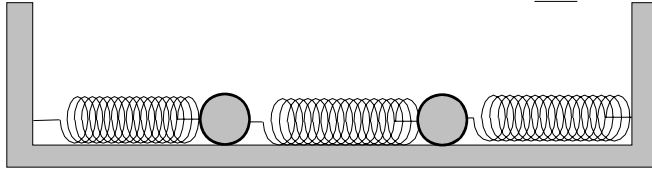


Figura 3.3:

Solución. Si x_1 y x_2 indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

De allí las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{V}$ son

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det \left(\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

o bien

$$\omega^4 m^2 - 4\omega^2 mk + 3k^2 = 0,$$

de donde resulta

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 3\frac{k}{m}.$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{21}, \\ a_{12} &= -a_{22}. \end{aligned}$$

Normalización requiere que $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}$, por lo cual

$$m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} = I,$$

entonces $2ma_{11}^2 = 1$ y $2ma_{22}^2 = 1$, obteniendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí, las soluciones oscilatorias son

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \operatorname{Re} (C_1 e^{-\omega_1 t} - C_2 e^{-\omega_2 t}), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \operatorname{Re} (C_1 e^{-\omega_1 t} + C_2 e^{-\omega_2 t}). \end{aligned}$$

También indicaremos los modos normales $\varsigma = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}$ que resultan ser

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 + x_2), \\ \varsigma_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (-x_1 + x_2). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.7.4 Con relación a la figura (3.3), dos partículas de igual masa m oscilan horizontalmente unidas a resortes iguales con constante elástica k los de los extremos y k_1 el central, de modo que los extremos exteriores de los resortes están fijos. Analice las oscilaciones pequeñas de las partículas en torno a sus posiciones de equilibrio estable.

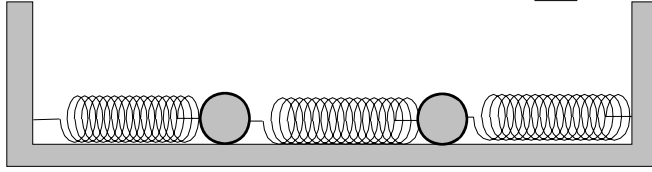


Figura 3.4:

Solución. Si x_1 y x_2 indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

De allí las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{V}$ son

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det \left(\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

o bien

$$\omega^4 m^2 - 2\omega^2 mk - 2\omega^2 mk_1 + k^2 + 2kk_1 = 0,$$

de donde resulta

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m}.$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \frac{(k + k_1)}{m}\right)a_1 &= -\frac{k_1}{m}a_2, \\ a_1 &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\omega^2 - \frac{(k + k_1)}{m}\right)}a_2, \end{aligned}$$

y para las dos frecuencias propias resulta

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \frac{(k + k_1)}{m}\right)}a_{21} = a_{21}, \\ a_{12} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k + 2k_1}{m} - \frac{(k + k_1)}{m}\right)}a_{22} = -a_{22}. \end{aligned}$$

Normalización requiere que $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}$, por lo cual

$$m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} = I,$$

entonces $2ma_{11}^2 = 1$ y $2ma_{22}^2 = 1$, obteniendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí, las soluciones oscilatorias son

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \operatorname{Re} (C_1 e^{-\omega_1 t} - C_2 e^{-\omega_2 t}), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \operatorname{Re} (C_1 e^{-\omega_1 t} + C_2 e^{-\omega_2 t}). \end{aligned}$$

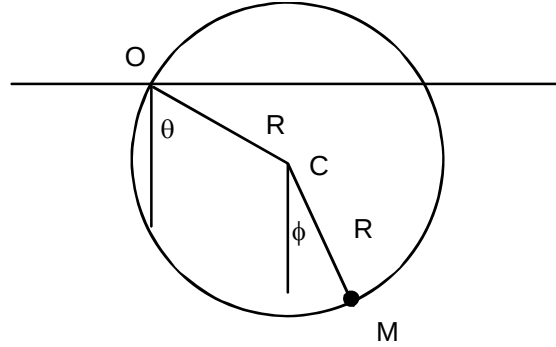
También indicaremos los modos normales $\varsigma = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}$ que resultan ser

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 + x_2), \\ \varsigma_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (-x_1 + x_2). \end{aligned}$$

3.8. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 3.8.1 Considere un aro liso de masa M y radio R el cual puede oscilar en torno de un punto de su periferia bajo la acción de la gravedad. Vinculada al aro hay una partícula de masa M que puede moverse libremente sobre el aro. Determine las frecuencias propias de oscilación y las coordenadas normales.

Solución. Usemos las coordenadas θ y ϕ indicadas en la figura.



Las coordenadas de la partícula son

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta + R \sin \phi, \\ y &= -R \cos \theta - R \cos \phi \simeq \frac{1}{2} R \theta^2 + \frac{1}{2} R \phi^2, \end{aligned}$$

de donde, aproximando para oscilaciones pequeñas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R \dot{\theta} \cos \theta + R \dot{\phi} \cos \phi \simeq R \dot{\theta} + R \dot{\phi}, \\ \dot{y} &= R \dot{\theta} \sin \theta + R \dot{\phi} \sin \phi \simeq 0. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= R \dot{\theta} \cos \theta \simeq R \dot{\theta}, \\ \dot{y}_C &= R \dot{\theta} \sin \theta \simeq 0, \end{aligned}$$

de modo que el Lagrangiano aproximado será

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} M (R \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} (M R^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R \dot{\theta} + R \dot{\phi})^2 - M g \left(\frac{1}{2} R \theta^2 + \frac{1}{2} R \phi^2 \right) - M g \left(\frac{1}{2} R \theta^2 \right) \\ &= \frac{3}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + M R^2 \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\phi}^2 - M g (R \theta^2 + \frac{1}{2} R \phi^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \begin{pmatrix} 3MR^2 & MR^2 \\ MR^2 & MR^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} 2MgR & 0 \\ 0 & MgR \end{pmatrix},\end{aligned}$$

de donde las frecuencias propias satisfacen

$$\det \left(\omega^2 \begin{pmatrix} 3MR^2 & MR^2 \\ MR^2 & MR^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2MgR & 0 \\ 0 & MgR \end{pmatrix} \right) = 0,$$

o sea

$$2M^2R^4\omega^4 - 5M^2R^3\omega^2g + 2M^2g^2R^2 = 0,$$

de donde las frecuencias propias son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{R}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{R}}.$$

Las ecuaciones algebraicas (la primera fila solamente)

$$\omega_l^2 K_{jk} a_{kl} = V_{jk} a_{kl},$$

son

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{g}{R} (3MR^2 a_{11} + MR^2 a_{21}) &= 2MgR a_{11}, \\ \omega_2^2 (3MR^2 a_{12} + MR^2 a_{22}) &= 2MgR a_{12},\end{aligned}$$

que se simplifican a

$$\begin{aligned}a_{21} &= a_{11}, \\ a_{22} &= -2a_{12},\end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & -\frac{1}{2}a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Normalización requiere que $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}$, por lo cual

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -\frac{1}{2}a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3MR^2 & MR^2 \\ MR^2 & MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -\frac{1}{2}a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6a_{11}^2 MR^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}a_{22}^2 MR^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

de donde

$$a_{11} = \sqrt{\frac{1}{6MR^2}}, \quad a_{22} = \sqrt{\frac{4}{3MR^2}}.$$

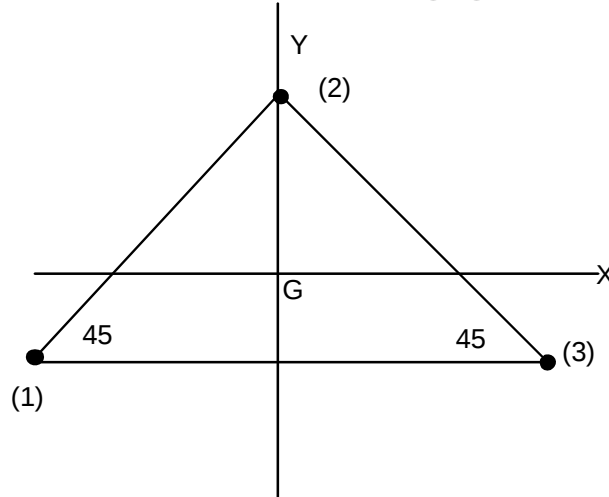
También indicaremos las coordenadas normales $\zeta = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}$ o sea

$$\begin{aligned} \zeta &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6MR^2}} & \sqrt{\frac{1}{6MR^2}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3MR^2}} & \sqrt{\frac{4}{3MR^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3MR^2 & MR^2 \\ MR^2 & MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \\ &= R\sqrt{M} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{6}\theta + \frac{1}{3}\sqrt{6}\phi \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3}\theta + \frac{1}{3}\sqrt{3}\phi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

: o sea

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{3}R\sqrt{6M}(2\theta + \phi), \\ \zeta_2 &= \frac{1}{3}R\sqrt{3M}(-\theta + \phi). \end{aligned}$$

EJERCICIO 3.8.2 Una molécula consiste en tres átomos iguales localizados en los vértices de un triángulo rectángulo isósceles estando cada par de átomos unidos por un resorte de constante elástica k . Estudie las oscilaciones pequeñas y demuestre que hay tres modos degenerados con $\omega = 0$. Determine su significado y determine las tres frecuencias propias distintas de cero.



Solución. Por razones físicas, hay tres frecuencias cero asociadas a los posibles desplazamientos como un todo, en la dirección X , en la dirección Y y una rotación como un todo en la dirección del eje Z . Para eliminar esos modos restringimos el sistema a tener el centro de masa en el origen con velocidad cero y cero momentum angular respecto al centro de masa. Esto significa

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\y_1 + y_2 + y_3 &= 0.\end{aligned}$$

para oscilaciones pequeñas pueden considerarse los $\vec{r}_i$ como sus valores de equilibrio y sus desplazamientos pequeños $\vec{u}_i$ de modo que

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i0} + \vec{u}_i.$$

luego el momentum angular puede aproximarse a

$$\vec{L}_G = m\vec{r}_{10} \times \frac{d}{dt}\vec{u}_1 + m\vec{r}_{20} \times \frac{d}{dt}\vec{u}_2 + m\vec{r}_{30} \times \frac{d}{dt}\vec{u}_3 = 0,$$

que se satisface si

$$\vec{r}_{10} \times \vec{u}_1 + \vec{r}_{20} \times \vec{u}_2 + \vec{r}_{30} \times \vec{u}_3 = 0. \quad (\text{momang})$$

O sea tenemos estas restricciones

$$\begin{aligned}u_{1x} + u_{2x} + u_{3x} &= 0, \\u_{1y} + u_{2y} + u_{3y} &= 0\end{aligned}$$

Pero, si a denota la arista 1-2 del triángulo la altura es $h = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}y_1 &= y_3 = -\frac{1}{3}\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad y_2 = \frac{2}{3}\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \\x_1 &= -x_3 = -\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad x_2 = 0,\end{aligned}$$

luego la relación ?? puede reducirse a

$$\begin{aligned}(u_{1x} + u_{3x})\frac{1}{3}\frac{1}{2}a\sqrt{2} + (u_{3y} - u_{1y})\frac{1}{2}a\sqrt{2} - u_{2x}\frac{2}{3}\frac{1}{2}a\sqrt{2} &= 0, \\(u_{1x} + u_{3x}) + 3(u_{3y} - u_{1y}) - 2u_{2x} &= 0.\end{aligned}$$

Hay desde luego sólo tres coordenadas pequeñas independientes. Falta establecer cual es el cambio de las longitudes producto de estas variaciones. Para $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, resulta

$$\begin{aligned}\delta l_{12} &= (u_{2x} - u_{1x})\frac{1}{2}\sqrt{2} + (u_{2y} - u_{1y})\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \delta l_{23} &= -(u_{2x} - u_{3x})\frac{1}{2}\sqrt{2} + (u_{2y} - u_{3y})\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \delta l_{13} &= u_{3x} - u_{1x}.\end{aligned}$$

Introducimos las siguientes tres coordenadas

$$\begin{aligned}q_1 &= u_{3x} + u_{1x} \\ q_2 &= u_{3x} - u_{1x} \\ q_3 &= u_{1y} + u_{3y}.\end{aligned}$$

de donde, con bastante álgebra resultan

$$\begin{aligned}u_{1x} &= \frac{1}{2}(q_1 - q_2), & u_{1y} &= \left(\frac{1}{2}q_3 + \frac{1}{6}q_1\right), \\ u_{2x} &= -q_1, & u_{2y} &= -q_3, \\ u_{3x} &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2), & u_{3y} &= \left(\frac{1}{2}q_3 - \frac{1}{6}q_1\right),\end{aligned}$$

La energía cinética será

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m(\dot{u}_{1x}^2 + \dot{u}_{1y}^2 + \dot{u}_{2x}^2 + \dot{u}_{2y}^2 + \dot{u}_{3x}^2 + \dot{u}_{3y}^2) = \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\dot{q}_3 + \frac{1}{6}\dot{q}_1\right)^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2 + \frac{1}{4}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\dot{q}_3 - \frac{1}{6}\dot{q}_1\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{36}m(28\dot{q}_1^2 + 9\dot{q}_2^2 + 27\dot{q}_3^2),\end{aligned}$$

las deformaciones de los resortes son

$$\begin{aligned}\delta l_{12} &= -\frac{5}{6}\sqrt{2}q_1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}q_2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}q_3, \\ \delta l_{23} &= \frac{5}{6}\sqrt{2}q_1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}q_2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}q_3, \\ \delta l_{13} &= q_2.\end{aligned}$$

la energía potencial será

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\left(\left(-\frac{5}{6}\sqrt{2}q_1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}q_2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}q_3\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\sqrt{2}q_1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}q_2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}q_3\right)^2 + (q_2)^2\right) \\ &= \frac{1}{72}k(100q_1^2 + 45q_2^2 - 54q_2q_3 + 81q_3^2) \end{aligned}$$

Entonces el Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{36}m(28\dot{q}_1^2 + 9\dot{q}_2^2 + 27\dot{q}_3^2) - \frac{1}{72}k(100q_1^2 + 45q_2^2 - 54q_2q_3 + 81q_3^2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \frac{25}{14}\omega_0^2 q_1 &= 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{25}{14}}\omega_0. \\ \ddot{q}_2 + \frac{1}{2}\omega_0^2(5q_2 - 3q_3) &= 0, \\ \ddot{q}_3 - 2\omega_0^2(q_2 - 3q_3) &= 0, \end{aligned}$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Las otras frecuencias satisfacen

$$\begin{aligned} -\omega^2 a_2 + \frac{1}{2}\omega_0^2(5a_2 - 3a_3) &= 0, \\ -\omega^2 a_3 - 2\omega_0^2(a_2 - 3a_3) &= 0, \end{aligned}$$

debe ser

$$\det \begin{bmatrix} -\omega^2 + \frac{5}{2}\omega_0^2 & -\frac{3}{2}\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & -\omega^2 + 6\omega_0^2 \end{bmatrix} = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \sqrt{\frac{17}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{97}}\omega_0, \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{97}}\omega_0, \end{aligned}$$

Note que

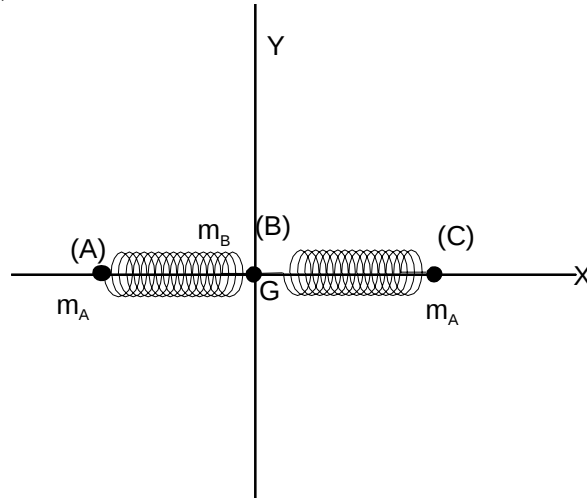
$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_3} &= -\frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \frac{5}{2}\omega_0^2)}, \\ \frac{a_{22}}{a_{32}} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{(\frac{17}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{97} - \frac{5}{2})} = -\frac{6}{7 + \sqrt{97}} = -0,356 \, 11 \\ \frac{a_{23}}{a_{33}} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{(\frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{97} - \frac{5}{2})} = \frac{6}{-7 + \sqrt{97}} = 2.106 \, 1 \end{aligned}$$

luego, las coordenadas normales ξ_1, ξ_2, ξ_3 satisfacen

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 = u_{3x} + u_{1x} \\ q_2 &= -\frac{6}{7 + \sqrt{97}}\xi_2 + \frac{6}{-7 + \sqrt{97}}\xi_3 = u_{3x} - u_{1x} \\ q_3 &= \xi_2 + \xi_3 = u_{1y} + u_{3y} = -u_{2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 &= -\frac{1}{2}u_{2y} + \frac{1}{14}\sqrt{97}u_{2y} + \frac{4}{7}u_{3x} - \frac{4}{7}u_{1x}, \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2}u_{2y} - \frac{1}{14}\sqrt{97}u_{2y} - \frac{4}{7}u_{3x} + \frac{4}{7}u_{1x}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 3.8.3 Una molécula consiste en dos átomos (A) una línea recta unidos por resortes a otro átomo (B), de igual constante elástica k . A y C tienen la misma masa. Estudie las oscilaciones pequeñas en el plano xy . Determine las frecuencias propias distintas de cero para oscilaciones longitudinales (eje X)..



Solución. Por razones físicas hay una frecuencias cero asociada al desplazamientos como un todo, en la dirección X . Para eliminar ese modo restringimos el sistema a tener el centro de masa en el origen con velocidad cero. Esto significa

$$m_A x_A + m_B x_B + m_A x_C = 0.$$

para oscilaciones pequeñas pueden considerarse los $\vec{r}_i$ como sus valores de equilibrio y sus desplazamientos pequeños $\vec{u}_i$ de modo que

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i0} + \vec{u}_i.$$

$$m_A u_{Ax} + m_B u_{Bx} + m_A u_{Cx} = 0.$$

Pero, si a denota la separación de equilibrio de los átomos

$$x_A = -x_C = -a, \quad x_B = 0,$$

El Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}m_A(\dot{u}_{Ax}^2 + \dot{u}_{Bx}^2) + \frac{1}{2}m_c\dot{u}_{Cx}^2 - \frac{1}{2}k((u_{Cx} - u_{Bx})^2 + (u_{Ax} - u_{Bx})^2).$$

Introduzcamos dos nuevas variables

$$\begin{aligned} q_1 &= u_{Cx} + u_{Ax}, \\ q_2 &= u_{Cx} - u_{Ax}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} u_{Cx} &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \\ u_{Ax} &= \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \end{aligned}$$

pero

$$u_{Bx} = -\frac{m_A}{m_B}(u_{Ax} + u_{Cx}) = -\frac{m_A}{m_B}q_1,$$

luego luego la Energía cinética resulta ser

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_A\left(\left(\frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\right)^2\right) + \frac{1}{2}m_B\left(-\frac{m_A}{m_B}\dot{q}_1\right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{4}m_A + \frac{1}{2}m_B\frac{m_A^2}{m_B^2}\right)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}m_A\dot{q}_2^2. \end{aligned}$$

La energía potencial es

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{1}{2}(q_1 + q_2) + \frac{m_A}{m_B}q_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(q_1 - q_2) + \frac{m_A}{m_B}q_1\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}k + \frac{k}{m_B}m_A + \frac{k}{m_B^2}m_A^2\right)q_1^2 + \frac{1}{4}kq_2^2. \end{aligned}$$

El Lagrangiano está desacoplado y es

$$L = \left(\frac{1}{4}m_A + \frac{1}{2}m_B \frac{m_A^2}{m_B^2}\right)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}m_A\dot{q}_2^2 - k\left(\frac{1}{4} + \frac{m_A}{m_B} + \frac{m_A^2}{m_B^2}\right)q_1^2 - \frac{1}{4}kq_2^2.$$

De aquí resultan las ecuaciones para los modos normales

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}m_A + \frac{1}{2}m_B \frac{m_A^2}{m_B^2}\right)\ddot{q}_1 + k\left(\frac{1}{4} + \frac{m_A}{m_B} + \frac{m_A^2}{m_B^2}\right)q_1 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + \frac{k}{m_A}q_2 &= 0, \end{aligned}$$

donde las frecuencias propias son

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{(m_B + 2m_A)k}{m_A m_B}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m_A}}. \end{aligned}$$



CAPÍTULO 4

Sistemas con muchos grados de libertad

En el capítulo anterior se explicó el método para analizar oscilaciones pequeñas de un sistema de un número pequeño de grados de libertad. Cuando el número de grados de libertad se hace muy grande, aunque en principio no habría dificultades, la resolución de las ecuaciones de valores propios se torna poco práctica. Sin embargo hay casos, en que debido a ciertas simetrías, el problema puede resolverse para un número arbitrario de grados de libertad. Pondremos atención en algunos casos particulares de solución simple y luego generalizaremos los resultados a sistemas con infinitos grados de libertad, los sistemas continuos.

4.1. Oscilaciones longitudinales

Considere un sistema unidimensional constituido por un conjunto de N partículas de igual masa que m que están unidas en línea recta por resortes de constante elástica K , y largo natural a . Si denotamos por q_i las desviaciones longitudinales en torno a las posiciones de equilibrio, ver figura (4.1).

El lagrangiano del sistema es

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} K (q_i - q_{i-1})^2,$$

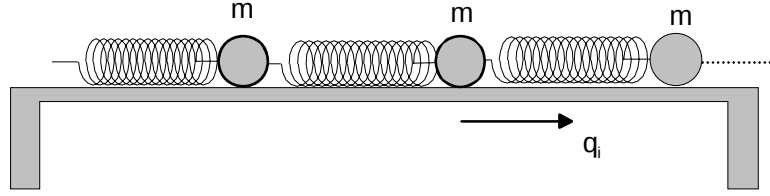


Figura 4.1: osciladores acoplados

de donde se deducen las ecuaciones de movimiento para cada masa

$$\ddot{q}_j = \Omega^2(q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas en dos casos.

4.1.1. (a) Extremos fijos

Para el caso N partículas pueden moverse y dos más de los extremos están fijas tomaremos $q_0, q_{N+1} = 0$ para las fijas. Podemos además adivinar dependencias temporales de la forma

$$q_j(t) = a_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Al derivar y reemplazar resultan para las constante a_j las ecuaciones lineales

$$-\omega^2 a_j = \Omega^2(a_{j+1} + a_{j-1} - 2a_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

o bien

$$\Omega^2 a_{j-1} + (\omega^2 - 2\Omega^2) a_j + \Omega^2 a_{j+1} = 0, \quad \text{con } \Omega^2 = \frac{K}{m}, \quad (4.1)$$

un sistema de ecuaciones homogéneo que admite solución distinta de la trivial solo sí el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. Si hacemos para simplificar

$$\lambda = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2},$$

tenemos que

$$-a_{j-1} + \lambda a_j - a_{j+1} = 0 \quad (4.2)$$

el sistema de N ecuaciones puede escribirse con extremos fijos $a_0 = a_{N+1} = 0$

$$\begin{aligned}
 \lambda a_1 - a_2 &= 0, \\
 -a_1 + \lambda a_2 - a_3 &= 0, \\
 &\vdots \\
 -a_{j-1} + \lambda a_j - a_{j+1} &= 0, \\
 &\vdots \\
 -a_{N-2} + \lambda a_{N-1} - a_N &= 0, \\
 -a_{N-1} + \lambda a_N &= 0.
 \end{aligned}$$

Este sistema lineal homogéneo tiene solución no trivial si el determinante de los coeficientes es nulo. Entonces los λ deben satisfacer

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = \det(D_N) = 0.$$

Determinante que puede ser evaluado. Si lo llamamos D_N , podemos obtener una relación de recurrencia desarrollando el determinante de acuerdo a la primera fila

$$\begin{aligned}
 D_N &= \lambda D_{N-1} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\
 &= \lambda D_{N-1} - D_{N-2},
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

siendo los dos primeros

$$D_1 = \lambda, \quad D_2 = \lambda^2 - 1.$$

La relación de recurrencia 4.3 puede resolverse suponiendo

$$D_N = A p^N,$$

y reemplazando en la relación de recurrencia. Esto conduce a

$$p^2 - \lambda p + 1 = 0,$$

de donde

$$p = \frac{\lambda}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4}} = e^{\pm i\phi},$$

con

$$\cos \phi = \frac{\lambda}{2} = 1 - \frac{\omega^2}{2\Omega^2}.$$

Entonces

$$D_N = A_1 e^{iN\phi} + A_2 e^{-iN\phi}.$$

Si consideramos los dos primeros valores $D_1 = \lambda$, y $D_2 = \lambda^2 - 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \cos \phi = A_1 e^{i\phi} + A_2 e^{-i\phi}, \\ \lambda^2 - 1 &= 4 \cos^2 \phi - 1 = A_1 e^{2i\phi} + A_2 e^{-2i\phi}. \end{aligned}$$

que puede resolverse para A_1 y A_2 obteniendo

$$A_2 = -\frac{e^{-i\phi}}{2i \sin \phi}, \quad A_1 = \frac{e^{i\phi}}{2i \sin \phi},$$

y finalmente

$$D_N = \frac{e^{i\phi}}{2i \sin \phi} e^{iN\phi} - \frac{e^{-i\phi}}{2i \sin \phi} e^{-iN\phi} = \frac{\sin(N+1)\phi}{\sin \phi}.$$

Entonces, $D_N = 0$ implica

$$\phi_n = \frac{n\pi}{N+1} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N.$$

Las llamadas frecuencias propias resulta entonces que satisfacen

$$\frac{2\Omega^2 - \omega_n^2}{\Omega^2} = \lambda_n = 2 \cos \frac{n\pi}{N+1},$$

entonces

$$\omega_n^2 = 2\Omega^2 \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N+1}\right) = 4\Omega^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2(N+1)},$$

y finalmente las frecuencias posibles son

$$\omega_n = 2\Omega \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \text{ con } n = 1, 2, \dots, N.$$

Las posiciones serán

$$q_j = \text{Re} \sum_n a_{jn} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde hemos usado un segundo índice en a_{jn} para indicar a cual frecuencia se refiere. En la sección siguiente se determinan.

4.1.2. Las posiciones

Para cada λ_n la relación 4.2 determina las razones de los coeficientes. Recuerde que

$$\lambda_n = 2 \cos \frac{n\pi}{N+1}, \text{ con } n = 1, 2, \dots, N.$$

Además se introduce un segundo índice en los coeficientes para indicar la frecuencia de que se trata. Las ecuaciones de recurrencia para los $a_{j,n}$ 4.2 son, olvidando la última con a_0 , $a_{N+1} = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_n a_{1,n} - a_{2,n} &= 0, \\ -a_{1,n} + \lambda_n a_{2,n} - a_{3,n} &= 0, \\ &\vdots \\ -a_{j-1,n} + \lambda_n a_{j,n} - a_{j+1,n} &= 0, \\ &\vdots \\ -a_{N-2,n} + \lambda_n a_{N-1,n} - a_{N,n} &= 0, \\ -a_{N-1,n} + \lambda_n a_{N,n} &= 0. \end{aligned}$$

En resumen

$$-a_{j-1,n} + \lambda_n a_{j,n} - a_{j+1,n} = 0.$$

Intentamos nuevamente solución exponencial

$$a_{j,n} = A p^j,$$

y al reemplazar

$$\begin{aligned} -p^{-1} + 2 \cos \frac{n\pi}{N+1} - p &= 0, \\ \frac{p + p^{-1}}{2} &= \cos \frac{n\pi}{N+1} = \frac{e^{i\frac{n\pi}{N+1}} + e^{-i\frac{n\pi}{N+1}}}{2}, \end{aligned}$$

de donde es obvio que

$$p = e^{\pm i \frac{n\pi}{N+1}},$$

luego

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= A_n e^{+ij\phi_n} + B_n e^{-ij\phi_n}, \\ a_{j,n} &= A_n e^{+ij \frac{n\pi}{N+1}} + B_n e^{-ij \frac{n\pi}{N+1}}. \end{aligned}$$

Las condiciones de extremos fijos imponen para cada frecuencia que se cumple

$$\begin{aligned} a_{0,n} &= A_n + B_n = 0, \\ a_{N+1,n} &= A_n e^{+in\pi} + B_n e^{-in\pi} = 0 \end{aligned}$$

que se satisfacen si $A_n = -B_n$ luego con alguna constante indeterminada C_n

$$a_{j,n} = C_n \sin j \frac{n\pi}{N+1},$$

entonces

$$q_j = \operatorname{Re} \sum_n a_{j,n} e^{i\omega_n t} = \operatorname{Re} \sum_n C_n \sin j \frac{n\pi}{N+1} e^{i\omega_n t},$$

si finalmente colocamos

$$C_n = a_n - ib_n,$$

la solución general será

$$\begin{aligned} q_j &= \operatorname{Re} \sum_n (a_n - ib_n) \sin j \frac{n\pi}{N+1} (\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t), \\ q_j &= \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin j \frac{n\pi}{N+1}, \quad \omega_n = 2\Omega \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \end{aligned}$$

debiéndose evaluar a_n, b_n según las condiciones iniciales.

4.1.3. Condiciones iniciales

Los coeficientes a_n y b_n pueden evaluarse imponiendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} q_j(0) &= \sum_{n=1}^N a_n \sin j \frac{n\pi}{N+1}, \\ \dot{q}_j(0) &= \sum_{n=1}^N b_n \omega_n \sin j \frac{n\pi}{N+1}, \end{aligned}$$

y haciendo uso de la transformada discreta de Fourier

$$q_j = \sum_{n=1}^N a_n \sin j \frac{n\pi}{N+1}, \quad a_n = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N q_j \sin j \frac{n\pi}{N+1}$$

de manera que pueden evaluarse los coeficientes a_n y b_n mediante

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N q_j(0) \sin j \frac{n\pi}{N+1}, \\ b_n &= \frac{2}{(N+1)\omega_n} \sum_{j=1}^N \dot{q}_j(0) \sin j \frac{n\pi}{N+1}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$y_j(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin j \frac{n\pi}{N+1}.$$

4.1.4. Coordenadas normales

En la expresión (sin tomar parte real)

$$q_j = \sum_n C_n \sin j \frac{n\pi}{N+1} e^{-i\omega_n t},$$

definimos las coordenadas normales a

$$\xi_n = C_n e^{-i\omega_n t},$$

de manera que

$$q_j = \sum_n \sin j \frac{n\pi}{N+1} \xi_n$$

que pueden invertirse

$$\xi_n = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N q_j \sin j \frac{n\pi}{N+1}.$$

Como ejemplo numérico, tomemos $N = 3$

$$\xi_1 = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N q_j \sin j \frac{\pi}{N+1} = \frac{1}{4} q_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} q_2 + \frac{1}{4} q_3 \sqrt{2} = 0,354 q_1 + 0,5 q_2 + 0,354 q_3$$

$$\xi_2 = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N q_j \sin j \frac{2\pi}{N+1} = \frac{1}{2} q_1 - \frac{1}{2} q_3 = 0,5 q_1 - 0,5 q_3$$

$$\xi_3 = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N q_j \sin j \frac{3\pi}{N+1} = \frac{1}{4} q_1 \sqrt{2} - \frac{1}{2} q_2 + \frac{1}{4} q_3 \sqrt{2} = 0,354 q_1 - 0,5 q_2 + 0,354 q_3$$

4.1.5. (b) Condiciones periódicas

Aquí tomaremos $q_0 = q_{N+1}$, $q_{-1} = q_N$ de modo que tendremos

$$\begin{aligned} -a_N + \lambda a_0 - a_1 &= 0 \\ -a_0 + \lambda a_1 - a_2 &= 0 \\ -a_1 + \lambda a_2 - a_3 &= 0 \\ &\vdots \\ -a_{j-1} + \lambda a_j - a_{j+1} &= 0 \\ -a_{N-1} + \lambda a_N - a_0 &= 0 \end{aligned}$$

es decir las frecuencias admisibles satisfacen

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ \vdots & & & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{bmatrix}_{N+1} = 0,$$

que es más difícil de resolver.

4.1.6. Solución alternativa de (b)

Una alternativa sin embargo es encontrar soluciones no triviales del sistema. Para ello suponga con ϕ por determinar

$$a_j = C e^{i(j\phi)}.$$

Si se reemplaza en el sistema de ecuaciones

$$-a_{j-1} + \lambda a_j - a_{j+1} = 0$$

se tiene que

$$-e^{i(j-1)\phi} + \lambda e^{i(j)\phi} - e^{i(j+1)\phi} = 0,$$

de donde se obtiene

$$-e^{-i\phi} + \lambda - e^{i\phi} = 0,$$

o sea

$$\lambda = 2 \cos \phi.$$

Entonces de

$$\frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} = \lambda,$$

resulta

$$\omega = 2\Omega \sin \left(\frac{\phi}{2} \right),$$

y

$$a_j = C e^{i(j\phi)}.$$

Debe además tenerse que

$$a_0 = a_{N+1}$$

o sea

$$e^{i(N+1)\phi} = 1,$$

por lo cual, las soluciones admisibles para ϕ son

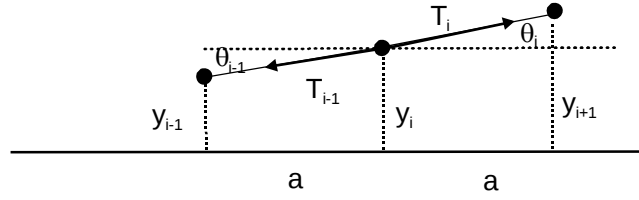
$$\phi = \frac{2\pi n}{N+1}, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

luego

$$\omega_n = 2\Omega \sin \left(\frac{\pi n}{N+1} \right), \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N.$$

4.2. Oscilaciones transversales

Consideremos ahora partículas de igual masa m unidas por resortes sin masa de la misma longitud natural y constante elástica k de modo que en la situación de equilibrio ellas están en línea recta, y los resortes sometidos a una tensión igual τ . Si las partículas se desplazan poco lateralmente, estarán sometidos a fuerzas de modo que la segunda ley de Newton conduce a



Oscilaciones transversales

$$m\ddot{y}_i = T_{i+1} \sin \theta_{i+1} - T_i \sin \theta_i,$$

$$m\ddot{x}_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} - T_i \cos \theta_i,$$

si no hay desplazamientos longitudinales en x y los transversales en y son pequeños, podemos aproximar, para ángulos pequeños

$$m\ddot{y}_i = T_{i+1} \sin \theta_{i+1} - T_i \sin \theta_i,$$

$$0 = T_{i+1} - T_i$$

de modo que

$$T_i = \tau,$$

$$m\ddot{y}_i \approx \tau(\tan \theta_{i+1} - \tan \theta_i),$$

$$\approx \tau\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a} - \frac{y_i - y_{i-1}}{a}\right),$$

de modo que tenemos como ecuación de movimiento aproximada

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i).$$

Las frecuencias propias

Si los extremos están fijos $y_0 = y_{N+1} = 0$. Además si suponemos para los modos normales de oscilación

$$y_j = a_j e^{-i\omega t},$$

tenemos que

$$(2 - \frac{ma\omega^2}{\tau})a_j - a_{j+1} - a_{j-1} = 0.$$

Si llamamos ahora

$$\lambda = 2 - \frac{ma\omega^2}{\tau},$$

tenemos un problema análogo, es decir un sistema de la forma

$$-a_{j-1} + \lambda a_j - a_{j+1} = 0,$$

que más explícitamente lee

$$\begin{aligned} \lambda a_1 - a_2 &= 0 \\ -a_1 + \lambda a_2 - a_3 &= 0 \\ &\vdots \\ -a_{j-1} + \lambda a_j - a_{j+1} &= 0 \\ -a_{N-1} + \lambda a_N &= 0 \end{aligned}$$

de modo que

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = \frac{\sin(N+1)\phi}{\sin \phi} = 0,$$

con $\cos \phi = \lambda/2$ y $\phi_n = \frac{n\pi}{N+1}$ se obtiene

$$\lambda_n = 2 \cos \phi_n = 2 \cos \frac{n\pi}{N+1} = 2 - \frac{ma\omega_n^2}{\tau},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{2\tau}{m} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N+1}\right), \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{4\tau}{m}} \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}. \end{aligned}$$

4.2.1. Las coordenadas

Para cada frecuencia las coordenadas se obtienen resolviendo

$$\begin{aligned} -a_{j-1,n} + \lambda_n a_{j,n} - a_{j+1,n} &= 0, \\ -a_{j-1,n} + 2 \cos \frac{n\pi}{N+1} a_{j,n} - a_{j+1,n} &= 0. \end{aligned}$$

Pruebe una solución

$$a_{j,n} = A_n p^j,$$

resultando entonces

$$\frac{p + p^{-1}}{2} = \cos \frac{n\pi}{N+1},$$

de donde es obvio que

$$p = e^{\pm i \frac{n\pi}{N+1}},$$

en consecuencia

$$a_{j,n} = A_n e^{+ij \frac{n\pi}{N+1}} + B_n e^{-ij \frac{n\pi}{N+1}}.$$

Tenemos además que

$$\begin{aligned} a_{0,n} &= A_n + B_n = 0, \\ a_{N+1,n} &= A_n e^{+in\pi} + B_n e^{-in\pi} = 0 \end{aligned}$$

que se satisfacen si $B_n = -A_n$ luego

$$a_{j,n} = C_n \sin j \frac{n\pi}{N+1},$$

entonces

$$y_j = \operatorname{Re} \sum_n a_{j,n} e^{-i\omega_n t} = \operatorname{Re} \sum_n C_n \sin j \frac{n\pi}{N+1} e^{-i\omega_n t},$$

si finalmente colocamos

$$C_n = a_n - ib_n,$$

la solución general será

$$\begin{aligned} y_j &= \operatorname{Re} \sum_n (a_n - ib_n) \sin j \frac{n\pi}{N+1} (\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t), \\ y_j &= \sum_{n=1}^N \sin j \frac{n\pi}{N+1} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \end{aligned}$$

debiéndose evaluar a_n, b_n según las condiciones iniciales.

4.2.2. Transformada discreta de Fourier

Puede probarse que

$$\frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin \frac{nk\pi}{N+1} \sin \frac{nk'\pi}{N+1} = \delta_{kk'}$$

luego en la expresión

$$y_k = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{nk\pi}{N+1},$$

pueden evaluarse los coeficientes mediante

$$a_n = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N y_k \sin \frac{nk\pi}{N+1}.$$

Esto permite evaluar los a_n , b_n de la sección anterior

$$\begin{aligned} y_k(0) &= \sum_{n=1}^N \sin \frac{nk\pi}{N+1} a_n, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ \dot{y}_k(0) &= \sum_{n=1}^N \sin j \frac{n\pi}{N+1} \omega_n b_n, \\ a_n &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N y_k(0) \sin \frac{nk\pi}{N+1}, \\ \omega_n b_n &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N \dot{y}_k(0) \sin \frac{nk\pi}{N+1}. \end{aligned}$$

4.2.3. Un ejemplo numérico

Supongamos $N = 4$, $\dot{y}_k(0) = 0$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 2$, $y_4(0) = 1$. Tendremos

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \\ a_n &= \frac{2}{5} \left(\sin \frac{n\pi}{5} + 2 \sin \frac{2n\pi}{5} + 2 \sin \frac{3n\pi}{5} + \sin \frac{4n\pi}{5} \right), \end{aligned}$$

entonces pueden calcularse

$$a_1 = 1.9919, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -0.17961, \quad a_4 = 0.$$

Además si hacemos $\sqrt{\frac{4\tau}{m}} = 1$

$$\omega_1 = \sin \frac{\pi}{10} = 0,309\,02,$$

$$\omega_3 = \sin \frac{3\pi}{10} = 0,809\,02.$$

Finalmente se calculan los desplazamientos en función del tiempo. Por la simetría de la condición inicial resultan $y_1 = y_4$, $y_2 = y_3$,

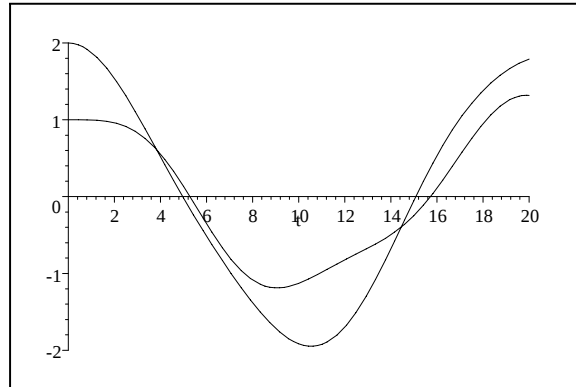
$$y_j = (\sin j \frac{\pi}{5})(1,991\,9 \cos 0,309\,02t) - (\sin j \frac{3\pi}{5})(0,179\,61 \cos 0,809\,02t),$$

$$y_1 = 1,170\,8 \cos 0,309\,02t - 0,170\,82 \cos 0,809\,02t,$$

$$y_2 = 1,894\,4 \cos 0,309\,02t + 0,105\,57 \cos 0,809\,02t,$$

$$y_3 = 1,894\,4 \cos 0,309\,02t + 0,105\,57 \cos 0,809\,02t,$$

$$y_4 = 1,170\,8 \cos 0,309\,02t - 0,170\,82 \cos 0,809\,02t,$$



4.3. Ejercicios

Sistemas continuos

5.1. Principio variacional de Hamilton

La acción de un sistema mecánico se define por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (5.1)$$

es decir una integral sobre un posible camino $q_i(t)$ que permita al sistema pasar entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 en forma compatible con los vínculos, y con las condiciones en t_1 y t_2 . La acción, como veremos, tiene un doble e importante rol:

- Primero, su variación a extremos fijos, supuesta nula conduce a las ecuaciones de movimiento, ya sea en su forma lagrangiana o forma hamiltoniana. Esto es los caminos físicos son caminos extremales.
- Segundo, su variación en los extremos, suponiendo satisfechas las ecuaciones de movimiento, conduce a las integrales de las ecuaciones de movimiento.

De lo primero trata el principio variacional de Hamilton. De lo segundo, que se verá con más detalle más adelante, trata el método de Hamilton Jacobi.

5.1.1. Principio variacional de Hamilton

La acción puede considerarse una funcional de los posibles caminos $q_i(t)$ compatible con los vínculos y las condiciones en t_1 y t_2 . El principio variacional de Hamilton establece que la acción es un extremo si y solo si el camino es la trayectoria física, solución de las ecuaciones de movimiento del sistema (conservativo).

Demostración:

En lo que sigue, llamaremos caminos físicos a los caminos extremales entre los puntos extremos fijos y caminos variados a otros caminos, próximos a los caminos extremales, entre los mismos puntos extremos. Se requieren elementos de cálculo variacional que no estudiaremos aquí, pero de los cuales haremos uso (ver [3]). Para que la acción sea un extremo se requiere que su variación δS sea cero, para variaciones $\delta q_i(t)$ infinitesimal, compatibles con los vínculos y nulas en los extremos y salvo por eso, arbitrarias entre ellos. Como se sabe, usando la “notación δ ”, se tiene que

$$\delta S = \int_{t_1}^t \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt,$$

como

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q, \quad y \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0,$$

la primera variación de la acción puede escribirse

$$\delta S = \int_{t_1}^t \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (5.2)$$

- Si se cumplen las ecuaciones de movimiento, ecuaciones de Lagrange en su forma original, es decir

$$\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0,$$

y si además se trata de un sistema conservativo, donde por definición $Q_i^{NC} = 0, \forall i$, entonces $\delta S = 0$, lo que significa que S es un extremo.

- Si la acción S es un extremo, o sea $\delta S = 0$, tenemos

$$\int_{t_1}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0,$$

o bien

$$\sum_i \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt \delta q_i = 0.$$

Si las variaciones δq_i son arbitrarias en el intervalo, serán cero los integrandos.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

que son las ecuaciones correctas de Lagrange para sistemas conservativos. .

5.1.2. Variación en los extremos

Si variamos las trayectorias haciendo $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i, \quad y \quad \delta q_i(t_1) \neq 0, \delta q_i(t) \neq 0, \delta t_1 \neq 0, \delta t \neq 0$$

la variación de la acción será

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^t L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \\ &= L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta t - L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta t_1 + \\ &\quad + \int_{t_1}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt \\ &= L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta t - L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta t_1 + \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)_t - \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)_{t_1} \\ &\quad + \int_{t_1}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned}$$

Si las coordenadas generalizadas satisfacen las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

entonces

$$\delta S = L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta t - L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta t_1 + \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)_t - \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)_{t_1}. \quad (5.3)$$

Si la acción se conociera como función de $q_i(t)$, $q_i(t_1)$, t y t_1 entonces

$$S = S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1),$$

la ecuación anterior implica

$$\frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t)} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_t = p_i(t), \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t_1)} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_{t_1} = -p_i(t_1), \quad (5.5)$$

$$\frac{dS(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{dt} = L(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (5.6)$$

$$\frac{dS(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{dt_1} = -L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1). \quad (5.7)$$

Por último considere que

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{dS(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right),$$

o bien

$$L - \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial S}{\partial t} = H(q_i(t), \frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t)}, t)$$

la famosa ecuación de Hamilton Jacobi para la acción S

$$\frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial t} = H(q_i(t), \frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t)}, t).$$

5.1.3. Ejemplos simples

Partícula libre 1

$$S = \int_{t_1}^t \frac{1}{2} m \frac{(q - q_1)^2}{(t - t_1)^2} dt = \frac{1}{2} m \frac{(q - q_1)^2}{(t - t_1)}.$$

La ecuación (5.5)

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t_1)} = -p(t_1)$$

se convierte en

$$-m \frac{(q - q_1)}{(t - t_1)} = -mv_1,$$

que efectivamente resuelve el problema pues resulta

$$q = q_1 + v_1(t - t_1).$$

Partícula libre 2 Si se trata de resolver la ecuación de Hamilton Jacobi

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t)} \right)^2,$$

intente

$$S = -\alpha(t - t_1) + W(q(t) - q(t_1)),$$

resulta

$$\frac{1}{2m} (W'(q(t) - q(t_1)))^2 = \alpha$$

o bien

$$W(q(t) - q(t_1)) = \sqrt{2m\alpha}(q(t) - q(t_1)),$$

y la acción

$$S = -\alpha(t - t_1) + \sqrt{2m\alpha}(q(t) - q(t_1))$$

pero

$$\alpha = E = \frac{1}{2} m \frac{(q - q_1)^2}{(t - t_1)^2}$$

luego se obtiene

$$\begin{aligned} S &= -\alpha(t-t_1)\frac{1}{2}m\frac{(q-q_1)^2}{(t-t_1)^2} + \sqrt{2m\frac{1}{2}m\frac{(q-q_1)^2}{(t-t_1)^2}}(q(t)-q(t_1)), \\ &= m\frac{(q-q_1)^2}{(t-t_1)} - \frac{1}{2}m\frac{(q-q_1)^2}{(t-t_1)} = \frac{1}{2}m\frac{(q-q_1)^2}{(t-t_1)} \end{aligned}$$

Fuerza constante

Una fuerza constante puede ser representada por un potencial

$$V = -Fq,$$

de manera que la acción será

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + Fq \right) dt, \\ p &= p_1 + F(t-t_1), \\ q &= q_1 + \frac{p_1}{m}(t-t_1) + \frac{F}{2m}(t-t_1)^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$S = \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{2} \frac{(p_1 + F(t-t_1))^2}{m} + F \left(q_1 + \frac{p_1}{m}(t-t_1) + \frac{F}{2m}(t-t_1)^2 \right) \right) dt$$

el integrando se simplifica a

$$\frac{1}{2m}p_1^2 + 2p_1\frac{F}{m}(t-t_1) + Fq_1 + \frac{F^2}{m}(t-t_1)^2,$$

luego

$$S = \frac{1}{2m}p_1^2(t-t_1) + p_1\frac{F}{m}(t-t_1)^2 + Fq_1(t-t_1) + \frac{F^2}{3m}(t-t_1)^3,$$

eliminamos p_1 sacándolo de 5.8

$$p_1 = m\frac{q-q_1}{t-t_1} - \frac{F}{2}(t-t_1),$$

obteniendo

$$S = \frac{1}{2m} \left(m \frac{q - q_1}{t - t_1} - \frac{F}{2} (t - t_1) \right)^2 (t - t_1) + \left(m \frac{q - q_1}{t - t_1} - \frac{F}{2} (t - t_1) \right) \frac{F}{m} (t - t_1)^2 + F q_1 (t - t_1) + \frac{F^2}{3m} (t - t_1)^3$$

que se reduce a

$$S = \frac{1}{2} m \frac{(q - q_1)^2}{t - t_1} + \frac{1}{2} F (t - t_1) (q + q_1) - \frac{F^2}{24m} (t - t_1)^3.$$

La ecuación (5.5)

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t_1)} = -p(t_1),$$

se reduce a

$$\begin{aligned} -m \frac{(q - q_1)}{(t - t_1)} + \frac{1}{2} F (t - t_1) &= -m \dot{q}_1, \\ q &= q_1 + \dot{q}_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} \frac{F}{m} (t - t_1)^2, \end{aligned}$$

que es la solución del problema.

Oscilador armónico

Obtendremos también la acción $S(q(t), q(t_1), t, t_1)$ para el caso del oscilador armónico. Este cálculo requiere conocer la solución de las ecuaciones de movimiento. Tenemos

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2),$$

y como es bien sabido

$$\begin{aligned} q(t) &= q(t_1) \cos \omega(t - t_1) + \frac{\dot{q}(t_1)}{\omega} \sin \omega(t - t_1) \\ \dot{q}(t) &= -\omega q(t_1) \sin \omega(t - t_1) + \dot{q}(t_1) \cos \omega(t - t_1) \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (\dot{q}(t_1)^2 - \omega^2 q^2(t_1)) \cos 2\omega(t - t_1) - m\omega q(t_1) \dot{q}(t_1) \sin 2\omega(t - t_1) \\ S &= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^t ((\dot{q}(t_1)^2 - \omega^2 q^2(t_1)) \cos 2\omega(t - t_1) - 2\omega q(t_1) \dot{q}(t_1) \sin 2\omega(t - t_1)) dt \\ &= \frac{1}{2} m \frac{(\dot{q}^2(t_1) - \omega^2 q^2(t_1))}{2\omega} \sin 2\omega(t - t_1) + \frac{1}{2} m q(t_1) \dot{q}(t_1) (\cos 2\omega(t - t_1) - 1) \end{aligned}$$

debemos eliminar

$$\dot{q}(t_1) = \omega \frac{q(t) - q(t_1) \cos \omega(t - t_1)}{\sin \omega(t - t_1)}$$

resultando

$$S = \frac{1}{2} m \omega (q^2 + q_1^2) \cot \omega(t - t_1) - \frac{m \omega q q_1}{\sin \omega(t - t_1)}.$$

Note que debe ser $\omega(t - t_1) \neq n\pi$.

La ecuación de Hamilton Jacobi para el Oscilador armónico

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t)} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2(t),$$

al hacer

$$S = -Et + W(q(t)),$$

se obtiene

$$E = \frac{1}{2m} (W'(q(t)))^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2(t)$$

o sea

$$W(q) = \int \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2} dq$$

$$S = -Et + \sqrt{2mE} \int \sqrt{1 - \frac{m \omega^2 q^2}{2E}} dq$$

Pero la solución sale de

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t_1)} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)_{t_1} = -p(t_1)$$

luego

5.1.4. La ecuación independiente del tiempo

En la ecuación de Hamilton Jacobi para un grado de libertad

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t)} \right)^2 + V(q(t)),$$

al hacer

$$S = -E(t - t_1) + W(q(t) - q(t_1)),$$

se obtiene

$$\frac{1}{2m} (W'(q(t) - q(t_1)))^2 + V(q(t)) = E = \frac{1}{2m} (p_1)^2 + V(q(t_1))$$

o sea

$$W(q(t) - q(t_1)) = \int \sqrt{2m(V(q(t_1) - V(q(t)) + (p_1)^2)} dq$$

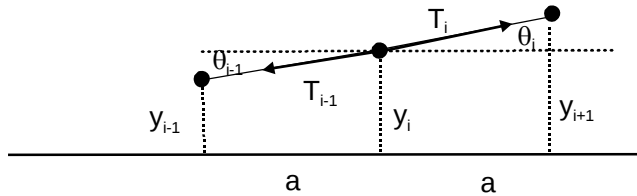
y entonces

$$S(q(t), q(t_1), t, t_1) = -\left(\frac{1}{2m} (p_1)^2 + V(q(t_1))\right)(t - t_1) + \sqrt{2m} \int \sqrt{\frac{(p_1)^2}{2m} + V(q(t_1) - V(q(t))} dq.$$

pero la solución sale de

5.2. Oscilaciones transversales

Revisaremos de nuevo al sistema de N partículas de igual masa m unidas por resortes sin masa de la misma longitud natural y constante elástica k de modo que en la situación de equilibrio ellas están en línea recta, y los resortes sometidos a una tensión igual τ . Si las partículas se desplazan poco lateralmente, estarán sometidos a fuerzas de modo que la segunda ley de Newton conduce a



$$\begin{aligned} m\ddot{y}_i &= T_i \sin \theta_i - T_{i-1} \sin \theta_{i-1}, \\ m\ddot{x}_i &= T_i \cos \theta_i - T_{i-1} \cos \theta_{i-1}, \end{aligned}$$

si no hay desplazamientos longitudinales en x y los transversales en y son pequeños, podemos aproximar, para ángulos pequeños

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_i &= T_i \sin \theta_i - T_{i-1} \sin \theta_{i-1}, \\ 0 &= T_i - T_{i-1} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} T_i &= \tau, \\ m\ddot{y}_i &\approx \tau(\tan \theta_i - \tan \theta_{i-1}), \\ &\approx \tau\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a} - \frac{y_i - y_{i-1}}{a}\right), \end{aligned}$$

de modo que tenemos como ecuación de movimiento aproximada

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i).$$

Es fácil ver que estas ecuaciones se derivan de un Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m \dot{y}_i^2 - \frac{1}{2} \tau a \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a} \right)^2,$$

que en una próxima sección se considerará de nuevo.

5.3. Límite continuo

Deseamos estudiar lo que sucede si hacemos $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, y las masas tender a cero de modo que

$$\frac{m}{a} \rightarrow \sigma,$$

siendo σ una constante llamada la densidad lineal de masa. La ecuación de movimiento

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i),$$

pasará a ser dependiente de una variable continua en la posición

$$y_i \rightarrow y(x, t),$$

siendo

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\rightarrow y(x + a, t) = y(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} a^2, \\ y_{i-1} &\rightarrow y(x - a, t) = y(x, t) - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} a^2, \end{aligned}$$

de modo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) &= \frac{\tau}{ma} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} a^2 \\ &= \frac{a\tau}{m} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

y finalmente, la llamada ecuación de onda para la cuerda elástica con masa uniforme:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\tau}{\sigma} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

5.3.1. Lagrangiano para la cuerda continua

Para el caso de las N partículas, antes de pasar al límite continuo, el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m \dot{y}_i^2 - \frac{1}{2} \tau a \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a} \right)^2,$$

pues el da correctamente las ecuaciones de movimiento. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} &= m \dot{y}_i, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &= +\frac{\tau}{a} (y_{i+1} - y_i) - \frac{\tau}{a} (y_i - y_{i-1}), \end{aligned}$$

luego

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma} (y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i).$$

Para pasar al límite continuo debemos hacer m , a infinitésimos pero con la razón $\sigma = \frac{m}{a} \rightarrow \frac{dm}{dx}$ la densidad lineal de masa

$$\begin{aligned} a &\rightarrow dx, \\ m &\rightarrow dm \\ y_i(t) &\rightarrow y(x, t), \\ \frac{dm}{dx} &\rightarrow \sigma, \\ \frac{y_{i+1} - y_i}{a} &\rightarrow \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \\ \dot{y}_i &\rightarrow \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

luego el lagrangiano será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m}{a} \dot{y}_i^2 a - \frac{1}{2} \tau \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a} \right)^2 a, \\ &= \frac{\sigma}{2} \int \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{\tau}{2} \int \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

5.3.2. Densidad Lagrangiana

Para el caso analizado anteriormente, definimos la densidad lagrangiana (por unidad de longitud) mediante

$$\Gamma = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2,$$

5.3.3. Principio de Hamilton para sistemas continuos

Admitiendo densidades Lagrangianas del tipo analizado en la sección anterior

$$\Gamma = \Gamma(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}),$$

la acción será

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \Gamma dx,$$

y el principio de Hamilton establece que la variación, a extremos fijos es nula, es decir

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int \Gamma dx,$$

y haciendo uso del formalismo de las variaciones δ , esto puede escribirse

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \delta \Gamma dx = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial x)} \delta(\partial y / \partial x) + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial t)} \delta(\partial y / \partial t) \right) dx, \end{aligned}$$

pero

$$\delta(\partial y / \partial x) = \frac{\partial}{\partial x} \delta y, \quad \delta(\partial y / \partial t) = \frac{\partial}{\partial t} \delta y.$$

Entonces

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial x)} \frac{\partial}{\partial x} \delta y + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \delta y \right) dx.$$

La segunda integral puede ser integrada parcialmente respecto a x , la tercera parcialmente respecto a t , la parte integrada se anula por la condición de extremos fijos

$$\delta y = 0 \text{ en } t = t_1 \text{ y } t = t_2,$$

resultando

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial x)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial t)} \right) \delta y dx = 0,$$

de donde, como δy es arbitrario en el intervalo

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial y / \partial t)} - \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = 0,$$

son las ecuaciones de Lagrange para un sistema continuo con densidad Lagrangiana $\Gamma(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t})$.

Otro tipo de Funcional

Considere

$$S = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Su variación con variaciones nulas en los extremos será

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \delta y' \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \frac{d}{dx} \delta y \right) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \\ &\quad \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \right) \delta y dx. \end{aligned}$$

Como $\delta y|_{x_1} = \delta y|_{x_2} = 0$, $\delta S = 0$ implica

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

► TEOREMA 5.1

Teorema de conservación: Si $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y(x), y'(x)) = 0$ entonces

$$H = y' \frac{\partial}{\partial y'} F - F \text{ es constante}$$

DEMOSTRACION 3

Considere

$$\begin{aligned} dH &= dy' \frac{\partial}{\partial y'} F + y' d \frac{\partial}{\partial y'} F - dF \\ &= dy' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' d \frac{\partial}{\partial y'} F - \frac{\partial F}{\partial y'} dy' - \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ &= y' d \frac{\partial}{\partial y'} F - \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ &= y' d \frac{\partial F}{\partial y'} - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dy, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{dH}{dx} = y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Problema de la Braquistócrona

Si una partícula baja deslizando sin roce sobre una curva $y = y(x)$, el eje y hacia abajo, la rapidez dependerá de la energía de acuerdo a

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

de manera que el tiempo de bajada desde x_1 hasta x_2 será

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}}$$

De acuerdo a lo anterior se conserva

$$y' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} = \text{constante}$$

o sea

$$\begin{aligned} \frac{(y')^2}{\sqrt{1+y'^2} \sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} &= \text{constante} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+y'^2} \sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} &= \text{constante} \end{aligned}$$

Si la partícula partió del reposo en el origen entonces $E = 0$ con $y(0) = 0$ entonces $y'(0) = \infty$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2} \sqrt{2gy}} = \text{constante} = -H$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2gH^2y}} - 1 &= \frac{dy}{dx} \\ x &= \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{2gH^2y}} - 1} \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} \frac{1}{2gH^2} \sin^2 \theta &= y. \\ dy &= \frac{1}{gH^2} \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

entonces

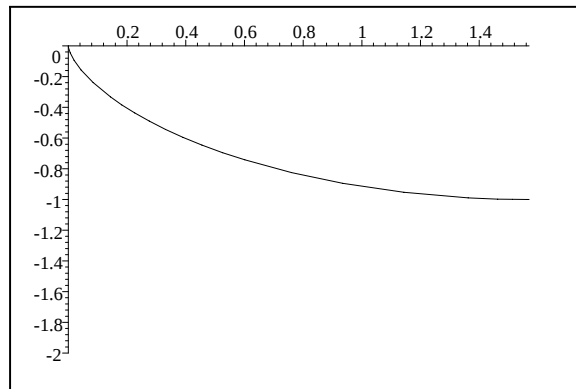
$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{gH^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1}} d\theta \\ &= \frac{1}{gH^2} \int \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

finalmente, la ecuación paramétrica de la curva es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2gH^2} \sin^2 \theta, \\ x &= \frac{1}{2gH^2} (\theta - \cos \theta \sin \theta). \end{aligned}$$

Mediante parametric Plot de mapple, ploteamos

$$\begin{aligned} &(\theta - \cos \theta \sin \theta) \\ &-\sin^2 \theta \end{aligned}$$



Para el caso de la cuerda

Reemplazando

$$\Gamma = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2,$$

es decir

$$-\frac{\partial}{\partial x} \tau \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \sigma \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right) = 0,$$

justo la ecuación de onda

$$\sigma \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

5.4. Soluciones de la ecuación de onda

La ecuación de onda puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ v &= \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

► TEOREMA 5.2

Las soluciones de la ecuación de onda (5.9) son

$$y(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt),$$

con F y G funciones arbitrarias de una variable.

DEMOSTRACION 4

Si cambiamos a variables $\zeta = x + vt$, $\psi = x - vt$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \psi} \\ &= v \frac{\partial}{\partial \zeta} - v \frac{\partial}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4v^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi}.$$

Entonces, en estas variables, la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \psi} = 0,$$

que es trivial integrar obteniendo

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = f(\zeta),$$

y

$$y = F(\zeta) + G(\psi) = F(x + vt) + G(x - vt).$$

Las soluciones anteriores corresponden a una forma invariable que se propaga hacia la derecha $G(x - vt)$ o hacia la izquierda $F(x + vt)$ con velocidad constante $v = \sqrt{\tau/\sigma}$. Sin embargo en una cuerda, debemos hacer consideraciones adicionales pues debemos satisfacer por ejemplo que $y(0, t) = y(L, t) = 0$ en el caso de extremos fijos.

5.4.1. Condiciones de frontera

Supongamos que queremos resolver la ecuación de onda sujeta a las condiciones anteriores de extremos fijos $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

Método de separación de variables

Suponga una solución de la forma

$$y(x, t) = X(x)G(t),$$

entonces si se sustituye se obtiene

$$X(x)G''(t) - v^2 X''(x)G(t) = 0$$

o bien

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)},$$

de modo que cualquiera de los lados no puede ser función ni de x ni de t , por lo tanto

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

de donde el signo se ha elegido de modo de tener soluciones oscilatorias

$$G(t) = Ce^{\pm i\omega t}$$

y

$$X(x) = De^{\pm ikx}$$

donde hemos llamado

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Para satisfacer la condición de frontera $X(0) = 0$ debemos tomar

$$X(x) = D \sin kx,$$

y para que $X(L) = 0$ debe ser

$$\sin kL = 0,$$

de modo que hay un número discreto de valores de k permitidos, o sea

$$k = \frac{n\pi}{L} \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

de ese modo, la solución general, que satisface las condiciones de frontera es

$$y(x, t) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^+ e^{i\frac{n\pi}{L}vt} + D_n^- e^{-i\frac{n\pi}{L}vt}) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.10)$$

5.4.2. Condiciones iniciales

La determinación completa de los coeficientes D_n requiere de conocer la forma inicial del hilo $F(x)$ y su perfil de velocidad inicial $V(x)$, es decir supondremos conocidos

$$\begin{aligned} F(x) &= y(x, 0), \\ V(x) &= \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Considerando esto y haciendo $t = 0$ en 5.10 y su derivada se obtiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^+ + D_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} i \frac{n\pi}{L} v (D_n^+ - D_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Pero las funciones $\sin n\pi x/L$ son ortogonales en el intervalo $(0, L)$ de modo que podemos despejar

$$\begin{aligned} D_n^+ + D_n^- &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ D_n^+ - D_n^- &= -\frac{2i}{n\pi v} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} D_n^+ &= \frac{1}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{i}{n\pi v} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} F_n - \frac{i}{n\pi v} V_n \\ D_n^- &= \frac{1}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{i}{n\pi v} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} F_n + \frac{i}{n\pi v} V_n, \end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned} F_n &= \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ V_n &= \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Así finalmente la solución es

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{L} F_n - \frac{i}{n\pi v} V_n \right) e^{i \frac{n\pi}{L} vt} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{L} F_n + \frac{i}{n\pi v} V_n \right) e^{-i \frac{n\pi}{L} vt} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

que se reduce a

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \cos \frac{n\pi}{L} vt + \frac{L}{n\pi v} V_n \sin \frac{n\pi}{L} vt \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.11)$$

Caso particular, la cuerda parte del reposo

Para este caso, lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ F_n &= \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.4.1 *Demuestre que el resultado anterior puede escribirse:*

$$y(x, t) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\sin \left(\frac{n\pi}{L} (x + vt) \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{L} (x - vt) \right) \right)$$

o sea, tal como lo establece el método de D'Alembert (vea más adelante).

5.5. Método de las series de Fourier

Todas las funciones que se anulan en $x = 0$, $x = L$ pueden expandirse en serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx'$$

de modo que la solución de la ecuación de onda para la cuerda con extremos fijos puede expandirse así

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

que al sustituir en la ecuación de onda da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin \frac{n\pi x}{L} + v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} = 0,$$

de donde por la independencia de las funciones base $\sin \frac{n\pi x}{L}$ permite obtener

$$b_n''(t) + \frac{v^2 n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t) = 0,$$

ecuación del movimiento armónico simple con soluciones

$$b_n(t) = A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t + B_n \sin \frac{vn\pi}{L} t$$

de modo que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t + B_n \sin \frac{vn\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Para tomar en cuenta las condiciones iniciales considere

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

de donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ B_n &= \frac{2}{vn\pi} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

o sea se ha obtenido el mismo resultado de (5.11).

5.6. Solución de D'Alembert

Para una forma inicial y perfil inicial de velocidades conocido

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

es posible extender dichas funciones de modo que la solución de la ecuación de onda es la forma propuesta por D'Alembert

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(F(x + vt) + F(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(u) du. \quad (5.12)$$

Esta obviamente satisface la ecuación de onda por tratarse de funciones de $x \pm vt$. Sin embargo, las definiciones de $F(x)$ y $V(x)$ que originalmente están hechas en $0 \leq x \leq L$, deben ser extendidas a $-\infty < x < \infty$ como se explica a continuación.

5.6.1. Condiciones iniciales.

La forma inicial de la cuerda y su perfil inicial de velocidad

$$y(x, 0) = F(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.13)$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = V(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.14)$$

son satisfechas por 5.12 puesto que

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(F(x) + F(x)) \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right| &= \frac{1}{2}(vF'(x + vt) - vF'(x - vt)) + \frac{1}{2}(V(x + vt) + V(x - vt)), \\ V(x) &= \frac{1}{2}(V(x) + V(x)) \end{aligned}$$

5.6.2. Condiciones de frontera

Como veremos la condición de extremos fijos

$$y(0, t) = 0, \quad (5.15)$$

$$y(L, t) = 0. \quad (5.16)$$

Impone ciertos requisitos a $F(x)$ y $V(x)$ que veremos.

La 5.15 impone que

$$0 = \frac{1}{2}(F(vt) + F(-vt)) + \frac{1}{2v} \int_{-vt}^{vt} V(u)du,$$

lo cual se satisface si se extiende el rango de definición de $F(x)$ y $V(x)$ de modo que ellas sean antisimétricas, es decir

$$\begin{aligned} F(-x) &= -F(x), \\ V(-x) &= -V(x). \end{aligned}$$

La ecuación 5.16 impone que

$$0 = \frac{1}{2}(F(L + vt) + F(L - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{L-vt}^{L+vt} V(u)du,$$

cuestión que exige extender el rango de definición de $F(x)$ y $V(x)$ de modo que ellas sean antisimétricas y de periodo $2L$, es decir

$$\begin{aligned} F(x + 2L) &= F(x), \\ V(x + 2L) &= V(x). \end{aligned}$$

5.6.3. Casos particulares

El método de D'Alembert es especialmente útil cuando $F(x)$ y $V(x)$ sean dadas como funciones antisimétricas de periodo $2L$.

EJEMPLO 5.6.1 *Como ejemplo supongamos que*

$$y(x, 0) = F(x) = A \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.17)$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = V(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.18)$$

Esta $F(x)$ es de antemano antisimétrica y de periodo $2L$. Luego la solución será

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left(A \sin \frac{n\pi(x + vt)}{L} + A \sin \frac{n\pi(x - vt)}{L} \right),$$

que se reduce a

$$y(x, t) = A \left(\cos \frac{n\pi}{L} vt \right) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

que muestra con claridad como oscila la cuerda con un periodo

$$T = \frac{2L}{nv}.$$

y una longitud de onda

$$\lambda = \frac{2L}{n}.$$

Note que

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

EJEMPLO 5.6.2 Otro ejemplo es

$$y(x, 0) = F(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.19)$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = V(x) = V_0 \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.20)$$

Esta $V(x)$ es de antemano antisimétrica y de periodo $2L$. Luego la solución será

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V_0 \sin \frac{n\pi u}{L} du, \\ &= \frac{V_0 L}{n\pi v} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi vt}{L}. \end{aligned}$$

5.6.4. Extensión de $F(x)$ o $V(x)$

Las funciones dadas deben ambas anularse en $x = 0$ y en $x = L$. Sus extensiones antisimétricas de periodo $2L$ son las series de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b'_n &= \frac{2}{L} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

La demostración de esto descansa en la propiedad de "ortogonalidad" para m, n enteros

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2} \delta_{mn}.$$

5.7. Ejemplos

5.7.1. Si la cuerda parte recta con un perfil de velocidades iniciales

$$V(x) = V_0 \sin \frac{\pi x}{L},$$

$V(x)$ es de antemano impar y de periodo $2L$, por lo tanto

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x) dx \\ &= \frac{V_0 L}{\pi v} \sin \frac{\pi}{L} vt \sin \pi \frac{x}{L} \\ &= \frac{V_0 L}{2\pi v} \left(\cos \pi \frac{x-vt}{L} - \cos \pi \frac{x+vt}{L} \right). \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.7.1 Si la forma inicial fuera una semi senoide

$$F(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

esta función es de antemano impar y de periodo $2L$. Entonces

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{A}{2} \left(\sin \frac{\pi(x+vt)}{L} + \sin \frac{\pi(x-vt)}{L} \right) \\ &= A \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi}{L} vt. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.7.2 En general, una extensión impar y de periodo $2L$ de $F(x)$ es

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin \frac{n\pi(x+vt)}{L} + \sin \frac{n\pi(x-vt)}{L} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi \frac{x}{L} \cos n\pi \frac{vt}{L}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.7.3 Si la cuerda parte recta con un perfil de velocidades iniciales

$$V(x) = V_0 \sin \frac{\pi x}{L},$$

determine la solución de la ecuación de onda.

Solución. $V(x)$ es de antemano impar y de periodo $2T$, por lo tanto

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x) dx \\ &= \frac{V_0 L}{\pi v} \sin \frac{\pi}{L} vt \sin \pi \frac{x}{L} \\ &= \frac{V_0 L}{2\pi v} \left(\cos \pi \frac{x-vt}{L} - \cos \pi \frac{x+vt}{L} \right). \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.7.4 Una cuerda de longitud L con extremos fijos comienza a oscilar partiendo del reposo de manera que su forma inicial es:

$$F(x) = \begin{cases} Ax/L & \text{si } x < L/2 \\ A(1 - x/L) & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

Determine $y(x, t)$.

Solución. La solución será

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

siendo

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

donde evaluamos

$$\frac{2}{L} \int_0^{L/2} (Ax/L) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L A(1 - \frac{x}{L}) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

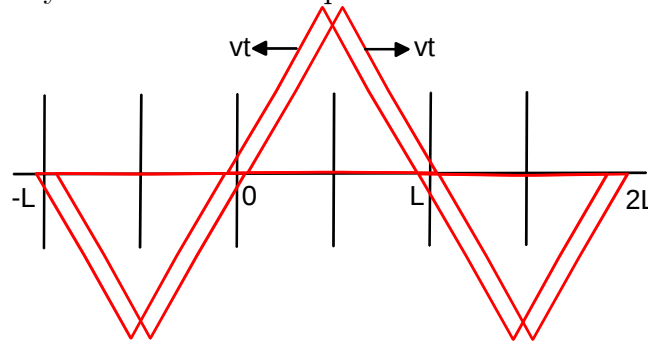
resultando

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 4A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2}n\pi}{n^2\pi^2} \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= 4A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \cos \frac{v(2k+1)\pi t}{L} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{L}. \end{aligned}$$

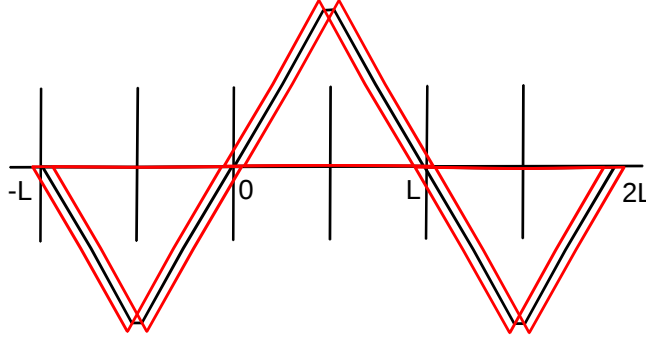
Esta solución sin embargo dice poco de la forma que tiene la onda. Analicemos la solución de D'Alembert

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(F(x + vt) + F(x - vt)).$$

En la figura siguiente se ilustra la extensión periódica de $F(x)$ corrida hacia la derecha en vt y corrida hacia la izquierda en vt



De modo que cuando ha transcurrido un tiempo t , $F(x + vt)$ y $F(x - vt)$ son corrimientos a la izquierda y a la derecha de $F(x)$. Ambas curvas las analizamos en el intervalo donde está la cuerda y las promediamos, obteniendo la forma ilustrada en la figura siguiente:



Es aparente que la forma de la onda será simétrica respecto al punto medio, y formada por segmentos rectos, a pesar de la aparentemente complicada serie de Fourier de la solución anterior.

5.8. Consideraciones energéticas

Consideremos el trozo de cuerda desde x en adelante, como se indica en la figura (5.1). Sobre ese trozo actúa la fuerza ejercida por la parte izquierda de la cuerda es decir

$$F = -\tau \sin \theta \approx -\tau \tan \theta = -\tau \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}.$$

Por otro lado la velocidad de ese extremo de la cuerda es

$$v_y = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t},$$

de modo que la potencia entregada al lado derecho de la cuerda (por el izquierdo) es

$$P = Fv_y = -\tau \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} y(x, t). \quad (5.21)$$

5.8.1. Cuerda con extremo libre

Supongamos que la cuerda tensa tiene su extremo derecho unido a una masa M que puede moverse sobre un alambre liso paralelo a la dirección y transversal a la cuerda. Entre $x = 0$ y $x = L$ la coordenada y satisface la ecuación de onda. ¿Qué condición poner en $x = L$?

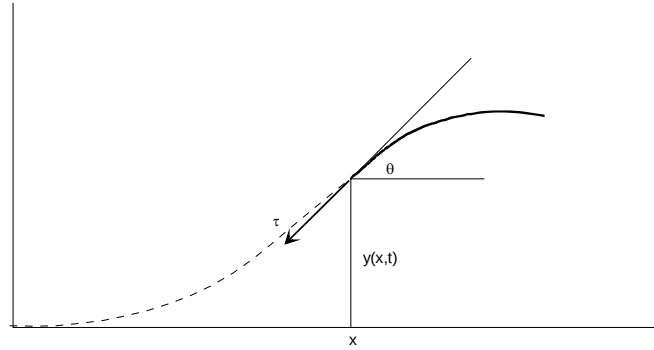


Figura 5.1: Potencia en una onda.

La tensión τ ejerce una fuerza

$$F_y = -\tau \sin \theta \simeq -\tau \tan \theta = -\tau \frac{\partial y}{\partial x}$$

sobre la masa M de manera que en $x = L$

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\tau \frac{\partial y}{\partial x},$$

pero

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

luego

$$Mv^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\tau \frac{\partial y}{\partial x} \text{ en } x = L$$

Si colocamos

$$y(x, t) = X(x)G(t),$$

entonces si se sustituye se obtiene

$$X(x)G''(t) - v^2 X''(x)G(t) = 0$$

o bien

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)},$$

de modo que cualquiera de los lados no puede ser función ni de x ni de t , por lo tanto

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

de donde el signo se ha elegido de modo de tener soluciones oscilatorias

$$G(t) = Ce^{\pm i\omega t}$$

y

$$X(x) = De^{\pm ikx}$$

donde hemos llamado

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Para que $X(x) = 0$ se requiere

$$X(x) = D \sin kx,$$

además

$$Mv^2 \frac{\partial^2 D \sin kx}{\partial x^2} = -\tau \frac{\partial D \sin kx}{\partial x} \text{ en } x = L$$

o sea

$$\frac{\cot kL}{kL} = \frac{M}{\sigma L},$$

determina un conjunto numerable de valores de kL . La solución será

$$y(x, t) = \sum_k (C_k^+ e^{ikvt} + C_k^- e^{-ikvt}) \sin kx.$$

5.8.2. Potencia en ondas armónicas

Para una onda armónica sinusoidal del tipo

$$y = A \sin(kx - \omega t),$$

resulta

$$P = \tau A^2 k \omega \cos^2(kx - \omega t).$$

Aquí se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda}, \\ v &= \frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}, \end{aligned}$$

de modo que la potencia puede escribirse

$$P = \sigma \omega^2 A^2 v \cos^2(kx - \omega t).$$

o sea en una onda que viaja hacia la derecha hay una potencia positiva entregada desde el lado izquierdo al derecho. La potencia promedio puede calcularse y resulta

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sigma \omega^2 A^2 v.$$

5.8.3. Membranas

Considere una membrana elástica tensionada y denotemos por

$$\sigma(x, y)$$

la densidad superficial de masa y mediante

$$u(x, y, t)$$

el desplazamiento vertical de la membrana a partir de su posición de equilibrio, como se indica en la figura. El área de equilibrio dA y el área deformada

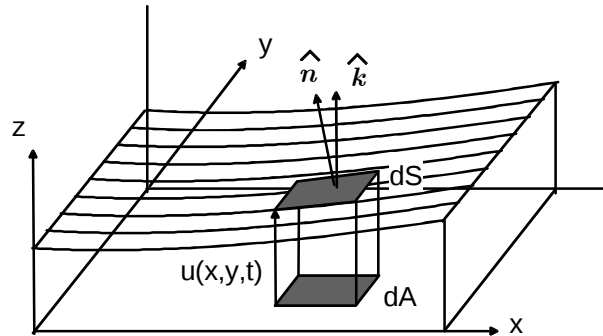


Figura 5.2:

dS están relacionadas mediante

$$\hat{k} \cdot \hat{n} dS = dA.$$

Si σ representa ahora la densidad superficial de masa, la energía cinética del elemento de masa dA de membrana será

$$\frac{1}{2}\sigma dA \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

Si $\tau(x, y)$ es la tensión superficial (fuerza por unidad de longitud N m^{-1}) o equivalentemente la densidad de energía de superficie (energía por unidad de área $\text{J m}^{-2} = \text{N m}^{-1}$) la energía potencial es igual al trabajo de cambiar el área desde dA hasta dS es decir

$$\tau(dS - dA) = \tau \left(\frac{1}{\hat{k} \cdot \hat{n}} - 1 \right) dA,$$

pero la normal está en la dirección del gradiente de la superficie. La ecuación de la superficie es

$$F(x, y, z, t) = z - u(x, y, t) = 0,$$

y entonces

$$\hat{n} = \frac{\nabla(z - u(x, y, t))}{|\nabla(z - u(x, y, t))|} = \frac{\hat{k} - \nabla u(x, y, t)}{|\hat{k} - \nabla u(x, y, t)|},$$

pero $\nabla u(x, y, t)$ está sobre el plano (x, y) de manera que

$$\hat{n} = \frac{\hat{k} - \nabla u(x, y, t)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}},$$

y su proyección será

$$\hat{k} \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tau(dS - dA) &= \tau \left(\frac{1}{\hat{k} \cdot \hat{n}} - 1 \right) dA = \tau (\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1) dA \\ &\simeq \tau \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dA, \end{aligned}$$

de modo que la densidad Lagrangiana será

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \tau \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \\ &= \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Si se supone que la membrana está fija en alguna curva cerrada C en el plano x, y , el principio variacional de Hamilton con acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_A \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dt,$$

tiene por variación

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial t)} \delta \partial u / \partial t + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial x)} \delta \partial u / \partial x + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial y)} \delta \partial u / \partial y \right) dx dy dt,$$

Pero $\delta u(x, y, t_1) = 0$, $\delta u(x, y, t_2) = 0$ y $\delta u(x, y, t) = 0$ sobre C . Entonces podemos escribir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \delta u + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial x)} \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial y)} \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) dx dy dt$$

La primera integral, integrada parcialmente respecto al tiempo dará

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_A \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial t)} \right) dx dy dt \delta u.$$

La segunda y la tercera respecto a xy pueden transformarse

$$\begin{aligned}& \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial x)} \delta u \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial y)} \delta u \right\} \right) dx dy - \\ & \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial x)} \right\} \delta u \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u / \partial y)} \right\} \delta u \right) dx dy\end{aligned}$$

y haciendo uso del teorema de Green

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

las dos primeras se reducen a una integral sobre C

$$\oint_C \left(-\frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial y)} \delta u dx + \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial x)} \delta u dy \right) = 0$$

por ser $\delta u = 0$ sobre C . Así resultará

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial t)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial x)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial y)} \right) dx dy dt \delta u,$$

dando como ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial x)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial(\partial u/\partial y)}, \\ \Gamma &= \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

o sea

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0,$$

la ecuación de onda en dos dimensiones. La velocidad de propagación será c donde

$$c^2 = \frac{\tau}{\sigma}.$$

5.8.4. Solución para geometrías específicas

Primero, buscaremos los modos normales de vibración, es decir modos donde todos los elementos de la membrana, excepto los que estén fijos, oscilan con la misma frecuencia ω . Tendremos entonces

$$u(x, y, t) = \rho(x, y) \cos(\omega t).$$

Al sustituir en la ecuación de onda resulta

$$\begin{aligned} \rho(x, y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos(\omega t) &= c^2 \cos(\omega t) \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right), \\ &= -\omega^2 \rho(x, y) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

o sea

$$\left(\frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial y^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \rho(x, y) = 0,$$

la llamada ecuación de Helmholtz bidimensional.

Membrana rectangular

Llamando $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ debemos resolver

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + k^2 \rho = 0.$$

Usando la técnica de separación de variables

$$\rho = X(x)Y(y),$$

resulta

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 = 0,$$

por lo cual deben ser constantes

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Las soluciones que satisfacen bordes fijos en un rectángulo $X(0) = X(a) = 0$, $Y(0) = Y(b) = 0$ son

$$\begin{aligned} X(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin k_x x = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \infty \\ Y(y) &= \sqrt{\frac{2}{b}} \sin k_y y = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty. \end{aligned}$$

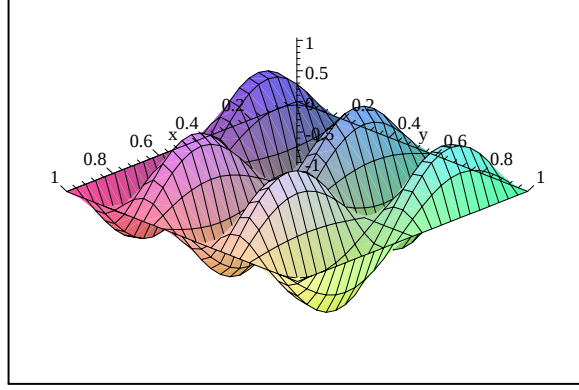
donde las frecuencias de los modos normales (m, n) son

$$k^2 = \frac{\omega_{n,m}^2}{c^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

La frecuencia más baja, la fundamental es

$$\omega_{1,1} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

$$\sin 2\pi x \sin 5\pi y$$



Membrana circular

Buscaremos nuevamente los modos normales de vibración, es decir modos donde todos los elementos de la membrana, excepto los que estén fijos, oscilan con la misma frecuencia ω . Tendremos entonces usando coordenadas polares

$$u(r, \phi, t) = \rho(r, \phi) \cos(\omega t).$$

Al sustituir en la ecuación de onda resulta

$$\begin{aligned} \rho(r, \phi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos(\omega t) &= c^2 \cos(\omega t) \nabla^2 \rho, \\ &= -\omega^2 \rho(x, y) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

Ahora tenemos que resolver la ecuación de Helmholtz con $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

$$\nabla^2 \rho + k^2 \rho = 0,$$

donde supondremos como condición de borde $\rho = 0$, en $r = a$. En coordenadas polares r, ϕ la ecuación de Helmholtz será

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \rho + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} + k^2 \rho = 0,$$

donde nuevamente, usando la técnica de separación de variables

$$\rho = R(r)\Phi(\phi),$$

conduce a

$$r \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R + k^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0,$$

luego

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi,$$

por lo tanto

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \pm \infty,$$

y la parte radial satisface

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - m^2) R &= 0, \\ r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - m^2) R &= 0, \end{aligned}$$

la cual puede ser reconocida como la ecuación de Bessel. Como es bien sabido, las soluciones regulares en el origen son

$$R = J_m(kr),$$

y la condición de contorno fijo en $r = a$ conduce a que

$$J_m(ka) = J_m\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0.$$

Denotemos por $\alpha_{m,n}$ el n -ésimo cero de J_m luego las frecuencias propias serán

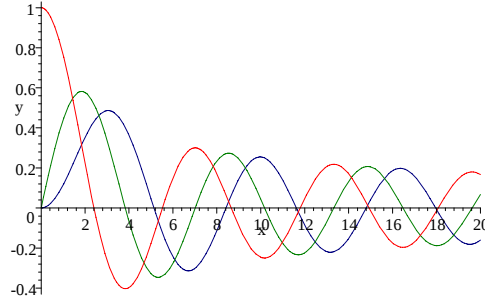
$$\frac{\omega_{m,n} a}{c} = \alpha_{m,n}.$$

Las funciones de Bessel

Las de Bessel, $J_v(z) = \text{Bessel}J_v(z)$ y $Y_v(z) = \text{Bessel}Y_v(z)$ son soluciones de primera y segunda clase de la ecuación de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - v^2) w = 0.$$

Las de primera clase son regulares en el origen y el gráfico siguiente muestra las tres primeras.



J_0 (rojo), J_1 (verde), J_2 (azul)

5.9. Elementos de mecánica de Fluidos

Para estudiar la dinámica de los fluidos, se han seguido dos caminos. Uno debido a Lagrange utiliza las coordenadas de cada partícula de fluido a medida que transcurre el tiempo de acuerdo a las fuerzas que ella experimenta. Otra forma debida a Euler consiste en abandonar el intento de precisar las coordenadas de cada partícula de fluido, y en vez, preocuparse de la densidad y la velocidad del fluido en puntos fijos del espacio en cada instante de tiempo. De este punto de vista, Euleriano, la atención se pone en un elemento de fluido que pasa a través de un volumen de control el cual está fijo en el espacio. Este es el método que usaremos principalmente aquí. Se definen $\rho(x, y, z, t)$ la densidad del fluido en un punto del espacio en tiempo t y $\vec{v}(x, y, z, t)$ el vector velocidad de un elemento de fluido ubicado en ese mismo punto y en ese mismo tiempo. Esta velocidad corresponde a la de las partículas que están pasando por el punto fijo x, y, z en el instante t . Las partículas del fluido en el volumen de control cambian continuamente. A pesar de que nos concentraremos en puntos fijos del espacio, las ecuaciones usuales de la mecánica aplican a partículas y por lo tanto será inevitable seguir el movimiento de las partículas al menos por intervalos de tiempos cortos. Así estaremos interesados en dos tipos de derivadas. Por ejemplo si $p(x, y, z, t)$ representa la presión en un punto x, y, z , en un tiempo t determinado, la derivada Euleriana

$$\frac{\partial p}{\partial t}$$

representará la tasa a la cual está cambiando la presión en un punto fijo y la derivada Lagrangiana

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p,\end{aligned}$$

representará la tasa a la cual está cambiando la presión en un punto que sigue el movimiento de una partícula del fluido. Esto aplicará a cualquier función de las coordenadas y del tiempo, lo cual anotaremos simbólicamente como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla.$$

5.9.1. Cambio del volumen

Consideremos un elemento de volumen δV que se mueve con el fluido de modo que contiene siempre el mismo número de partículas de fluido. Si el fluido se mueve, ese elemento se mueve y en general cambiará de volumen. Supongamos que se trata de un elemento de volumen rectangular de lados δx , δy , δz . Entonces sus caras tienen velocidades v_x , v_y , v_z . Así el cambio de volumen debido al desplazamiento de las caras δy δz (una en x la otra en $x + \delta x$) será

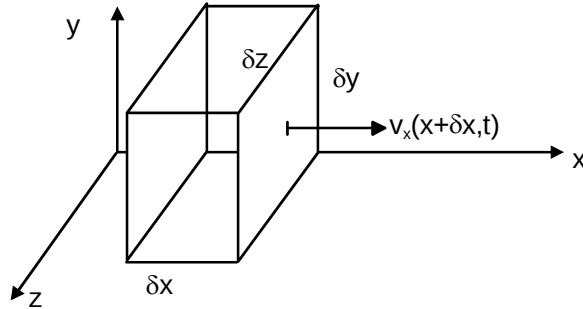


Figura 5.3:

$$\begin{aligned}d\delta V &= \delta y \delta z (v_x(x + \delta x, t) dt - v_x(x, t) dt) \\ &= \delta y \delta z \delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} dt,\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}\frac{d\delta V}{dt} &= \delta y \delta z \delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ &= \delta V \frac{\partial v_x}{\partial x}.\end{aligned}$$

Más en general, si varían las posiciones de las seis caras, se tiene

$$\frac{d\delta V}{dt} = \delta V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),$$

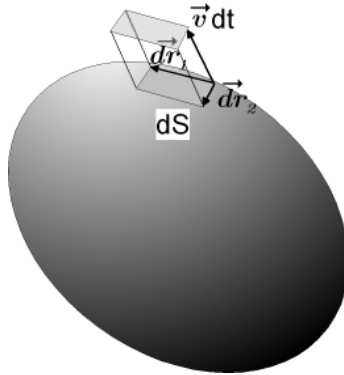
o sea

$$\frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot \vec{v} \delta V. \quad (5.22)$$

Algunas propiedades del operador ∇ se explican en el apéndice. Más en general, como se explica en la figura que sigue, el cambio de volumen que se produce por el cambio del área se puede expresar como (producto mixto)

$$(d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2) \cdot \vec{v} dt = \hat{n} \cdot \vec{v} dt dS,$$

(base $\times$ altura)



luego la superficie cerrada completa cambia un volumen

$$\begin{aligned}dV &= \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dt dS \\ \frac{dV}{dt} &= \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS.\end{aligned}$$

Si se utiliza el teorema de la divergencia la última expresión puede escribirse como

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV.$$

Si la región es infinitesimal de volumen δV , entonces la anterior se reduce a

$$\frac{d}{dt} \delta V = \nabla \cdot \vec{v} \delta V,$$

tal como se había establecido anteriormente en 5.22.

Fluidos incompresibles

Si el fluido es incompresible, es decir si el volumen de un número determinado de partículas no cambia con el tiempo, entonces del resultado anterior sigue que

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Ecuación de continuidad

La masa de un elemento de volumen que sigue el movimiento del fluido no varía. Eso se puede escribir utilizando el concepto de densidad volumétrica de masa ρ como

$$\delta m = \rho \delta V = \text{constante},$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho \delta V) &= \frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \frac{d}{dt} \delta V = 0 \\ \frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \nabla \cdot \vec{v} \delta V &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

pero

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho,$$

luego

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (5.23)$$

Esta última relación se denomina la ecuación de continuidad de un fluido. La expresión

$$\vec{J} = \rho \vec{v}, \quad \text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

se denomina caudal másico, masa que cruza un elemento de área perpendicular a $\vec{v}$ por unidad de área y de tiempo.

5.9.2. Líneas de flujo

Para visualizar el movimiento de un fluido se utilizan tres tipos de líneas, llamadas líneas de velocidad, caminos y de trazadores.

1. Líneas de velocidad. Son las líneas del campo de velocidad $\vec{v}(x, y, z, t)$, es decir líneas que son tangentes y paralelas al vector velocidad en cada punto de coordenadas fijas x, y, z en un instante t . La ecuación de las líneas de velocidad se obtiene de

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}.$$

Integrando estas ecuaciones para t fijo permitiría encontrar las líneas de velocidad. Puede ser útil expresar las coordenadas en forma paramétrica $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Por ejemplo sean

$$\begin{aligned} v_x &= x(1 + 2t), \\ v_y &= y, \\ v_z &= 0, \end{aligned}$$

luego se debe resolver

$$\frac{dx}{x(1 + 2t)} = \frac{dy}{y},$$

integrando

$$\frac{1}{(1 + 2t)} \ln x = \ln y,$$

luego

$$x = y^{(1+2t)}.$$

2. Caminos. Es la curva trazada por una partícula del fluido a medida que ella se mueve. Ella satisface

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= v_y(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= v_z(x, y, z, t),\end{aligned}$$

ecuaciones que al ser integradas permitirían encontrar $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Consideremos el mismo ejemplo anterior

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x = x(1 + 2t), \\ \frac{dy}{dt} &= v_y = y,\end{aligned}$$

que son fácilmente integrables

$$\begin{aligned}\ln \frac{x}{x_0} &= t + t^2, \\ \ln \frac{y}{y_0} &= t,\end{aligned}$$

de manera que la trayectoria o camino es

$$\begin{aligned}x &= x_0 e^{t(1+t)}, \\ y &= y_0 e^t.\end{aligned}$$

3. Líneas de trazadores. Son las líneas que siguen trazadores continuamente inyectados al fluido. Ellos pueden ser humo, tinta, y otros. No discutiremos este tema aquí.

5.10. Ecuación de movimiento de un fluido ideal

En un fluido ideal, por definición, no actúan otras fuerzas de un elemento sobre otro de fluido, más que las fuerzas de presión, que actúan normalmente a las superficies de los elementos considerados. En los fluidos reales, actúan

además fuerzas tangenciales o de viscosidad que por ahora despreciaremos. Aceptaremos además que pueden actuar fuerzas externas sobre cada elemento de volumen, tal como el peso de aquel. La presión es isotrópica de modo que la fuerza que actúa sobre cada elemento de área se obtiene simplemente multiplicando la presión sobre el área por el área en cuestión. Así, si se trata de un elemento de volumen como un paralelepípedo rectangular de aristas δx , δy , δz , la fuerza resultante en la dirección x debida a la presión será

$$\begin{aligned}\delta F_x &= p(x, y, z)\delta y\delta z - p(x + \delta x, y, z)\delta y\delta z \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z,\end{aligned}$$

y en su forma vectorial para las tres componentes

$$\delta \vec{F} = -\nabla p \delta V.$$

Sea además $\vec{f}$ la fuerza externa que actúa por unidad de volumen. Supondremos que la fuerza externa es el peso, luego

$$\vec{f} = -\rho g \hat{k}$$

Así la fuerza resultante sobre el elemento de volumen de masa δm será

$$\delta \vec{F} = -\nabla p \delta V + \vec{f} \delta V.$$

La segunda ley de Newton establece que esta fuerza es la masa por la aceleración del elemento de volumen, o sea

$$\rho \delta V \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \delta V - \rho g \hat{k} \delta V,$$

o bien

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho g \hat{k} - \nabla p,$$

ahora, si realizamos la derivada total obtenemos

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\rho g \hat{k} - \nabla p, \quad (5.24)$$

y así obtenemos la ecuación de Euler para el movimiento de un fluido ideal:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -g \hat{k} - \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (5.25)$$

Teorema de Bernouilli

Cuando la fuerza que actúa sobre el cuerpo del elemento de volumen es conservativa, por ejemplo el peso

$$\vec{f} = -\rho g \hat{k} = -\nabla \rho g z,$$

la ecuación de Euler puede ser integrada en dos situaciones. Tenemos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -g \nabla z - \frac{\nabla p}{\rho},$$

además de la identidad

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v},$$

de manera que

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + g z + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}),$$

que puede ser integrada en dos casos.

- a) Flujo estacionario. Aquí, en cada punto fijo del espacio $\vec{v}$ no cambia luego $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ y

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + g z + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Si se integra esto a lo largo de una trayectoria paralela a $\vec{v}$ en todos sus puntos, es decir sobre una línea de corriente, desde un punto (1) a un punto (2) entonces

$$\int_1^2 \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + g z + \frac{p}{\rho} \right) \cdot d\vec{r} = 0,$$

o

$$\int_1^2 d \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + g z + \frac{p}{\rho} \right) = 0,$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho}.$$

b) Flujo irrotacional, estacionario o no estacionario. Ahora, por definición

$$\nabla \times \vec{v} = 0,$$

entonces existe un potencial de velocidad Φ tal que

$$\vec{v} = -\nabla\Phi,$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}),$$

se reduce a

$$-\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = 0,$$

entonces

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz + \frac{p}{\rho} = F(t), \quad (5.26)$$

en todo punto del fluido.

5.10.1. Onda sonoras en un fluido

Supongamos un fluido en equilibrio a una presión p_0 una densidad ρ_0 y sometido a una fuerza externa volumétrica $\vec{f}_0$. Para esta situación, la ecuación (5.25) se convierte en

$$\vec{f}_0 = \nabla p_0. \quad (5.27)$$

Supongamos ahora que el fluido se somete a una perturbación pequeña de modo que la presión y la densidad se alteran a

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \end{aligned}$$

siendo $p' \ll p$ y $\rho' \ll \rho$ y supondremos además que la velocidad u sus derivadas son también pequeñas. Si sustituimos en (5.25) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \frac{\vec{f}_0}{\rho_0 + \rho'} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0 + \rho'} \\ &\approx \frac{\vec{f}_0}{\rho_0} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} \end{aligned}$$

si despreciamos términos cuadráticos en $\vec{v}$ y en las cantidades pequeñas p' y ρ' se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{\vec{f}_0}{\rho_0 + \rho'} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0 + \rho'} \\ &\approx \frac{\vec{f}_0}{\rho_0} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}.\end{aligned}$$

o sea

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}. \quad (5.28)$$

Además si se sustituye en la ecuación de continuidad (5.23) se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho')\vec{v}) \\ &\approx \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}),\end{aligned}$$

o sea

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla \rho_0. \quad (5.29)$$

Finalmente supondremos que la densidad en equilibrio es prácticamente constante de modo que la última ecuación puede escribirse

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (5.30)$$

La compresibilidad κ y su recíproco B

En termodinámica se definen la compresibilidad isotérmica

$$\kappa_T = \frac{1}{B_T} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

y la compresibilidad adiabática

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{B_S},$$

donde T y S denotan la temperatura absoluta y la entropía del sistema. Cuando una onda acústica pasa a través de una sustancia los cambios de

volumen son en realidad adiabáticos en vez de isotérmicos, de modo que la segunda de las anteriores es la que aplica. Ella puede ser escrita como

$$\frac{1}{B_S} = \kappa_S = -\frac{1}{m/\rho} \left(\frac{\partial m/\rho}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S.$$

De este modo el incremento en la presión y la densidad están relacionadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_S} &= \kappa_S = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho'}{p'} \\ \rho' &= \frac{\rho_0 p'}{B_S}. \end{aligned}$$

Así podemos eliminar ρ' de la ecuación de continuidad (5.30) obteniendo

$$\frac{\rho_0}{B_S} \frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -B_S \nabla \cdot \vec{v}. \quad (5.32)$$

Si derivamos respecto al tiempo y utilizamos (5.28) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= -B_S \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= \frac{B_S}{\rho_0} \nabla \cdot \nabla p', \end{aligned}$$

es decir tenemos que las variaciones de la presión p' satisfacen la ecuación de ondas en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 p' = 0, \quad (5.33)$$

donde la velocidad de propagación está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_S}{\rho_0}}.$$

5.10.2. Ondas de canal

Consideraremos un fluido incompresible sometido a un campo gravitacional uniforme. Trataremos primero de ondas de canal (ondas tidales), donde la longitud de onda es grande respecto a la profundidad del canal. En este límite, el movimiento principal de las partes del fluido es horizontal, de modo que el fluido se mueve hacia adelante y hacia atrás. Cuando se acumula en un punto, el nivel sube y aumenta la presión hidrostática. El fluido entonces fluye horizontalmente respondiendo al exceso de fuerza vertical. El tratamiento que haremos desprecia términos cuadráticos en la velocidad, desprecia la aceleración vertical y se supone un fluido sin viscosidad e incompresible.

Ecuaciones de movimiento

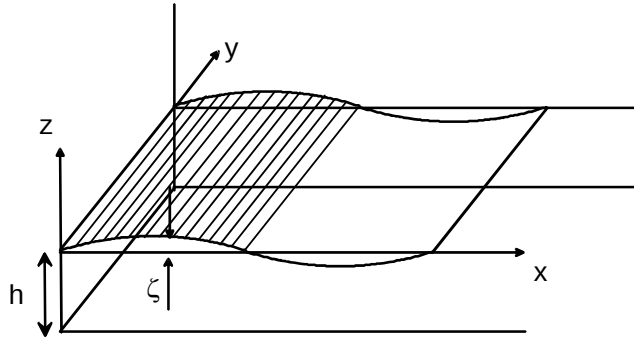


Figura 5.4:

Considere un elemento de masa dm contenido en un volumen dV . La ecuación de Euler es

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p,$$

siendo la fuerza peso por unidad de volumen

$$\vec{f} = -\rho g \hat{k},$$

luego

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g \hat{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Pero estamos suponiendo que el movimiento vertical tiene velocidad y aceleración despreciables y entonces la presión tiene el comportamiento estático habitual

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p \simeq 0$$

que nos indica la variación de la presión con la altura o profundidad en el fluido. A nivel $z = \zeta(x, y, t)$ la presión es la atmosférica p_0 resultando por integración

$$p(x, y, z, t) = p_0 - \rho g(z - \zeta(x, y, t)).$$

Recordando que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v},$$

Si se desprecian los términos cuadráticos en la velocidad se tiene

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

En las direcciones horizontales tenemos que las aceleraciones son causadas por los gradientes horizontales de presión solamente, es decir

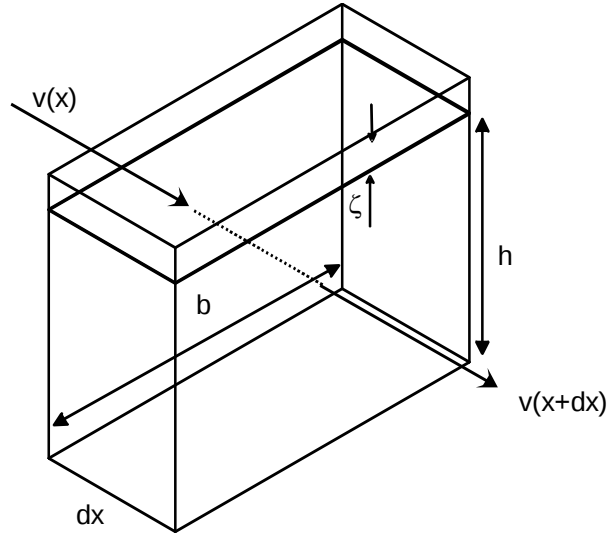
$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = -g \frac{\partial}{\partial x} \zeta(x, y, t), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p = -g \frac{\partial}{\partial y} \zeta(x, y, t). \end{aligned}$$

Note que las aceleraciones horizontales son independientes de z .

Ondas unidimensionales

Simplificaremos aún más lo anterior suponiendo que el flujo de líquido ocurre sólo en la dirección x . Consideraremos una onda unidimensional, viajando en un canal en la dirección x , de ancho b y de profundidad h ,

$$\zeta = \zeta(x, t)$$



El fluido tiene movimiento en el eje x solamente y como consecuencia de la ecuación de continuidad, lo que se acumula provoca un cambio en la altura. En efecto considere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0.$$

Si esta ecuación se integra con ρ constante en el volumen fijo mostrado en la figura anterior y llamamos m la masa contenida en el, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} + \int \nabla \cdot \rho \vec{v} dV &= 0, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \int \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS &= 0, \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial b dx (h + \zeta)}{\partial t} + \rho (v_x(x + dx, t) - v_x(x, t)) (h + \zeta) b = 0$$

reduciendo

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial v_x(x, t)}{\partial x} (h + \zeta)$$

o bien en la superficie libre aproximamos $\zeta \simeq 0$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \simeq -\frac{\partial v_x(x, t)}{\partial x} h.$$

De la ecuación de movimiento se deduce que la aceleración en el eje x es

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = -g \frac{\partial}{\partial x} \zeta(x, y, t)$$

o sea

$$\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial x} \zeta(x, t),$$

y

$$\frac{\partial v_x(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v(x)}{\partial x} h &= -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial t} &= -g \frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta, \end{aligned}$$

Restando se obtiene

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta$$

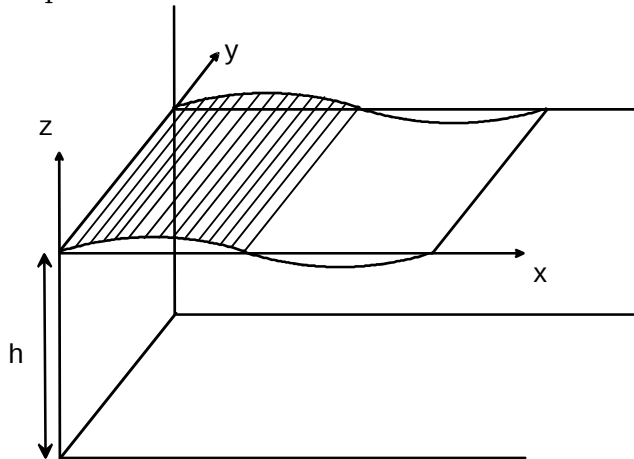
Que es la ecuación de onda unidimensional con una velocidad de propagación

$$c = \sqrt{gh}.$$

El significado físico es que a mayor profundidad, mayor velocidad de propagación de la onda.

5.10.3. Ondas de superficie en líquidos

Para profundidades mayores, un análisis más fino es necesario. Consideraremos ondas superficiales en dos dimensiones en un fluido tridimensional.



Respecto a la figura, el plano xy es el nivel de equilibrio del líquido en un canal de profundidad h . El líquido será considerado como incompresible con densidad volumétrica ρ constante de modo que la ecuación de continuidad (5.23) se reduce a

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Supondremos también que el movimiento del fluido es irrotacional, es decir que

$$\nabla \times \vec{v} = 0.$$

Potencial de velocidades. Ecuación de Laplace.

Cuando el movimiento del fluido es irrotacional, existe un campo de velocidad del fluido que es derivable de un potencial de velocidades $\Phi(\vec{r}, t)$ tal que

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -\nabla\Phi(\vec{r}, t).$$

En términos de este potencial, la condición de incompresibilidad será

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = \nabla^2 \Phi(x, y, x, t) = 0, \quad (5.34)$$

es decir el potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace en el interior del fluido en todo instante. En situaciones estacionarias, $\Phi = \Phi(\vec{r})$, y las líneas del campo de velocidad son fijas. Estas líneas del campo de velocidad, denominadas líneas de corriente, son tangentes al campo de velocidades del fluido en un cierto instante. No hay que confundirlas con las trayectorias seguidas por una partícula determinada a medida que transcurre el tiempo. En situaciones dinámicas como la que estudiamos, la propagación de ondas en un fluido $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$, las líneas de corriente irán cambiando como un todo a medida que el tiempo progrese. El resto del análisis intenta establecer las condiciones de contorno que debe cumplir el potencial de velocidad Φ para resolver la ecuación de Laplace. Obviamente en el fondo del canal la velocidad normal debe anularse. Similarmente ocurre en las paredes laterales.

Condición cinemática

La superficie del fluido está especificada por una ecuación

$$z - \zeta(x, y, t) = 0,$$

de modo que si tomamos la derivada total tendremos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \zeta,$$

que colocada en términos del potencial de velocidad es

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

o sea

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial z} &= -\frac{\partial \zeta(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x} \frac{\partial \zeta(x, y, t)}{\partial x} \\ + \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial y} \frac{\partial \zeta(x, y, t)}{\partial y} \text{ sobre } z &= \zeta(x, y, t) \end{aligned}$$

Condición dinámica

En la superficie libre del fluido tendremos condiciones adicionales más complicadas. La dinámica del fluido ideal está dada por la ecuación de Euler (5.24) que en presencia de la fuerza exterior peso es

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g\hat{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

De aquí se puede establecer el llamado teorema de Bernouilli. La fuerza $\vec{f}$ representa a la fuerza externa por unidad de volumen.

Teorema de Bernouilli

La ecuación de Euler puede ser escrita de otras manera

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\vec{f}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Es una identidad matemática que

$$\nabla \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

entonces la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -g\hat{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

reemplacemos $\vec{v} = -\nabla\Phi$, $\nabla \times \vec{v} = 0$ por ser el movimiento irrotacional

$$\vec{f} = -\nabla U(\vec{r}, t),$$

se obtiene

$$-\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} = -g \nabla z - \nabla \frac{p}{\rho},$$

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0.$$

En otras palabras la cantidad que tiene gradiente cero es sólo función del tiempo

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t).$$

El potencial de velocidad puede cambiarse

$$\Phi \rightarrow \Phi(\vec{r}, t) - \int F(t) dt,$$

sin que se altere el campo de velocidades y entonces la función $F(t)$ se cancela obteniendo

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 - \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (5.35)$$

En la superficie libre del fluido $z = \zeta$, la presión es la presión atmosférica p_0 . Entonces

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 - \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} = 0 \text{ sobre } z = \zeta(x, y, t),$$

y si despreciamos v^2 , se obtiene

$$\frac{p_0}{\rho} + g\zeta - \frac{\partial \Phi(x, y, \zeta, t)}{\partial t} = 0,$$

y haremos otro cambio en el potencial de velocidad

$$\Phi \rightarrow \Phi(\vec{r}, t) - \frac{p_0 t}{\rho},$$

luego

$$g\zeta - \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = 0,$$

o bien, en la superficie libre se cumple

$$\zeta(x, y, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(x, y, \zeta, t)}{\partial t} \simeq \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(x, y, 0, t)}{\partial t}.$$

O sea las variaciones de la altura del nivel libre del fluido $\zeta(x, y, t)$ se deben a que en la superficie el potencial de velocidad Φ cambia con el tiempo. Note que en la derivada hemos aproximado $\zeta \simeq 0$.

Condiciones de contorno

El potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0,$$

y tiene como condiciones de contorno en una superficie fija, el fondo y los costados

$$v_n = -\hat{n} \cdot \nabla \Phi = 0,$$

y en la superficie libre $z = \zeta$

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (\text{condición cinemática aproximada}) \\ \zeta &= \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (\text{condición dinámica de Bernouilli}) \end{aligned}$$

que pueden combinarse en

$$v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi(x, y, 0, t)}{\partial t^2}.$$

Esta relación permite determinar la velocidad de propagación de las ondas, como se explica en la sección siguiente.

Relación de dispersión

Consideremos como un ejemplo, una onda unidimensional que viaja con velocidad c en la dirección x , siendo el ancho del canal constante b y la profundidad h . Tratemos una solución

$$\Phi(x, z, t) = Z(z) \cos k(x - ct),$$

coloquemos esto en la ecuación de Laplace

$$\cos k(x - ct) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) + Z(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos k(x - ct) = 0,$$

de donde

$$\frac{d^2}{dz^2} Z(z) - k^2 Z(z) = 0,$$

por lo cual

$$Z(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz},$$

pero en el fondo del canal $z = -h$, $v_z = 0$ o sea

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \nabla Z(z) &= 0, \\ Z'(-h) &= 0, \end{aligned}$$

entonces

$$0 = kAe^{-kh} - kB e^{+kh},$$

luego $A = B$

$$\begin{aligned} Z(z) &= Ae^{-kh}(e^{kz+kh} + e^{-kh-kz}), \\ &= C \cosh k(z + h), \end{aligned}$$

pero teníamos que la condición de frontera en la superficie libre es

$$v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \text{ en la superficie libre}$$

o sea

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \Phi = C \cosh k(z + h) \cos k(x - ct),$$

conduce a

$$-kC \sinh kh \cos k(x - ct) = -\frac{1}{g} C k^2 \cosh kh \cos k(x - ct),$$

o bien

$$k \sinh kh \simeq \frac{1}{g} k^2 c^2 \cosh kh.$$

Note que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

entonces

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh,$$

O sea la solución para el potencial de velocidad es

$$\Phi = C \cosh k(z + h) \cos k(x - ct),$$

con

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{g}{k} \tanh kh, \\ c^2 &= \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \end{aligned}$$

Note que si h es pequeño respecto a la longitud de onda, se recupera la velocidad de propagación en aguas poco profundas

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi}{\lambda} h \simeq \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} h = gh,$$

el resultado obtenido anteriormente. Haremos algunos cálculos numéricos, tomando $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $C = 1$, $h = 2$, $\lambda = 1$, $g = 1$.

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh k(\zeta + h)} \simeq \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = 0,398\,94$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} = 0,398\,94 \\ c &= 0,398\,94 \end{aligned}$$

$$\Phi = C \cosh k(z+h) \cos k(x-ct) = \cos(6.283\,2x - 2.506\,6t) \cosh(6.283\,2z + 12.566)$$

$$\Phi = C \cosh k(z+h) \cos k(x-ct) = \cosh(6.283\,2z + 12.566) \cos(6.283\,2x - 2.506\,6t)$$

La forma de la superficie

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} C \cosh k(z + h) \cos k(x - ct) \\ &\simeq \frac{kc}{g} C \cosh kh \sin k(x - ct) \end{aligned}$$

$$\vec{v} = -\nabla \Phi$$

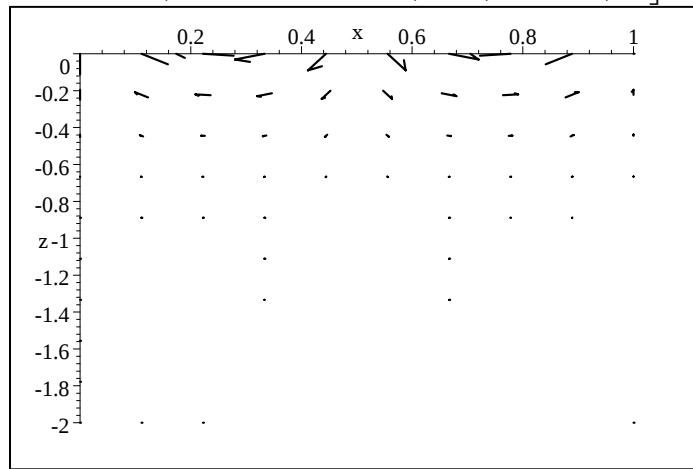
Para t , el vector $\vec{v}$ evaluado numéricamente es

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -6.2832 \cosh(6.2832z + 12.566) \sin(6.2832x - 2.5066t), \\ 6.2832 \sinh(6.2832z + 12.566) \cos(6.2832x - 2.5066t) \end{bmatrix} \text{ y me-}$$

diante la opción Vector Field Plot 2 D con muPad, se obtiene

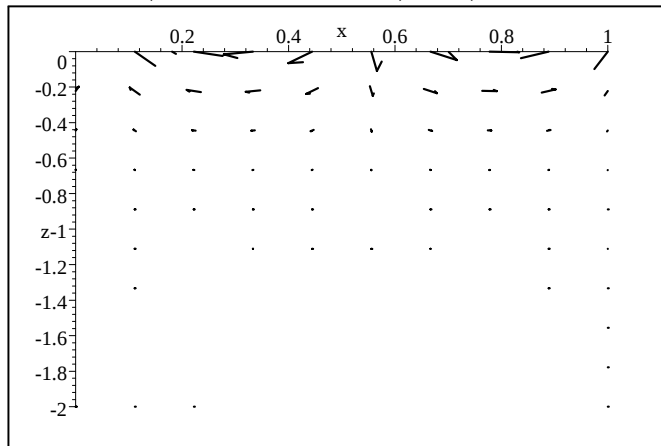
Para $t = 0$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -6.2832 \cosh(6.2832z + 12.566) \sin(6.2832x), \\ 6.2832 \sinh(6.2832z + 12.566) \cos(6.2832x) \end{bmatrix}$$



Para $t = 0,1$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -6.2832 \cosh(6.2832z + 12.566) \sin(6.2832x - 0,25066), \\ 6.2832 \sinh(6.2832z + 12.566) \cos(6.2832x - 0,25066) \end{bmatrix}$$



$$\Phi = C \cosh k(z + h) \cos k(x - ct),$$

con

$$\frac{g}{k} \tanh k(\zeta + h) = c^2.$$

Trayectoria de una partícula

Tenemos que el campo de velocidades es con $\Phi = C \cosh k(z + h) \cos k(x - ct)$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = Ck \cosh k(z + h) \sin k(x - ct), \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -Ck \sinh k(z + h) \cos k(x - ct). \end{aligned}$$

Si al lado derecho aproximamos $x = x_0$, $z = z_0$, estas son satisfechas por las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{C}{c} \cosh k(z_0 + h) \cos k(x_0 - ct), \\ z &= z_0 + \frac{C}{c} \sinh k(z_0 + h) \sin k(x_0 - ct) \end{aligned}$$

de donde

$$\left(\frac{x - x_0}{\cosh k(z_0 + h)} \right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\sinh k(z_0 + h)} \right)^2 = \frac{C^2}{c^2},$$

la ecuación de una trayectoria elíptica.

5.10.4. Más sobre ondas de superficie

Primero recordemos las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido ideal, incompresible y con flujo irrotacional

1. El potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace en todo el fluido (5.34)

$$\nabla^2 \Phi = 0.$$

2. La ecuación de Bernoulli es (5.35)

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0.$$

En la superficie libre del fluido $z = \zeta$, la presión es la presión atmosférica p_0 . En la superficie libre $z = \zeta$ y ahora no despreciamos v^2 , obteniendo

$$\frac{p_0}{\rho} + g\zeta + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0,$$

y haremos otro cambio en el potencial de velocidad

$$\Phi \rightarrow \Phi(\vec{r}, t) - \frac{p_0 t}{\rho},$$

luego

$$\begin{aligned} g\zeta + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\Phi(x, y, \zeta, t)}{\partial t} &= 0, \\ g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{\partial\Phi(x, y, \zeta, t)}{\partial t} &= 0, \text{ en la superficie libre.} \end{aligned} \quad (5.36)$$

3. Sobre cualquier superficie fija que contenga al fluido

$$\hat{n} \cdot \nabla\Phi = 0.$$

4. Condición cinemática en la superficie libre tiene una forma dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(x, y, z, t)}{\partial z} &= -\frac{\partial\zeta(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial\Phi(x, y, z, t)}{\partial x} \frac{\partial\zeta(x, y, t)}{\partial x} \\ + \frac{\partial\Phi(x, y, z, t)}{\partial y} \frac{\partial\zeta(x, y, t)}{\partial y} \text{ sobre } z &= \zeta(x, y, t) \end{aligned}$$

o más abreviadamente

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \nabla\Phi \cdot \nabla\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0, \text{ en la superficie libre del fluido.} \quad (5.37)$$

5.10.5. Una ecuación extendida para ondas de canal

Busquemos una solución de la forma

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh[k(z + h)] e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk.$$

Esta forma satisface la ecuación de Laplace y la condición de velocidad normal cero en el fondo. Esto es

$$\begin{aligned} v_z(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \sinh[k(z+h)] e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk, \\ v_z(-h) &= 0, \end{aligned}$$

Además $\Phi(x, z, t)$ satisface la ecuación de Laplace. Verifiquemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \cosh[k(z+h)] e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \cosh[k(z+h)] e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk. \end{aligned}$$

Luego

$$\nabla^2 \Phi = 0.$$

Falta establecer la condición de contorno en la superficie libre. Estas condiciones son

$$\begin{aligned} g\zeta &= -\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \text{ en } z = \zeta, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla \Phi \cdot \nabla \zeta, \text{ en } z = \zeta. \end{aligned}$$

Si despreciamos los términos no lineales $(\nabla \Phi)^2$ y $\nabla \Phi \cdot \nabla \zeta$ estas son

$$\begin{aligned} g\zeta &= \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \text{ en } z = \zeta, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \text{ en } z = \zeta. \end{aligned}$$

Aproximación en la superficie libre para longitudes de onda grandes respecto a h .

En esta aproximación $kh \ll 1$, entonces en la superficie libre, $z \simeq 0$

$$\begin{aligned} \Phi &\simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh[k(z+h)] e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{2}\right) e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \sinh[k(z+h)] e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \left(kh + \frac{k^3 h^3}{6}\right) e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk, \end{aligned}$$

Llamemos

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk,$$

luego las ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$\begin{aligned} \Phi &\simeq (1 - \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x, t). \text{ En la superficie libre,} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &\simeq (-h \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x, t). \text{ En la superficie libre.} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.37) y (5.36),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -(-h \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x, t) + \nabla \Phi \cdot \nabla \zeta, \\ g\zeta &= \frac{\partial}{\partial t}(1 - \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x, t) - \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2, \end{aligned}$$

obtenemos dos ecuaciones lineales

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(-h \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x, t), \quad (5.38)$$

$$g\zeta = \frac{\partial}{\partial t}(1 - \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x, t), \quad (5.39)$$

Ondas planas

Busquemos soluciones ondas armónicas simples

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}, \\ f &= f_0 e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned}$$

al sustituir da

$$-i\omega\zeta_0 = -(hk^2 + \frac{1}{6}h^3k^4)f_0, \quad (5.40)$$

$$g\zeta_0 = (-i\omega - \frac{1}{2}h^2k^2i\omega)f_0, \quad (5.41)$$

dividiéndolas

$$\omega^2 = ghk^2 \frac{1 + \frac{1}{6}h^2k^2}{1 + \frac{1}{2}h^2k^2}, \quad (5.42)$$

que constituye la relación de dispersión.

5.10.6. Ecuación no lineal efectiva

En la sección anterior aproximamos

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh[k(z+h)] e^{ikx} \tilde{f}(k, t) dk,$$

tomando $z = 0$. Una simple generalización de los anterior expandiendo $[k(h + \zeta)]$ conducirá a

$$\begin{aligned} \Phi &\simeq (1 - \frac{1}{2}(h + \zeta)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f(x, t), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &\simeq (-(h + \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}(h + \zeta)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4}) f(x, t) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.37) y (5.36), y despreciando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -(-(h + \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}(h + \zeta)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4}) f(x, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ g\zeta &= \frac{\partial}{\partial t} (1 - \frac{1}{2}(h + \zeta)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f(x, t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \simeq \frac{\partial}{\partial x} (1 - \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f(x, t) \simeq \frac{\partial f}{\partial x},$$

luego

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (h + \zeta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{6}h^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (5.43)$$

$$g\zeta = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2, \quad (5.44)$$

que se denominan ecuaciones de onda extendidas no lineales.

Ondas solitarias

Busquemos soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \zeta(x - ct), \\ f(x, t) &= f(x - ct). \end{aligned}$$

Al sustituir en las ecuaciones 5.43, 5.44 se obtiene

$$\begin{aligned} -c\zeta' &= (h + \zeta)f'' - \frac{1}{6}h^3 f'''' + f'\zeta', \\ g\zeta &= -cf' + c\frac{1}{2}h^2 f''' - \frac{1}{2}(f')^2, \end{aligned}$$

ecuaciones acopladas para f, ζ . Afortunadamente la primera puede ser integrada

$$\begin{aligned} -c\zeta' &= -\frac{1}{6}h^3 f'''' + hf'' + f'\zeta' + \zeta f'' \\ -c\zeta + \frac{1}{6}h^3 f''' - (h + \zeta)f' &= \text{constante} \end{aligned} \quad (5.45)$$

que debe ser resuelta junto con

$$cf' = -g\zeta + c\frac{1}{2}h^2 f''' - \frac{1}{2}(f')^2. \quad (5.46)$$

5.10.7. Una solución aproximada

Una solución aproximada se logra haciendo algunas otras aproximaciones. Primero mantener sólo el primer término de 5.46

$$cf' = -g\zeta.$$

Reemplace la velocidad de propagación por su aproximación de orden cero (5.42)

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 + \frac{1}{6}h^2 k^2}{1 + \frac{1}{2}h^2 k^2} \simeq gh.$$

Luego la ecuación 5.45 puede ser escrita

$$\begin{aligned} -c\zeta + \frac{1}{6}h^3 f''' - (h + \zeta)f' &= \text{constante} \\ -c^2\zeta + \frac{1}{6}h^3(-g\zeta'') - (h + \zeta)(-g\zeta) &= \text{constante} \\ (1 - \frac{gh}{c^2})\zeta + \frac{1}{6}h^2\zeta'' - \frac{g}{\sqrt{gh}}\zeta^2 &= \text{constante} \end{aligned}$$

Haciendo algunas otras aproximaciones, vea [1, p 401] una solución en forma de onda solitaria se encuentra

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \frac{1}{\cosh^2 \left[\sqrt{\left(\frac{3\zeta_0}{h} \right) \frac{x-ct}{2h}} \right]}.$$

5.10.8. Algunas soluciones de la ecuación de onda.

De acuerdo a las propiedades del operador ∇ puede probarse que son soluciones de la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \phi = 0.$$

5.10.9. A) Ondas planas

Esta son soluciones de la forma

$$\phi(x, y, x, t) = F(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = F(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t),$$

donde F es una función arbitraria (diferenciable), v es la velocidad y $\vec{k}$ es un vector constante cuya magnitud se denomina número de onda. Para demostrarlo basta considerar que

$$\begin{aligned} \nabla F(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) &= \vec{k} F'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \\ \nabla^2 F(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) &= \vec{k} \cdot \nabla F(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \nabla^2 \phi &= k^2 F''(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \omega^2 F''(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \end{aligned}$$

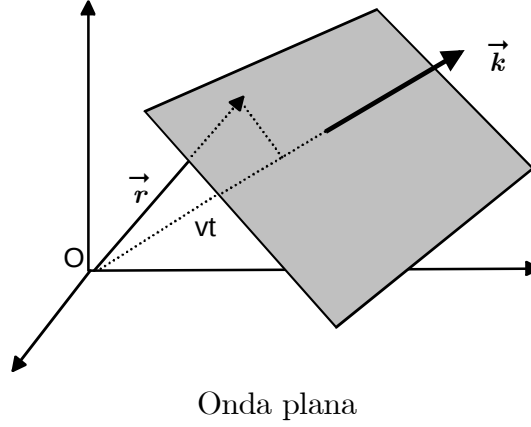
que prueba lo establecido siempre y cuando

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Hay que observar, que los puntos donde F tiene un valor constante, digamos $F(0)$ están sobre el plano

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r} &= \omega t \\ \hat{k} \cdot \vec{r} &= vt, \end{aligned}$$

es decir un plano que viaja precisamente con la velocidad de propagación de la onda $v = \omega/k$, de allí se justifica la denominación de ondas planas.



5.10.10. B) Ondas esféricas

En coordenadas esféricas el Laplaciano puede escribirse (ver apéndice)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

de modo que si buscamos soluciones de la ecuación de onda que dependan de la distancia al origen solamente, la ecuación de onda será

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = 0,$$

pero usted puede establecer que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi),$$

de modo que la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) = 0,$$

de modo que

$$r\phi(r, t) = F(kr - \omega t),$$

por lo cual una onda esférica es de la forma

$$\phi(r, t) = \frac{F(kr - \omega t)}{r},$$

donde la velocidad de propagación es ahora

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

5.10.11. Las ondas electromagnéticas

Como ha sido bien establecido, los campos eléctricos $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en vacío satisfacen las cuatro ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (5.47)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.48)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (5.49)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5.50)$$

Vacío significa la nada. Una solución de estas ecuaciones diferenciales son lo trivial, no hay nada $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$. Pero, hay soluciones no triviales. Veremos. Tomemos el rotor de la tercera

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

y reemplazando la cuarta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

pero como consecuencia de la primera

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E},$$

luego el vector campo eléctrico satisface la ecuación de onda tridimensional

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

con velocidad de propagación

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Considerando que $\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ y $\mu_0 = 1,2566370614 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ resulta $c = 2.9979 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ la rapidez de la luz en el vacío. Similarmemente, tomando el rotor de la cuarta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t},$$

reemplazando la tercera

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2},$$

es decir la misma ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

5.10.12. Ondas electromagnéticas planas

Probando soluciones de la forma

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},\end{aligned}$$

al sustituir en las cuatro ecuaciones de Maxwell se obtiene que

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \\ -\vec{E}_0 \times \nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} - i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= 0, \\ -\vec{B}_0 \times \nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= -\mu_0 \epsilon_0 i\omega \vec{E}_0,\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{E}_0 \times \vec{k} &= -\omega \vec{B}_0, \\ \vec{B}_0 \times \vec{k} &= \mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E}_0,\end{aligned}$$

que muestra que los vectores $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ y el vector de propagación $\vec{k}$ son ortogonales y además que

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{\omega^2} &= \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \\ \omega &= ck.\end{aligned}$$

Es la relación de dispersión.

Interferencia de ondas

Consideremos ondas sinusoidales unidimensionales $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$ donde ϕ se conoce como la fase de la onda. Debido a que la ecuación de onda es lineal, la superposición de este tipo de ondas de la misma velocidad $v = \omega/k$ es también solución de la ecuación de onda. La superposición de ondas de este tipo causa el fenómeno llamado de interferencia, en particular de interferencia constructiva e interferencia destructiva. Considere por ejemplo que la frecuencia sea la misma, entonces la longitud de onda también es la misma y el fenómeno que ocurre en la superposición depende de la diferencia de fase. En efecto, la superposición será

$$\psi = A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2).$$

Aquí conviene utilizar elementos de los números complejos. Considere

$$A_1 e^{i(kx - \omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(kx - \omega t + \phi_2)} = A e^{i(kx - \omega t)},$$

esto es cierto si

$$\begin{aligned}A &= A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} \\ &= e^{i\phi_1} (A_1 + A_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1)}).\end{aligned}$$

Este número complejo puede colocarse en su forma polar de acuerdo a

$$A = |A| e^{i\phi}$$

donde

$$\begin{aligned}|A| &= \sqrt{(A_1 + A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1))^2 + (A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1))^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}, \\ \tan \phi &= \frac{A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}.\end{aligned}$$

En resumen

$$A_1 e^{i(kx - \omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(kx - \omega t + \phi_2)} = |A| e^{i\phi} e^{i(kx - \omega t)},$$

donde la superposición de ondas sinusoidales es la parte imaginaria de la última expresión, es decir

$$\begin{aligned}\psi &= A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)} \sin(kx - \omega t + \phi).\end{aligned}$$

Es decir la superposición es una onda del mismo tipo, con otra fase ϕ y con otra amplitud. La interferencia se llama constructiva si la amplitud de la onda resultante es máxima y destructiva si es mínima. Estos casos ocurren evidentemente si

a) Constructiva: $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\psi = |A_1 + A_2| \sin(kx - \omega t).$$

b) Destructiva: $\phi_2 - \phi_1 = (2n + 1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\psi = |A_1 - A_2| \sin(kx - \omega t).$$

Pulsaciones

Otro fenómeno ocurre si las ondas que se superponen tienen la misma velocidad pero diferentes longitudes de onda y en consecuencia diferentes frecuencias. Suponiendo las mismas fases y amplitudes la superposición es

$$\begin{aligned}\psi &= A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t), \\ v &= \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}\end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\psi = 2A \sin \frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2},$$

esto es el producto de dos ondas que se propagan a iguales velocidades

$$v = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

y que tienen frecuencias, una alta frecuencia

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

y otra que puede ser muy pequeña

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

si las ondas que se superponen tienen frecuencias próximas. Este fenómeno se puede escuchar como un batido de baja frecuencia cuando se pulsan dos cuerdas de guitarra casi afinadas en la misma nota.

$$\psi = 2A \sin \frac{(k_1 + k_2)(x - vt)}{2} \cos \frac{(k_1 - k_2)(x - vt)}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} &= \frac{(k_1 + k_2)v}{2}, \\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} &= \frac{(k_1 - k_2)v}{2}. \end{aligned}$$

5.10.13. Velocidad de grupo

La superposición de muchas ondas de casi la misma frecuencia y con longitudes de onda parecidas también, causa el fenómeno de la formación de un grupo que se dispersa. Para precisar las cosas supongamos que se superponen ondas con frecuencias en un cierto rango continuo, donde esas frecuencias dependen de la longitud de onda de alguna forma funcional tal como

$$\omega = \omega(k).$$

Esta relación se denomina relación de dispersión. En otras palabras estamos suponiendo que la velocidad de propagación $v = \omega(k)/k$ es alguna función de k es decir de la longitud de onda. Este caso tiene una representación concreta en el caso de las ondas luminosas que se propagan en materiales transparentes, donde la velocidad de propagación en ese medio es dependiente de la longitud de onda. Bueno, para ver lo que ocurre considere entonces una superposición continua para algún rango continuo de valores de k

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t) dk.$$

Supongamos que la superposición es hecha en un entorno a un valor k_0 . Si expandimos hasta primer orden

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega'_0(k - k_0),$$

entonces

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(kx - \omega(k)t) dk, \\ &= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(kx - (\omega_0 + \omega'_0(k - k_0))t) dk, \\ &= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(\omega'_0 k_0 t - \omega_0 t + k(x - \omega'_0 t)) dk, \\ &\approx \frac{2A_0}{x - \omega'_0 t} \sin(\Delta(x - \omega'_0 t)) \sin(k_0 x - \omega_0 t) \end{aligned}$$

donde hemos supuesto $A_k \approx A_{k_0} = A_0$. O sea, la resultante

$$\psi = 2A_0 \frac{\sin(\Delta(x - \omega'_0 t))}{x - \omega'_0 t} \sin(k_0 x - \omega_0 t)$$

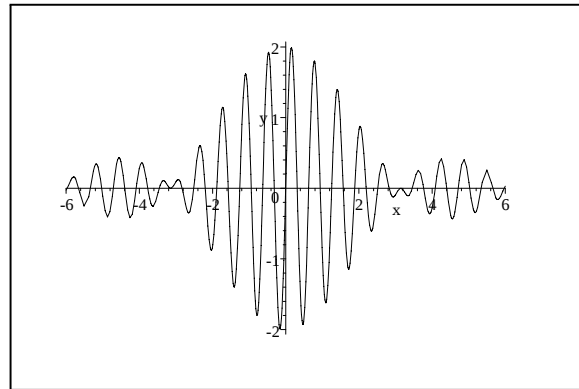
es una onda que viaja con la llamada velocidad de fase ω_0/k_0 modulada por otra onda que viaja con la llamada velocidad de grupo

$$v_g = \omega'_0 = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0}.$$

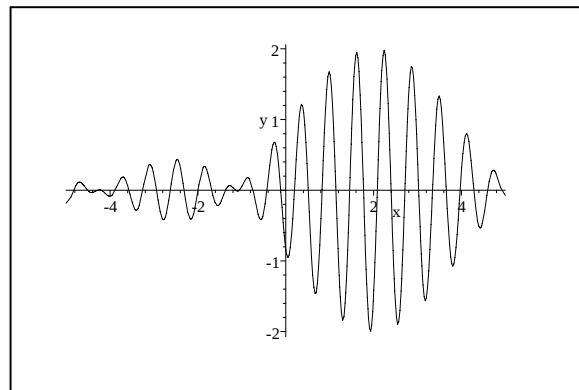
Note que en esta aproximación la amplitud máxima de la modulación ocurre en

$$x = \omega'_0 t$$

Representaremos el grupo viajero para $k_0 = 10$, $\Delta = 1$, $A_0 = 1$, $\omega'_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, en dos tiempos, $t = 0$ y $t = 2$.

Grupo en $t = 0$.

y para $t = 2$

Grupo en $t = 2$.

NOTA 5.1 En realidad la formación de grupos no se debe a la superposición de ondas que sean soluciones de una determinada ecuación de onda. La función considerada

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t) dk,$$

no satisface la ecuación de onda. Ejemplo real donde se forman grupos se hará a continuación.

5.10.14. Efecto Doppler clásico

Suponga una onda viajera hacia la derecha del tipo armónico de velocidad de propagación v

$$\phi(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

Si otro observador se aleja hacia la derecha sobre el eje x con velocidad $u < v$, ¿qué onda es observada por el observador móvil? Para el observador móvil llamaremos la coordenada x' . Supondremos válida la transformación de Galileo, es decir obtendremos el denominado efecto Doppler clásico. Esta transformación puede escribirse

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Así resulta

$$\begin{aligned} \phi'(x', t') &= \phi(x, t) = \phi(x' + ut, t'), \\ &= A \sin(k(x' + ut) - \omega t), \\ &= A \sin(kx' - (\omega - ku)t) \end{aligned}$$

es decir una onda armónica pero con frecuencia

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega - ku, \\ &= \omega \left(1 - \frac{ku}{\omega}\right), \\ &= \omega \left(1 - \frac{u}{v}\right), \end{aligned}$$

es decir una frecuencia menor. Si al contrario, el observador y la onda tienen direcciones de movimiento de distinto sentido resultará

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{u}{v}\right),$$

una frecuencia mayor.

5.10.15. Efecto Doppler relativista

Para velocidades del observador muy altas, cercanas a la velocidad de la luz, debe aplicarse la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut), \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right), \end{aligned}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Así resulta

$$\begin{aligned}\phi'(x', t') &= \phi(x, t) = \phi(\gamma(x' + ut'), \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})), \\ &= A \sin(k\gamma(x' + ut') - \omega\gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})), \\ &= A \sin(\gamma(k - \omega\frac{u}{c^2})x' - \gamma(\omega - ku)t'),\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}k' &= \gamma(k - \omega\frac{u}{c^2}), \\ \omega' &= \gamma(\omega - ku) = \gamma\omega(1 - \frac{u}{v}), \\ v' &= \frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega - ku}{k - \omega\frac{u}{c^2}} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}.\end{aligned}$$

5.10.16. Efecto Doppler para ondas luminosas

Si las ondas tienen la velocidad de la luz, entonces $v' = v = c$ y los resultados anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma(\omega - ku) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \omega(1 - \frac{u}{c}), \\ \omega' &= \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}} \omega.\end{aligned}$$

5.11. Ejercicios propuestos.

EJERCICIO 5.11.1 *Demuestre que si $F(x)$ y $V(x)$ representan extensiones impares y de periodo $2L$ de la forma y de la velocidad inicial de la cuerda, entonces la expresión*

$$\begin{aligned}y(x, t) &= \frac{1}{2}(F(x + vt) + F(x - vt)) \\ &\quad + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x) dx\end{aligned}$$

satisface la ecuación de onda y además

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x), \\ \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V(x), \\ y(0, t) &= 0, \\ y(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

Esta solución se denomina de D'Alembert. Vea [1].

EJERCICIO 5.11.2 Una cuerda elástica de largo L con extremos fijos parte del reposo con una deformación inicial

$$y(0, x) = \begin{cases} cx & \text{si } x < L/2 \\ 0 & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

Resuelva para $y(x, t)$ en su desarrollo de Fourier. Esquematice cuidadosamente la forma de la onda para $t = T/4$, $T = T/2$, mediante la solución de D'Alembert.

EJERCICIO 5.11.3 Repita el problema anterior si la cuerda parte tensa con un perfil de velocidades inicial

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 x/L & \text{si } x < L/2 \\ v_0(1 - x/L) & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

Solución. La forma inicial es cero y el perfil de velocidad inicial es

$$V(x) = \begin{cases} v_0 x/L & \text{si } x < L/2 \\ v_0(1 - x/L) & \text{si } x > L/2 \end{cases},$$

que debe ser expandido

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

siendo entonces

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2v_0}{L^2} \int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2v_0}{L^2} \int_{L/2}^L (L - x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{4v_0}{n^2 \pi^2} \sin \frac{1}{2} n\pi \end{aligned}$$

luego

$$V(x) = \frac{4v_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{2} n\pi \sin \frac{n\pi x}{L},$$

y finalmente

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \frac{4v_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{2} n\pi \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ &= \frac{1}{2v} \frac{4v_0}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n^3} \sin \frac{1}{2} n\pi \left(\cos \frac{n\pi(x-vt)}{L} - \cos \frac{n\pi(x+vt)}{L} \right). \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.11.4 *Obtenga una expresión general para la superposición*

$$\psi = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2).$$

Solución. Sea $\phi = kx - \omega t$. Además proponga

$$\psi = A \cos(\phi + \delta) = A_1 \cos(\phi + \phi_1) + A_2 \cos(\phi + \phi_2).$$

coeficientes de $\cos \phi$ y $\sin \phi$ se obtienen

$$\begin{aligned} A \cos \delta &= A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \\ A \sin \delta &= A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2)^2 + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2)^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}, \end{aligned}$$

y la fase

$$\tan \delta = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}.$$

EJERCICIO 5.11.5 *Obtenga la superposición de las dos ondas*

$$\psi = 2A \sin(kx - \omega t + \pi/4) + A \sin(kx - \omega t).$$

Solución. Utilizando lo anterior la amplitud resultante es

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4A^2 + A^2 + 4A^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= A\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

y la fase dada por

$$\tan \delta = \frac{2A \sin \frac{\pi}{4}}{2A \cos \frac{\pi}{4} + A} = 2 - \sqrt{2}.$$



EJERCICIO 5.11.6 *Determine la potencia promedio transmitida por la onda del problema anterior.*

EJERCICIO 5.11.7 *Demuestre que si un punto se mueve sobre un plano de manera que sus dos coordenadas varían armónicamente como*

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t - \alpha), \\ y &= B \cos(\omega t - \beta), \end{aligned}$$

entonces el punto describe una elipse. Determine además la orientación de esa elipse respecto al eje x .

Solución. Para obtener la ecuación cartesiana, es necesario eliminar el tiempo entre x , y . Una forma de hacerlo es usando números complejos. Considere

$$\begin{aligned} e^{i(\omega t - \alpha)} &= \cos(\omega t - \alpha) + i \sin(\omega t - \alpha) \\ &= \frac{x}{A} + i \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \end{aligned}$$

similarmente

$$\begin{aligned} e^{-i(\omega t - \beta)} &= \cos(\omega t - \beta) - i \sin(\omega t - \beta) \\ &= \frac{y}{B} - i \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambas se obtiene

$$\begin{aligned} e^{i(\beta-\alpha)} &= \left(\frac{x}{A} + i\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\right)\left(\frac{y}{B} - i\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}\right) \\ &= \frac{xy}{AB} - \frac{i}{A}x\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} + \frac{i}{B}y\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}, \end{aligned}$$

tomando la parte real

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{xy}{AB} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}},$$

reordenando

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} = \cos(\beta - \alpha) - \frac{xy}{AB},$$

finalmente, elevando al cuadrado y ordenando

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha),$$

que es la ecuación de una elipse. Note que si $\alpha = \beta$ la curva se reduce a una recta

$$xB - yA = 0.$$



EJERCICIO 5.11.8 *Demuestre que una superposición de ondas de la forma*

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t) dk.$$

no satisface la ecuación de ondas a menos que

$$v = \frac{\omega(k)}{k}$$

sea constante. Esto naturalmente cuestiona el hecho de superponer ondas que no satisfacen una ecuación lineal. Las situaciones físicas donde se forman grupos son complejas. Vea([1, pag.370])

EJERCICIO 5.11.9 *Demuestre que si v denota la velocidad de fase de una onda armónica y v_g la velocidad de grupo, entonces*

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Solución. Sea $\omega = \omega(k)$ la relación de dispersión. Tenemos, por definición

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Derivando la primera respecto a k resulta

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dk} &= \frac{d}{dk} \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{d}{dk}\omega}{k} - \frac{\omega}{k^2} \\ &= \frac{v_g}{k} - \frac{v}{k}, \end{aligned}$$

que prueba lo solicitado.



EJERCICIO 5.11.10 *Si $n(\lambda)$ denota el índice de refracción de un material transparente en función de la longitud de onda, demuestre que la velocidad de grupo está dada por*

$$v_g = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} n'(\lambda) \right).$$

Solución. El índice de refracción se define

$$n(\lambda) = \frac{c}{v(\lambda)},$$

siendo v la velocidad de fase. O sea

$$n(\lambda) = \frac{c}{\frac{\omega}{k}} = \frac{c}{\omega} k,$$

o bien

$$\omega = \frac{ck}{n(\lambda)}.$$

Derivando respecto a λ resulta

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \frac{ck}{n(\lambda)} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{ck}{n^2(\lambda)} n'(\lambda) \frac{d}{dk} \lambda,$$

que puede reordenarse

$$v_g = \frac{c}{n} \left(1 - \frac{k}{n} n'(\lambda) \frac{d}{dk} \lambda \right),$$

pero

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

luego

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{k}{n} n'(\lambda) \frac{2\pi}{k^2} \right) \\ &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} n'(\lambda) \right). \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.11.11 *Demuestre que*

$$\nabla \cdot \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}.$$

Solución. Es útil saber que (suma sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \epsilon_{ijk} a_j b_k, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} &= \delta_{mj} \delta_{li} - \delta_{lj} \delta_{mi}, \end{aligned}$$

donde el símbolo de Levi Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si hay dos o tres índices iguales} \\ 1 & \text{si } ijk \text{ permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ permutación impar de } 123 \end{cases}.$$

Luego

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} v_j \partial_l v_m \\ &= v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i \\ &= \partial_i \frac{1}{2} v_j v_j - \vec{v} \cdot \nabla v_i, \end{aligned}$$

que prueban el resultado.

PROBLEMA 5.11.1 *Demuestre el teorema de Green $\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$, a partir del teorema de Stokes $\iint \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$.*

Solución. En el teorema de Stokes tome la superficie en el plano Oxy y

$$\vec{A} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

calculamos

$$\begin{aligned} \iint \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS &= \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C (Pdx + Qdy). \end{aligned}$$

5.11.1. Cálculo variacional

EJERCICIO 5.11.12 *Una cuerda de longitud fija L cuelga estando sus extremos fijos en dos puntos. Obtenga la ecuación para su forma con la condición de que su energía potencial es mínima.*

Solución. La longitud será

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

y su energía potencial

$$U = \sigma g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

donde σ es la densidad lineal de masa. Variando la energía potencial

$$\begin{aligned} \delta U &= \sigma g \int_{x_1}^{x_2} \delta y \sqrt{1 + (y')^2} dx + \sigma g \int_{x_1}^{x_2} y \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \frac{d}{dx} \delta y dx \\ &= \sigma g \int_{x_1}^{x_2} \delta y \sqrt{1 + (y')^2} dx - \sigma g \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \delta y dx = 0, \end{aligned}$$

debe entonces satisfacerse

$$\frac{d}{dx} \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \sqrt{1+(y')^2}$$

para integrar reordene

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+(y')^2}} \frac{d}{dx} \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = ydy,$$

o bien

$$\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} d \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = ydy$$

que puede integrarse tomando $y'(0) = 0$ y $y(0) = c$

$$\frac{1}{2} \frac{y^2(y')^2}{1+(y')^2} = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} c^2,$$

o bien

$$\frac{y^2}{c^2} = 1 + (y')^2$$

cuya solución es

$$y = c \cosh \frac{x}{c},$$

la ecuación de una catenaria. El llamado parámetro c de la catenaria se determina por

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2} dx = c \sinh \frac{x_2}{c} - c \sinh \frac{x_1}{c},$$

siendo x_1 y x_2 las coordenadas de los puntos fijos.

EJERCICIO 5.11.13 *Se tiene una curva en el plano xy que va desde x_1, y_1 a x_2, y_2 . Si esa curva se rota en 2π respecto al eje y se genera una cierta área. Determine esa curva para que el área generada sea mínima.*

Solución. El área generada será

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1+(y')^2} dx.$$

La ecuación de Euler Lagrange será

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (x \sqrt{1 + (y')^2}) - \frac{\partial}{\partial y} x \sqrt{1 + (y')^2} = 0.$$

Realizando las operaciones

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (x \sqrt{1 + (y')^2}) = 0$$

o sea

$$\frac{\partial}{\partial y'} (x \sqrt{1 + (y')^2}) = -c \quad (\text{constante}),$$

luego

$$x \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = -c$$

cuya solución es (una catenaria)

$$x = c \cosh \frac{y}{c}.$$



EJERCICIO 5.11.14 Si una partícula baja deslizando sin roce sobre una curva $y = y(x)$, el eje y hacia abajo, la rapidez dependerá de la energía de acuerdo a

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

de manera que el tiempo de bajada desde x_1 hasta x_2 será

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + mgy)}}$$

Determine la curva $y(x)$ que da el mínimo tiempo de bajada.

Solución. De acuerdo a lo explicado, el "Lagrangiano" $\frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}}$ no contiene x de manera que se conserva el "Hamiltoniano"

$$y' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + mgy)}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + mgy)}} = \text{constante}$$

o sea

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} = \text{constante}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} = \text{constante}$$

Si la partícula partió del reposo en el origen entonces $E = 0$ con $y(0) = 0$ entonces $y'(0) = \infty$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} = \text{constante} = -H$$

$$\sqrt{\frac{1}{2gH^2y} - 1} = \frac{dy}{dx}$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{2gH^2y} - 1}}$$

Sea

$$\frac{1}{2gH^2} \sin^2 \theta = y.$$

$$dy = \frac{1}{gH^2} \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

entonces

$$x = \int \frac{1}{gH^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1}} d\theta$$

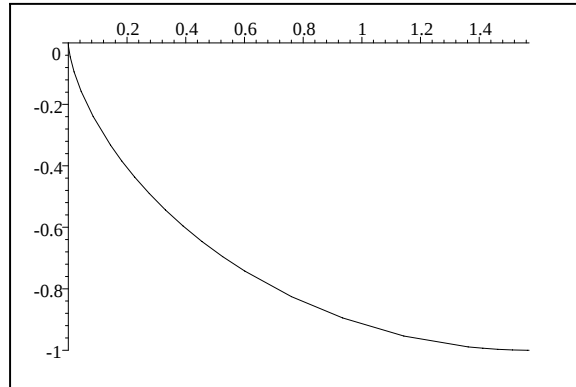
$$= \frac{1}{gH^2} \int \sin^2 \theta d\theta$$

finalmente, la ecuación paramétrica de la curva es

$$y = \frac{1}{2gH^2} \sin^2 \theta,$$

$$x = \frac{1}{2gH^2} (\theta - \cos \theta \sin \theta).$$

Mediante parametric Plot de mapple, ploteamos $\begin{pmatrix} \theta - \cos \theta \sin \theta \\ -\sin^2 \theta \end{pmatrix}$



EJERCICIO 5.11.15 *Determine la ecuación de la curva que tiene la mínima longitud entre x_1 e x_2 .*

Solución. La longitud de la curca ("la acción") será

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

El "lagrangiano" $L = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ no depende de y luego se conserva o es constante

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}$$

$$y'(x) = \text{constante}.$$

O sea se trata de la línea recta. Esa distancia mínima será

$$S(y_2, y_1, x_2, x_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

PROBLEMA 5.11.2 *Con relación al problema anterior verifique las ecuaciones (5.4, 5.5, 5.6 y 5.7)*

Solución. En notación puramente matemática esas ecuaciones son

$$\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_2} = p(x_2), \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_1} = -p(x_1) \quad (5.52)$$

$$\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_2} = L(y(x_2), y'(x_2)), \quad (5.53)$$

$$\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_1} = -L(y(x_1), y'(x_1)). \quad (5.54)$$

y podemos calcular

$$\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_1} = -\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (5.56)$$

$$\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_2} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} + \quad (5.57)$$

$$\frac{(y_2 - y_1)y'(x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (5.58)$$

$$\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_1} = -\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (5.59)$$

$$-\frac{(y_2 - y_1)y'(x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (5.60)$$

$$p(x_2) = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad (5.61)$$

$$-p(x_1) = -\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (5.62)$$

$$L(y(x_2), y'(x_2)) = \sqrt{1 + (y')^2} \quad (5.63)$$

$$-L(y(x_1), y'(x_1)) = -\sqrt{1 + (y')^2}. \quad (5.64)$$

Verifique las igualdades considerando que

$$y' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por ejemplo

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2}} = \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}.$$



EJERCICIO 5.11.16 *Suponga que una partícula se mueve sometida a un potencial que repele a la partícula sobre el eje x*

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}kx^2 \\ F &= kx \end{aligned}$$

y vinculada a un alambre liso de forma $y = y(x)$ partiendo del origen con velocidad nula. Determine la curva $y(x)$ para alcanzar el punto x_2, y_2 en un tiempo mínimo.

Solución. Tenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2 = 0,$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}x = \frac{ds}{dt},$$

y entonces el tiempo de viaje es

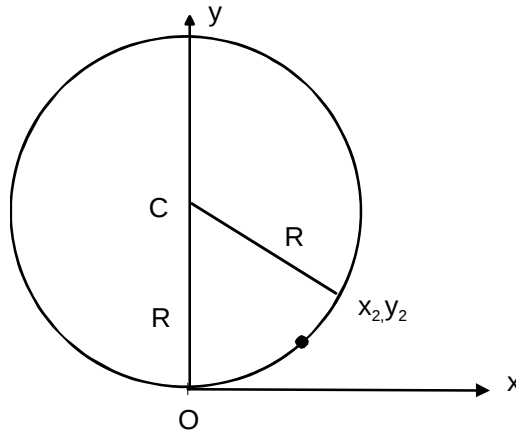
$$t = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{\frac{k}{m}}x} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}dx}{\sqrt{\frac{k}{m}}x}.$$

Como el "lagrangiano" no depende de $y(x)$ es constante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy'} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{\frac{k}{m}}x} &= c, \\ \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} &= c\sqrt{\frac{k}{m}}x \\ y &= \int_0^x \frac{c\sqrt{\frac{k}{m}}x}{\sqrt{1 - (c\sqrt{\frac{k}{m}}x)^2}} dx \\ \left(y - \frac{\sqrt{m}}{c\sqrt{k}}\right)^2 + x^2 &= \left(\frac{\sqrt{m}}{c\sqrt{k}}\right)^2 \end{aligned}$$

Una circunferencia de radio $R = \frac{\sqrt{m}}{c\sqrt{k}}$ y centro C en el punto $x_C = 0$, $y_C = R$. Pero debe pasar por el punto x_2, y_2 luego

$$\begin{aligned} (y_2 - R)^2 + x_2^2 &= R^2 \\ R &= \frac{1}{2} \frac{y_2^2 + x_2^2}{y_2} \end{aligned}$$



$$\frac{\sqrt{m}}{c\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \frac{y_2^2 + x_2^2}{y_2}$$



Más en general

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = 0$$

$$t = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{-\frac{2}{m}V(x)}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2} dx}{\sqrt{-\frac{2}{m}V(x)}},$$

luego se conserva

$$p = \frac{d}{dy'} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{-\frac{2}{m}V(x)}} = \frac{y'(x)}{\sqrt{-\frac{2}{m}V(x)} \sqrt{1 + (y'(x))^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + (y'(x))^2 - 1}{(1 + (y'(x))^2)} &= -\frac{2p}{m}V(x) \\ \frac{1}{(1 + (y'(x))^2)} &= \frac{2p}{m}V(x) + 1 \\ (y'(x))^2 &= \frac{1}{\frac{2p}{m}V(x) + 1} - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{-\frac{2p}{m}V(x)}{\frac{2p}{m}V(x) + 1}} \end{aligned}$$

Supongamos

Problemas complementarios

EJERCICIO 6.0.17 *Demuestre que el movimiento de una partícula en un campo central $V(r) = -k/r + h/r^2$ con k y h constantes, es el mismo que bajo el potencial de Kepler, cuando se expresa con respecto a un sistema de referencia que rota en torno del centro de fuerza. Determine además para energía negativa y cuando el término adicional es muy pequeño, la velocidad de precesión de la órbita cuasielíptica .*

EJERCICIO 6.0.18 *Una partícula es disparada desde la superficie de la tierra, supuesta esférica de masa M y radio R , con rapidez inicial V_0 , formando un ángulo ϕ con la vertical del lugar. Despreciando la resistencia del aire, la rotación terrestre y el movimiento de la tierra, demuestre que la excentricidad de la trayectoria está dada por*

$$e^2 = 1 + \frac{R^2 V_0^2 \sin^2(\phi)}{G^2 M^2} \left(V_0^2 - \frac{2GM}{R} \right) .$$

la trayectoria es

$$r = \frac{R^2 V_0^2 \sin^2(\phi)}{GM(1 + e \cos(\theta))} .$$

¿cuál es la ubicación del eje polar de la cónica?

EJERCICIO 6.0.19 *Un potencial frecuentemente encontrado en física nuclear es el pozo rectangular, definido por:*

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq a \\ -V_0 & \text{si } r < a \end{cases} .$$

Demuestre que el scattering producido por tal potencial es idéntico con la refracción de un rayo luminoso por una esfera de radio a y un índice de refracción relativo

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}.$$

Demuestre además que la sección diferencial de scattering está dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{n^2 a^2 (n \cos(\theta/2) - 1)(n - \cos(\theta))}{4 \cos(\theta/2) (1 + n^2 - 2n \cos(\theta/2))^2}.$$

EJERCICIO 6.0.20 Determinar la sección eficaz para partículas que caen en el centro en un potencial (Landau, Mecánica [5])

$$U = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

EJERCICIO 6.0.21 Determinar la sección eficaz en el scattering para ángulos pequeños, en un potencial central

$$U = \frac{a}{r^n}, \quad \text{con} \quad n > 0.$$

EJERCICIO 6.0.22 Dos partículas se mueven bajo la acción de su atracción gravitacional, una en torno de la otra en órbitas circulares, con periodo τ . Si su movimiento es repentinamente detenido, cayendo entonces una hacia la otra, demuestre que ellas chocan en un tiempo dado por

$$t = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

EJERCICIO 6.0.23 Un balde con líquido se hace rotar en torno de la vertical con velocidad angular constante. Si se supone que la situación estacionaria corresponde a un mínimo del hamiltoniano del sistema, determine la forma de la superficie.

EJERCICIO 6.0.24 Un cable flexible, cuyo peso por unidad de longitud es uniforme, cuelga entre dos puntos dados bajo la acción de la gravedad, figura (6.1). Determine la forma de dicho cable bajo la condición de que la energía potencial sea un mínimo, compatible con la longitud fija del cable.

EJERCICIO 6.0.25 Si $g(p)$ denota la transformada de Legendre de $f(x)$, demuestre entonces que si

Figura 6.1:

- a) $f(x) = x^2$ entonces $g(p) = p^2/4$.
- b) $f(x) = mx^2/2$ entonces $g(p) = p^2/2m$.
- c) $f(x) = x^\alpha/\alpha$ entonces $g(p) = p^\beta/\beta$ con $1/\alpha + 1/\beta = 1$, si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$.

EJERCICIO 6.0.26 *Demuestre, con la notación del problema anterior que*

$$px \leq f(x) + g(p)$$

la desigualdad de Young, válida para $x > 0$, $p > 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, y $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

EJERCICIO 6.0.27 *Encuentre los hamiltonianos correspondientes a los lagrangianos*

$$\begin{aligned} L(\dot{q}) &= \sqrt{1 - \dot{q}^2}, \\ L(q, \dot{q}, t) &= e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)/2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.0.28 *Encuentre los lagrangianos correspondientes a los hamiltonianos*

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p^2/2 + p \sin(q), \\ H(q, p) &= p^2/2 + q^2/2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.0.29 Considere un péndulo constituido por una barra uniforme de masa M y longitud L que oscila en un plano vertical bajo la acción de su peso. Considere además que el punto de suspensión se hace oscilar verticalmente con amplitud A y frecuencia angular Ω , figura (6.2). Escriba la ecuación de Lagrange para el ángulo que forma el péndulo con la vertical.

Figura 6.2:

EJERCICIO 6.0.30 Con respecto a la situación del problema anterior, analice la posibilidad de que el movimiento sea estable cuando el péndulo está oscilando respecto a la posición más alta. (Vea [4])

EJERCICIO 6.0.31 Para el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, discuta la condición que debe cumplir su spin para que su movimiento dormido, trompo bailando vertical, sea estable. Considere dados sus momentos de inercia respecto a la púa, A y C , su masa M y la distancia h desde la púa al centro de masas, además de la aceleración de gravedad.

EJERCICIO 6.0.32 Considere el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, en precesión uniforme, es decir con la inclinación de su eje respecto de la vertical constante. Deduzca la condición que deben cumplir su spin s y su velocidad angular de precesión $\dot{\phi} = \Omega$ para que ello ocurra. Considere dados los momentos de inercia respecto a la púa, A y C , su masa M y la distancia h desde la púa al centro de masas, además de la aceleración de gravedad.

EJERCICIO 6.0.33 Considere una partícula moviéndose en un campo central de fuerza atractivo inverso al cuadrado de la distancia, de modo que

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r}.$$

Demuestre que la energía, en términos de las variables de acción angular, para coordenadas r y θ en el plano del movimiento, está dada por

$$E = -\frac{2m\pi^2 k^2}{(J_r + J_\theta)^2}.$$

EJERCICIO 6.0.34 Para la versión relativista del problema anterior con lagrangiano

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + \frac{k}{r},$$

demuestre que para el caso estable, partícula sin caer al origen

$$\frac{m_0 c^2}{E} = 1 + \frac{(k/c)^2}{(J_r/2\pi + \sqrt{(J_r/2\pi)^2 - (k/c)^2})^2}.$$

EJERCICIO 6.0.35 Si se indica con $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ la constante de estructura fina y se imponen las reglas de cuantización de Sommerfeld $J_\theta = n_\theta h$, $J_r = n_r h$, con $n_\theta = 1, 2, 3, \dots$, $n_r = 0, 1, 2, \dots$, demuestre que hasta orden en α^2 , la energía está dada por

$$E = m_0 c^2 - \frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2n^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{n_\theta} - \frac{3}{4} \right) \right),$$

siendo $n = n_r + n_\theta$. Compare con los niveles predichos por la teoría de Dirac

$$E = m_0 c^2 - \frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2n^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right),$$

siendo j el momentum angular total del electrón, incluido spin.

EJERCICIO 6.0.36 Estudie la naturaleza de las órbitas que son posibles en el modelo relativista de campo central de fuerza considerado en los problemas anteriores, en particular la condición bajo la cual la partícula cae al centro de fuerza.

EJERCICIO 6.0.37 *Un lagrangiano está dado por*

$$L = \frac{1}{4}\dot{q}^4 - \frac{\alpha^2}{2}\dot{q}^2.$$

Para este caso, la definición del momento canónico

$$p = \dot{q}^3 - \alpha^2\dot{q}$$

*no permite resolver en forma unívoca para $\dot{q}$. La evolución en $\dot{q}(t)$ tiene una, dos o tres soluciones dependiendo de p y α . En el caso en que hayan tres soluciones, demuestre que la acción al ir entre dos puntos en un tiempo T alcanza su mínimo $-\frac{1}{4}\alpha^4 T$ para trayectorias zigzagueantes con $\dot{q} = \pm\alpha$, ver figura (6.3). Vea, *Gravity in higher dimensions*, M.Henneaux, C.Teitelboim,*

Figura 6.3: Mínimo de una acción

J.Zanelli. [6]

EJERCICIO 6.0.38 *Si F denota una función de las coordenadas y momentos canónicos, demuestre que los corchetes de Poisson con las coordenadas y momentos son*

$$\begin{aligned}\{F, q_i\} &= -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \{F, p_i\} &= \frac{\partial F}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.0.39 Si $\vec{L}$ denota el momentum angular de una partícula, demuestre que

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ijk} L_k, \\ \left\{ \left| \vec{L} \right|^2, \vec{L} \cdot \hat{n} \right\} &= 0.\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.0.40 Demuestre que si $F(q, p, t)$ y $G(q, p, t)$ son constantes de movimiento, también lo es su paréntesis de Poisson.

Problemas resueltos

EJEMPLO 7.0.1 *Considere una partícula de masa m que se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio R y masa M que puede deslizarse sobre un plano horizontal liso, fig. (7.1). Estando el sistema en reposo se perturba levemente. Discuta sobre la posibilidad de que la partícula abandone el contacto con el hemisferio.*

Solución. Con relación a la figura las ecuaciones de movimiento son

Figura 7.1:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2(x + R \sin \theta)}{dt^2} &= N \sin \theta, \\ m \frac{d^2(R \cos \theta)}{dt^2} &= N \cos \theta - mg, \\ M \frac{d^2x}{dt^2} &= -N \sin \theta \end{aligned}$$

. Si se elimina x y N se obtiene una ecuación diferencial para el ángulo θ que integrada una vez conduce a

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \frac{1 - \cos \theta}{1 - \frac{m}{m+M} \cos^2 \theta}.$$

Considerando que la condición para que exista despegue de la superficie es $N = 0$, o sea $\ddot{x} = 0$, se obtiene

$$\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) = 0,$$

que desarrollada conduce a una ecuación de tercer grado para el $\cos \theta$. En efecto se tiene

$$p \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2 = 0, \quad \text{con } p = \frac{m}{m+M}.$$

La existencia de una solución real en el intervalo $(0, \pi/2)$ se deduce del hecho que si evaluamos $f(\theta) = p \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2$ en 0 y 1 resulta

$$\begin{aligned} f(0) &= p - 1 < 0 \\ f(\pi/2) &= 2 > 0. \end{aligned}$$

Una forma *trigonométrica* de solucionar esta ecuación se logra suponiendo que

$$\cos \theta = A \cos \phi.$$

Si se compara la ecuación a resolver con la identidad

$$4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi - \cos 3\phi = 0,$$

puede demostrarse que

$$A = \frac{2}{p}, \quad \cos 3\phi = -\sqrt{p}.$$

De las tres soluciones para ϕ que se determinan numéricamente, si son reales, debe escogerse aquella que conduzca a $\cos \phi \leq 1$. Por ejemplo si $p = 1/2$ resultan $\phi = 40^\circ, 160^\circ, 280^\circ$. Sirve la última para la cual se obtiene $\cos \theta = \sqrt{3} - 1$, de donde el ángulo de despegue será $\theta = 42.94^\circ$



NOTA 7.1 Es de utilidad para un número de problemas, incluido el anterior, el uso de la identidad

$$\frac{d^2}{dt^2}f(s) = \frac{1}{2f'(s)} \frac{d}{ds} [f'(s)\dot{s}]^2. \quad (7.1)$$

EJEMPLO 7.0.2 *Dos partícula iguales de masa m se colocan una sobre el suelo liso, otra unida por una cuerda liviana de longitud L a la primera de modo que la cuerda está vertical y recta pero sin tensión inicial $T(0) = 0$. A la partícula superior se le imprime una velocidad horizontal de magnitud V_0 . Demuestre que si $V_0^2/gL < 1$ la cuerda dejará de estar tensa y que si $V_0^2/gL > 2$ la partícula inferior despegará del suelo.*

Solución.

Las ecuaciones de movimiento suponiendo que la cuerda se tensa (al menos al inicio) y que la partícula inferior no se despega son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T \sin \theta, \\ N + T \cos \theta - mg &= 0, \\ m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \sin \theta) &= -T \sin \theta, \\ -mg - T \cos \theta &= m \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \theta), \end{aligned}$$

restando la tercera menos la primera eliminamos $\ddot{x}$ resultando

$$T = -\frac{m}{2 \sin \theta} \frac{d^2}{dt^2}(L \sin \theta)$$

reemplazando esta T en la cuarta resulta

$$-mg + \cos \theta \frac{m}{2 \sin \theta} \frac{d^2}{dt^2} (L \sin \theta) = m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \theta),$$

o, haciendo uso de (7.1)

$$\begin{aligned} -g + \cos \theta \frac{L}{2 \sin \theta} \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 &= -L \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2, \\ \frac{2g}{L} \sin \theta &= \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

integrando entre 0 y θ considerando que $\dot{\theta}(0) = \frac{V_0}{L}$ resultará

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L^2} = \frac{2g}{L} (1 - \cos \theta),$$

luego despejamos

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L^2} + \frac{2g}{L} (1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta} = \frac{\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L^2} + \frac{2g}{L} (1 - \cos \theta)}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta}.$$

Con este resultado podemos evaluar T

$$\begin{aligned} T &= -\frac{m}{2 \sin \theta} \frac{d^2}{dt^2} (L \sin \theta) = -\frac{mL}{2 \sin \theta} \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 \\ &= -\frac{mL}{2 \sin \theta} \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos^2 \theta \frac{\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L^2} + \frac{2g}{L} (1 - \cos \theta)}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta} \right) \end{aligned}$$

sea $z = \cos \theta$ y $p = \frac{V_0^2}{gL}$

$$\begin{aligned} T &= \frac{mL}{2} \frac{1}{2z} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L^2} + \frac{2g}{L} (1 - z)}{1 - \frac{1}{2} z^2} \right) \\ &= mg \frac{p + 4 - 6z + z^3}{(2 - z^2)^2} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} N &= mg - zmg \frac{p + 4 - 6z + z^3}{(2 - z^2)^2} \\ &= mg \frac{2z^2 - zp - 4z + 4}{(2 - z^2)^2} \end{aligned}$$

Podemos ver que si $V_0 = \sqrt{gL}$ la tensión inicial es cero, pero inmediatamente se hace positiva. La reacción normal no se anula y el sistema continua en movimiento sin romper ni un vínculo hasta que la partícula de arriba llega al suelo. Si $V_0 > \sqrt{gL}$ la tensión parte siendo positiva y se mantiene así. La reacción normal puede anularse. Si $p = 2$ la reacción normal parte siendo cero pero inmediatamente se recupera el contacto con el suelo. Si $p > 2$ por ejemplo sea $p = 3$

$$T(1) = mg \frac{3 + 4 - 6 + 1}{(2 - 1)^2} = 2mg$$

entonces inicialmente $z = 1$

$$N(1) = mg \frac{2 - 3 - 4 + 4}{(2 - 1)^2} = -mg$$

lo cual significa que la partícula de abajo parte inmediatamente perdiendo el contacto con el suelo. Para velocidades menores que $\sqrt{gL}$, la longitud del hilo parte acortándose pero la distancia entre las dos partículas será

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0 t)^2 + (L - \frac{1}{2}gt^2)^2} = \sqrt{L^2 - (Lg - v_0^2)t^2 + \frac{g^2 t^4}{4}},$$

luego la cuerda se pone tensa cuando $-(Lg - v_0^2) + \frac{g^2 t^2}{4} = 0$, o sea en

$$t = 2 \frac{\sqrt{Lg - v_0^2}}{g},$$

y allí recién la partícula de abajo inicia su movimiento.

EJEMPLO 7.0.3 *Se desea disparar un proyectil, desde el Ecuador hasta el Polo, sin considerar resistencia de aire o rotación terrestre. Analice las diversas posibilidades.*

Solución. Suponiendo la tierra de masa M y radio R , y el proyectil es disparado con rapidez inicial V_0 , formando un ángulo ϕ con la vertical del lugar, se tiene

$$l_O = mRV_0 \sin \phi, \quad E = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R},$$

de donde resulta

$$e^2 = 1 + \frac{2El_O^2}{mK^2} = 1 + \frac{R^2V_0^2\text{sen}^2(\phi)}{G^2M^2} \left(V_0^2 - \frac{2GM}{R} \right),$$

y la ecuación de la órbita será

$$r = \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)} = \frac{R^2V_0^2\text{sen}^2(\phi)}{GM(1 - e \cos(\theta - \alpha))}.$$

Si se coloca como condición que $r = R$, en $\theta = 0$, y en $\theta = \pi/2$, se obtiene $\alpha = \pi/4$ y

$$1 - e \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{RV_0^2\text{sen}^2(\phi)}{GM},$$

denotando $V_e^2 = 2GM/R$ y $x = (V_e/V_0)^2$, puede obtenerse

$$\sqrt{1 - 4x(1 - x) \sin^2 \phi} = \sqrt{2}(1 - 2x \sin^2 \phi),$$

que puede resolverse para x (las soluciones positivas sirven)

$$x = (V_e/V_0)^2 = \frac{1}{2 \cos 2\phi} \left(-1 \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{1 - \cos 2\phi}} \right),$$

pero

$$\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \phi$$

luego puede escribirse

$$\begin{aligned}
 (V_e/V_0)^2 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{(-\sin \phi \pm \cos \phi)}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}, \\
 &= -\frac{1}{2 \sin \phi} \frac{(\cos \phi + \sin \phi)}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{1}{\sin \phi - \cos \phi} \\
 &= \frac{1}{2 \sin^2 \phi - 2 \sin \phi \cos \phi} \\
 &= \frac{1}{1 - \cos 2\phi - \sin 2\phi} \quad (\phi > \pi/4) \\
 &\quad \text{ó} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{(\cos \phi - \sin \phi)}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{1}{\cos \phi + \sin \phi} \\
 &= \frac{1}{1 - \cos 2\phi + \sin 2\phi}
 \end{aligned}$$

en particular para $\phi = \pi/2$ (órbita circular) resulta como era de esperar $x = 1/2$, o sea $V_0^2 = GM/R$. Si $\phi = \pi/4$, la solución es $x = 1/4$.

EJEMPLO 7.0.4 Una partícula se mueve en un campo central inverso al cuadrado a la distancia en movimiento elíptico. Determine los promedios temporales en un periodo del movimiento de la energía cinética y de la energía potencial en términos de la constante de la ley de fuerza y del semieje mayor de la elipse.

Solución. Si T denota el periodo, los valores promedios a calcular son:

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) dt, \\
 \langle V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{K}{r} dt.
 \end{aligned}$$

Ambas integrales pueden cambiarse a integrales respecto al ángulo si se utiliza $l_O = mr^2\dot{\theta}$, de la siguiente forma

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \right)^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \frac{d\theta}{\dot{\theta}},$$

$$\langle V \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}.$$

Si además se utiliza la expresión para la trayectoria

$$r = \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1 - e \cos \theta},$$

se puede obtener

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{l_O^2}{mK} \frac{e \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^2} \right)^2 + r^2 \right) \frac{l_O}{mr^2} d\theta, \\ \langle V \rangle &= -\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} \frac{mr^2}{l_O} d\theta = -\frac{Km}{Tl_O} \int_0^{2\pi} \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1 - e \cos \theta} d\theta, \end{aligned}$$

que pueden ser simplificadas a

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{l_O}{2T} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^2 \sin^2 \theta}{(1 - e \cos \theta)^2} + 1 \right) d\theta, \\ \langle V \rangle &= -\frac{l_O}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e \cos \theta} d\theta, \end{aligned}$$

utilizando la integral conocida

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}},$$

e integrando por partes la expresión para $\langle K \rangle$, se obtiene

$$\langle K \rangle = \frac{l_0}{2T} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \langle V \rangle = -\frac{l_0}{T} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Estos resultados pueden expresarse en términos de K , y a . Para ello recuerde que

$$T = \frac{\pi abm}{l_O}, \quad a = \frac{l_O^2}{mK} \frac{1}{1-e^2}, \quad b = \frac{l_O^2}{mK} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2},$$

de donde resultará

$$\langle K \rangle = \frac{K}{a}, \quad \langle V \rangle = -\frac{2K}{a}.$$

EJEMPLO 7.0.5 *Un potencial frecuentemente encontrado en física nuclear es el pozo rectangular, definido por:*

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq a \\ -V_0 & \text{si } r < a \end{cases}.$$

Demuestre que el scattering producido por tal potencial es idéntico con la refracción de un rayo luminoso por una esfera de radio a y un índice de refracción relativo

$$n = \sqrt{(E + V_0)/E}.$$

Solución. La ecuación de movimiento puede escribirse, en coordenadas polares como

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -V_0\delta(r-a), \quad mr^2\dot{\theta} = l_0,$$

lo que muestra que se conserva la velocidad *transversal* (a lo largo de $\hat{\theta}$) y la componente radial cambia al pasar la esfera según

$$\dot{r}^2|_{a^+} - \dot{r}^2|_{a^-} = -\frac{2V_0}{m}.$$

De allí es fácil demostrar lo pedido, pues, ver figura (7.2), se tiene que

$$\begin{aligned} V_1 \sin \theta_1 &= V_2 \sin \theta_2, \\ (V_1 \cos \theta_1)^2 - (V_2 \cos \theta_2)^2 &= -2V_0/m, \quad V_1^2 = 2E/m, \end{aligned}$$

luego

$$\sin \theta_1 = \sqrt{(E + V_0)/E} \sin \theta_2.$$

Figura 7.2:



EJEMPLO 7.0.6 *Dos partículas de masa m_1 y m_2 se mueven bajo la acción de su atracción gravitacional, una en torno de la otra en órbitas circulares, con periodo τ . Si su movimiento es repentinamente detenido, cayendo entonces una hacia la otra, demuestre que ellas chocan en un tiempo dado por*

$$t = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

Solución. Para la situación inicial, ambas partículas describiendo círculos en torno de G , se puede establecer que

$$\tau = \frac{2\pi R\sqrt{R}}{\sqrt{GM}},$$

siendo $R = R_1 + R_2$, $M = m_1 + m_2$. Para la situación dinámica, una cayendo hacia la otra, la segunda ley de Newton implica

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2},$$

siendo $r = r_1 + r_2$. Una primera integral conduce a

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}.$$

Separando variables e integrando nuevamente, se obtiene el tiempo para que choquen, es decir para que $r = R \rightarrow r = 0$. Ese tiempo resulta

$$t = \frac{R\sqrt{R\pi}}{2\sqrt{2GM}},$$

de donde es fácil establecer lo solicitado.

EJEMPLO 7.0.7 *Se realizan tres rotaciones activas sucesivas en $\pi/2$ en torno a los ejes cartesianos x, y, z en ese orden. Encuentre el eje y el ángulo de la rotación equivalente.*

Solución. La matriz de la rotación resultante será

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde $1 + 2 \cos \phi = \text{Tr}(R) = 1$, por lo tanto $\phi = \pi/2$. El eje se deduce de

$$R - R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \sin \phi \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que es una rotación en noventa grados respecto al eje y .

EJEMPLO 7.0.8 *Pruebe la siguiente relación entre rotaciones, que generaliza el resultado del problema anterior*

$$R_z(\phi)R_y(\pi/2)R_x(\phi) = R_y(\pi/2).$$

Solución. La matriz de rotación finita ha sido escrita en términos de una matriz que hemos llamado $(\hat{n} \times)$. Por una obvia propiedad de los vectores, tenemos que

$$R\vec{a} \times \vec{b} = R(\vec{a} \times R^{-1}\vec{b}),$$

lo que significa que la matriz *cruz* correspondiente a un vector *rotado* es

$$(R\vec{a} \times) = R(\vec{a} \times)R^{-1}.$$

En consecuencia

$$RR_{\hat{n}}(\phi)R^{-1} = R_{R\hat{n}}(\phi).$$

En particular se tiene

$$\begin{aligned} R_y(\pi/2)R_x(\phi) &= R_y(\pi/2)R_x(\phi)R_y^{-1}(\pi/2)R_y(\pi/2) \\ &= R_{-z}(\phi)R_y(\pi/2), \end{aligned}$$

de donde es claro el resultado.

EJEMPLO 7.0.9 Demuestre la siguiente relación de rotaciones que involucran los ángulos de Euler, ecuación 4,7 con la notación allí indicada:

$$R = R_{z'}(\Psi)R_n(\Theta)R_z(\Phi) = R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(\Psi).$$

Solución. La demostración está basada en las mismas propiedades del problema anterior. Considere que

$$\hat{n} = R_z(\Phi)\hat{i}, \quad \hat{k}' = R_{\hat{n}}(\Theta)\hat{k} = R_{R_z(\Phi)\hat{i}}(\Theta)\hat{k},$$

por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} R &= R_{\hat{n}}(\Theta)R_z(\Psi)R_{\hat{n}}(-\Theta)R_n(\Theta)R_z(\Phi) \\ &= R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(-\Phi)R_z(\Psi)R_z(\Phi) \\ &= R_z(\Phi)R_x(\Theta)R_z(\Psi). \end{aligned}$$

pues rotaciones en torno a un mismo eje conmutan.

EJEMPLO 7.0.10 *Demuestre que las componentes de la velocidad angular, en términos de los ángulos de Euler son*

a) En el sistema móvil

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

b) En el sistema de ejes fijos:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.\end{aligned}$$

Figura 7.3:

Solución. De acuerdo al teorema de adición de velocidades angulares se tiene que

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{i}'' + \dot{\psi} \hat{k}', \quad (7.2)$$

siendo $\hat{i}'' = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} = \cos \psi \hat{i}' - \sin \psi \hat{j}'$, entonces, para escribirla en términos de las direcciones fijas basta considerar que

$$\hat{k}' = \cos \theta \hat{k} + \sin \theta (\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}),$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) + \\ &\quad \dot{\psi}(\cos\theta\hat{k} + \sin\theta(\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j})), \\ &= (\dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi)\hat{i} + \\ &\quad (-\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi)\hat{j} + \\ &\quad (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\hat{k}.\end{aligned}$$

Para escribirla en ejes móviles considere de nuevo (7.2)

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{i}'' + \dot{\psi}\hat{k}',$$

y ahora

$$\hat{k} = \cos\theta\hat{k}' + \sin\theta(\cos\psi\hat{j}' + \sin\psi\hat{i}'),$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\phi}(\cos\theta\hat{k}' + \sin\theta(\cos\psi\hat{j}' + \sin\psi\hat{i}')) + \\ &\quad \dot{\theta}(\cos\psi\hat{i}' - \sin\psi\hat{j}') + \dot{\psi}\hat{k}' \\ &= (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\hat{i}' + \\ &\quad (\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\hat{j}' + \\ &\quad (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{k}'\end{aligned}$$

EJEMPLO 7.0.11 Considere una función escalar $V(\vec{r})$. Determine la nueva función escalar $U(\vec{r})$ obtenida rotando la anterior en torno a un eje por el origen, mediante una rotación en torno a un eje $\hat{n}$ en un ángulo ϕ .

Solución. Evidentemente, los valores de la función rotada U en un punto $\vec{r}$ son los valores de la función original en el punto $R^{-1}\vec{r}$, es decir

$$U(\vec{r}) = V(R^{-1}\vec{r}).$$

EJEMPLO 7.0.12 Se tiene un elipsoide centrado y orientado de acuerdo a los ejes cartesianos con ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Determine la ecuación del elipsoide que se obtiene al rotar el anterior en torno a un eje que pasa por su centro en un ángulo ϕ y en un eje $\hat{n}$.

Solución. Es conveniente escribir la ecuación del elipsoide en una forma matricial

$$\vec{r}^T M \vec{r} = 1,$$

siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo al problema anterior, la ecuación del elipsoide rotado será

$$(R^{-1}\vec{r})^T M (R^{-1}\vec{r}) = 1,$$

o bien

$$\vec{r}^T R_{\hat{n}}(\phi) M R_{\hat{n}}(-\phi) \vec{r} = 1.$$

Falta realizar la multiplicación matricial indicada, que es un tanto complicada. Por ejemplo si, se trata de una rotación respecto al eje x , resultará

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{\cos^2 \phi}{b^2} + \frac{\sin^2 \phi}{c^2} \right) y^2 + \left(\frac{\sin^2 \phi}{b^2} + \frac{\cos^2 \phi}{c^2} \right) z^2 \\ + 2 \cos \phi \sin \phi \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) z y = 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7.0.13 *En la colisión de dos cuerpos rígidos si se conserva la energía en el choque, pruebe entonces que el coeficiente de restitución es unitario. Aquí, el coeficiente de restitución debe ser definido respecto a la dirección en que se desarrolla la fuerza de interacción impulsiva (J), ver figura (7.4).*

Solución. Si llamamos $\vec{J}$ a la interacción impulsiva y P_1 (y P_2) al punto de contacto, 1 y 2 a los centros de masas e indicamos con $+y-$ a valores de las diversas cantidades justo después y justo antes de la colisión, tenemos que

$$M_1(\vec{v}_1^+ - \vec{v}_1^-) = \vec{J}, \quad (7.3)$$

$$M_2(\vec{v}_2^+ - \vec{v}_2^-) = -\vec{J}, \quad (7.4)$$

$$H_1(\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^-) = \vec{G}_1 P \times \vec{J}, \quad (7.5)$$

$$H_2(\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^-) = -\vec{G}_2 P \times \vec{J}, \quad (7.6)$$

Figura 7.4:

y conservación de energía

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_1v_1^{+2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{+2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ = \\ \frac{1}{2}M_1v_1^{-2} + \frac{1}{2}M_2v_2^{-2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^- . \end{aligned} \quad (7.7)$$

De las ecuaciones (7.5) y (7.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1^+ \cdot H_1\vec{\omega}_1^+ - \vec{\omega}_1^- \cdot H_1\vec{\omega}_1^- &= (\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \cdot G_1\vec{P} \times \vec{J}, \\ \vec{\omega}_2^+ \cdot H_2\vec{\omega}_2^+ - \vec{\omega}_2^- \cdot H_2\vec{\omega}_2^- &= -(\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \cdot G_2\vec{P} \times \vec{J}. \end{aligned}$$

De aquí, con algo de álgebra, puede obtenerse de la ecuación de conservación de la energía

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1^+ + \vec{v}_1^-) \cdot \vec{J} - (\vec{v}_2^+ + \vec{v}_2^-) \cdot \vec{J} &= -(\vec{\omega}_1^+ + \vec{\omega}_1^-) \times G_1\vec{P} \cdot \vec{J} + \\ &+ (\vec{\omega}_2^+ + \vec{\omega}_2^-) \times G_2\vec{P} \cdot \vec{J}, \end{aligned}$$

pero

$$\vec{v}_{P_1}^+ = \vec{v}_1^+ + \vec{\omega}_1^+ \times G_1\vec{P},$$

y similarmente las otras, entonces

$$(\vec{v}_{P_1}^+ + \vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^+ - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J},$$

es decir

$$(\vec{v}_{P_1}^+ - \vec{v}_{P_2}^+) \cdot \vec{J} = -(\vec{v}_{P_1}^- - \vec{v}_{P_2}^-) \cdot \vec{J}.$$

que significa coeficiente de restitución unidad, en la dirección del impulso de interacción.

EJEMPLO 7.0.14 *Para el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, discuta la condición que debe cumplir su spin para que su movimiento vertical sea estable. Considere dados sus momentos de inercia respecto a la púa, A y C , su masa M y la distancia h desde la púa al centro de masas.*

Solución. Las constantes para el movimiento de este trompo serán

$$\alpha = A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + Cs \cos \theta = Cs, \quad E = \frac{1}{2}Cs^2 + mgh.$$

Entonces, la ecuación para $\dot{u}^2$ ($u = \cos \theta$) resulta

$$\dot{u}^2 = f(u) = (2mgh - 2mghu) \frac{1 - u^2}{A} - \left(\frac{Cs - Csu}{A} \right)^2,$$

que admite como índice $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, y para la otra

$$2mgh \frac{1 + u}{A} - \left(\frac{Cs}{A} \right)^2 = 0.$$

La condición de estabilidad es que esta tercera raíz, sea mayor que 1, es decir

$$\left(\frac{Cs}{A} \right)^2 \geq \frac{4mgh}{A}.$$

EJEMPLO 7.0.15 *Considere el movimiento de un trompo simétrico con su púa fija, en precesión uniforme, es decir con la inclinación de su eje respecto de la vertical constante. Deduzca la condición que deben cumplir su spin S y su velocidad angular de precesión $\dot{\phi} = \Omega$ para que ello ocurra. Considere dados sus momentos de inercia respecto a la púa, A y C , su masa M y la distancia h desde la púa al centro de masas, además de la aceleración de gravedad.*

Solución. Aquí es preferible partir de cero. Para este caso en el momentum angular varían sólo los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{k}$. En efecto

$$\vec{L}_0 = A\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + Cs \cos \theta \hat{k},$$

de donde

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = A\dot{\phi} \sin \theta \frac{d\hat{i}}{dt} + Cs \cos \theta \frac{d\hat{k}}{dt} = -mgh \sin \theta \hat{j}.$$

Las derivadas son

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \dot{\phi} \cos \theta \hat{j}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{j},$$

por lo que resulta la condición

$$A\dot{\phi}^2 \cos \theta - Cs\dot{\phi} + mgh = 0.$$

Puede notarse que para un spin dado, existe uno, dos, o ni un valor de la precesión $\dot{\phi}$ según sea el signo del discriminante

$$C^2 s^2 - 4Amgh \cos \theta.$$

EJEMPLO 7.0.16 *Respecto al problema anterior, deduzca la condición que debe cumplir el spin s del trompo, para que el trompo pueda tener movimiento de precesión uniforme en cualquier ángulo θ .*

Solución. De la solución del problema anterior, basta requerir que $C^2 s^2 - 4Amgh \cos \theta \geq 0$ para todo θ . Por lo tanto debe ser

$$C^2 s^2 \geq 4Amgh.$$

EJEMPLO 7.0.17 *Considere una barra de largo $2a$ y masa m que se coloca horizontalmente en equilibrio sobre el punto más alto de una esfera de radio R que permanece en reposo. Considerando sólo movimiento en el plano vertical que contiene la barra, escriba la ecuación de movimiento para el ángulo que gira la barra, considerando que ella no desliza sobre la esfera. Ver figura (7.5).*

Solución. Con relación a la figura, se tiene

$$x_G = R \sin \theta - R\theta \cos \theta, \quad y_G = R \cos \theta + R\theta \sin \theta.$$

De allí se obtiene

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg(R \cos \theta + R\theta \sin \theta), \quad I = \frac{1}{3}ma^2,$$

y

$$(I + mR^2\theta^2)\ddot{\theta} + mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta = 0.$$

Figura 7.5:



EJEMPLO 7.0.18 Considere una partícula de masa m que se mueve en un plano. Las coordenadas elípticas ζ y η se definen por:

$$\zeta = r_1 + r_2,$$

$$\eta = r_1 - r_2,$$

siendo r_1 y r_2 las distancias de la partícula a dos puntos fijos en el plano del movimiento. Demuestre que en términos de coordenadas elípticas, el hamiltoniano de la partícula libre está dado por:

$$H = 2p_\zeta^2 \frac{\zeta^2 - 4c^2}{\zeta^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2 \frac{4c^2 - \eta^2}{\zeta^2 - \eta^2},$$

siendo $2c$ la distancia entre los dos puntos fijos (focos), ver figura (7.6).

Solución. Una solución elegante se encuentra en el libro de Arnold, página 262 ([2]). Una solución más de fuerza bruta sería la siguiente. Con la notación indicada en la figura, podemos escribir

$$\begin{aligned} r^2 &= r_1^2 + c^2 - 2r_1c \cos(\theta_1), \\ r^2 &= r_2^2 + c^2 + 2r_2c \cos(\theta_2), \\ 4c^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1), \\ x &= r_1 \cos \theta_1 - c = r_2 \cos \theta_2 + c, \\ y &= r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2, \end{aligned}$$

Figura 7.6: coordenadas elípticas

de las cuales se puede obtener

$$\begin{aligned} x &= \frac{r_1^2 - r_2^2}{4c}, & y^2 &= r_1^2 - (x + c)^2, \\ x &= \frac{\zeta\eta}{4c}, & y^2 &= \frac{\zeta^2 + \eta^2}{2} - \left(\frac{\zeta\eta}{4c}\right)^2 - c^2, \end{aligned}$$

de donde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 d\zeta^2 + b^2 d\eta^2,$$

con

$$a^2 = \frac{\zeta^2 - \eta^2}{4(\zeta^2 - 4c^2)}, \quad b^2 = \frac{\zeta^2 - \eta^2}{4(4c^2 - \eta^2)}.$$

Como $L = mv^2/2$, se obtiene

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\zeta}^2 + b^2\dot{\eta}^2),$$

y finalmente

$$H = \frac{p_\zeta^2}{2ma^2} + \frac{p_\eta^2}{2mb^2}.$$



EJEMPLO 7.0.19 *Utilice el resultado anterior para escribir el hamiltoniano de una partícula que es atraída inversamente al cuadrado de su distancias a dos centros fijos.*

Solución. El potencial atractivo hacia los dos centros fijos será de la forma

$$V = -\frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2} = -k \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = -k \frac{4\zeta}{\zeta^2 - \eta^2},$$

por lo tanto

$$H = \frac{p_\zeta^2}{2m} \frac{4(\zeta^2 - 4c^2)}{\zeta^2 - \eta^2} + \frac{p_\eta^2}{2m} \frac{4(4c^2 - \eta^2)}{\zeta^2 - \eta^2} - k \frac{4\zeta}{\zeta^2 - \eta^2}.$$



EJEMPLO 7.0.20 *Separe e integre la ecuación de Hamilton Jacobi, para una partícula que es atraída hacia dos centros fijos, utilizando coordenadas elípticas.*

Solución. La ecuación de Hamilton Jacobi para la función característica, con el tiempo separado, será

$$H(\zeta, \eta, \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \frac{\partial W}{\partial \eta}) = \alpha_1.$$

Utilizando el hamiltoniano anterior, resultará

$$\begin{aligned} & \frac{2}{m} \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta} \right)^2 (\zeta^2 - 4c^2) + \frac{2}{m} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 (4c^2 - \eta^2) - k4\zeta \\ &= \alpha_1(\zeta^2 - \eta^2), \end{aligned}$$

por lo cual, separando variables se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2}{m} \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta} \right)^2 (\zeta^2 - 4c^2) - k4\zeta - \alpha_1\zeta^2 &= \alpha_2, \\ \frac{2}{m} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 (4c^2 - \eta^2) + \alpha_1\eta^2 &= -\alpha_2, \end{aligned}$$

que permiten escribir

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \sqrt{\frac{k4\zeta + \alpha_1\zeta^2 + \alpha_2}{\zeta^2 - 4c^2}} d\zeta \\ &+ \sqrt{\frac{m}{2}} \int \sqrt{\frac{-\alpha_1\eta^2 - \alpha_2}{4c^2 - \eta^2}} d\eta. \end{aligned}$$

EJEMPLO 7.0.21 Considere una partícula moviéndose en un campo central de fuerza atractivo inverso al cuadrado de la distancia, de modo que

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r}.$$

Demuestre que la energía, en términos de las variables de acción angular, para coordenadas r y θ en el plano del movimiento, está dada por

$$E = -\frac{2m\pi^2 k^2}{(J_r + J_\theta)^2}.$$

Solución. Los momentos canónicos serán

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$$

Para el movimiento periódico, con energía negativa, las variables de acción son

$$J_\theta = 2\pi p_\theta, \quad J_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2} - \frac{2mK}{r}} dr,$$

siendo r_1 y r_2 las índice de la cantidad subradical. La integral puede calcularse resultando

$$J_\theta = -\frac{2mK\pi}{\sqrt{-2mE}} - 2\pi p_\theta,$$

de donde sigue el resultado.

EJEMPLO 7.0.22 Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento para un conjunto de partículas de igual masa que están unidas en línea recta por resortes de constante elástica K , y largo natural a , para las desviaciones longitudinales en torno a las posiciones de equilibrio. Considere primero un conjunto de N partículas estando fijas las de los extremos y luego, un conjunto infinito con condiciones de borde periódicas.

Solución. El lagrangiano del sistema es

$$L = \sum_i \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2}K(q_i - q_{i-1})^2,$$

de donde se deducen las ecuaciones de movimiento para cada masa

$$\ddot{q}_j = \frac{K}{m}(q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Para un caso (a) tomaremos $q_0, q_{N+1} = 0$, y para el otro caso (b) tomaremos $q_0 = q_N, q_{N+1} = q_1$. Para ambos casos, sean las dependencias temporales

$$q_j(t) = Q_j e^{i\omega t}$$

resultando

$$-\omega^2 Q_j = \Omega^2 (Q_{j+1} + Q_{j-1} - 2Q_j), \quad \text{con } \Omega^2 = \frac{K}{m}, \quad (7.8)$$

un sistema de ecuaciones homogéneo que admite solución distinta de la trivial solo si el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. Aquí, deben distinguirse los dos casos. Es decir las frecuencias admisibles ω satisfacen

a)

$$\det \begin{bmatrix} \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & & 0 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \Omega^2 \\ 0 & \dots & 0 & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

b)

$$\det \begin{bmatrix} \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & 0 & \dots & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 & & 0 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \Omega^2 \\ \Omega^2 & 0 & \dots & \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Una alternativa sin embargo es encontrar soluciones no triviales de (7.8). Para ello suponga

$$Q_j = C e^{i(j\phi)}.$$

Si se reemplaza en el sistema de ecuaciones se comprueba que ellas son efectivamente soluciones si se cumple

$$\omega = 2\Omega \sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Para el caso periódico debe además tenerse

$$e^{i(N\phi)} = 1,$$

por lo cual, las soluciones admisibles para las frecuencias son

$$\omega_n = 2\Omega \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

El caso de extremos fijos, es más complicado y está resuelto en el capítulo de sistemas continuos



EJEMPLO 7.0.23 *Para el movimiento de una partícula respecto a un sistema fijo a la superficie de la tierra, que gira con velocidad angular constante sometida a su peso y a otras fuerzas que no realizan trabajo virtual, demuestre que despreciando términos en ω^2 las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse como:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Solución. De acuerdo al teorema de Coriolis, la aceleración absoluta $\vec{a}_{abs}$ puede relacionarse con la aceleración y velocidades relativas ($\vec{a}$ y $\vec{v}$) de acuerdo con

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_A + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a},$$

siendo A un punto origen en la superficie terrestre. Si se considera además que

$$mg\hat{k} = m\vec{a}_A + \frac{GMm}{R^2}\hat{R},$$

entonces, la ecuación de movimiento, segunda ley de Newton, con una fuerza $\vec{F}$ adicional a la gravitacional será

$$m(\vec{a}_A + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}) = -\frac{GMm}{R^2}\hat{R} + \vec{F},$$

entonces

$$m\vec{a} = -mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{F}.$$

Ahora es necesario recordar que la siguiente es una identidad

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{v^2}{2} = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

luego si se multiplica por la masa y se reemplaza $m\vec{a}$, recordando que $\vec{F} \cdot \partial\vec{r}/\partial q_i = 0$ si la fuerza no realiza trabajo virtual, entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} K - \frac{\partial}{\partial q_i} K = (-mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

además

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i},$$

de donde se establece el resultado

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = (-2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i},$$

siendo el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - mgz.$$

EJEMPLO 7.0.24 *Aplique lo anterior para escribir las ecuaciones de movimiento de una partícula que oscila en un plano horizontal liso atraída hacia el origen por una fuerza elástica, con influencia de la rotación terrestre. Elija los ejes x hacia el Sur, y hacia el Este, z vertical, en el punto de latitud λ .*

Solución. El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}K(x^2 + y^2),$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}, & \vec{\omega} &= -\omega \cos \lambda \hat{i} + \omega \sin \lambda \hat{k}, \\ \ddot{x} + \frac{K}{m}x &= 2\omega\dot{y} \sin \lambda, & \ddot{y} + \frac{K}{m}y &= -2\omega\dot{x} \sin \lambda. \end{aligned}$$

Alternativamente, si se hubieran usado coordenadas polares

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}Kr^2,$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{m}r = 2r\dot{\theta}\omega \sin \lambda, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta} + 2r^2\omega \sin \lambda) = 0.$$

EJEMPLO 7.0.25 Si el origen del sistema (no inercial) que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ no está acelerado, muestre que la ecuación de Lagrange puede escribirse:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

si se toma como lagrangiano, el siguiente:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}) + m\vec{v} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{1}{2}m |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2.$$

Solución. La aceleración absoluta está dada por (Teorema de Coriolis)

$$\vec{a}_{abs} = 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{a},$$

luego se trata de demostrar que se obtiene correctamente la ecuación

$$\left(m2\vec{\omega} \times \vec{v} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + m\vec{a} + \nabla V \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 0. \quad (7.9)$$

Si denotamos por L_i al operador

$$L_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i},$$

se tiene que

$$L_i \frac{1}{2}mv^2 = m\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

similarmente

$$L_i(-V) = \frac{\partial V}{\partial q_i} = \nabla V \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

y

$$L_i(m\vec{v} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

y finalmente

$$L_i \left(\frac{1}{2}m |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 \right) = (m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

que junto con la ecuación correcta (7.9), prueban que $L_i L = 0$.



Bibliografía

- [1] J. D. W. Alexander L. Fetter. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. Mac.Graw Hill, 1980.
- [2] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, 1978.
- [3] Elsgoltz. *Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional*. 1969.
- [4] J.A.Blackburn. Stability and hopf bifurcations in an inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 60:903, 1992.
- [5] L. Y. Lifshitz. *Fisica Teorica, Mecanica*. Reverté, 1965.
- [6] J. M.Henneaux, C.Teitelboim. *Gravity in Higher Dimensions*. VI Symposium on Relativity and Gravitation, Brasil 1987.
- [7] F. Scheck. *Mechanics*. Springer Verlag, 1990.
- [8] J. L. Synge. *Principles of Mechanics*. Mac Graw Hill, New York, 1959.

Índice alfabético

- Acción
 - definición de, 199
- Angulos de Euler, 80
- Bola
 - problema ejemplo, 107
- Condiciones de frontera.
 - Ecuación de onda., 216
- Condiciones iniciales.
 - Ecuación de onda., 217
- Cono del cuerpo, 97, 129
- Cono del espacio, 97, 129
- Coordenadas elípticas, 317
- Coordenadas generalizadas, 2
- Coordenadas normales, 157
- Coriolis
 - teorema de, 322
- Cuerpo rígido, 74
- D'Alembert
 - Solucion de la ecuación de onda., 276
- Diagonalización
 - de matriz de inercia, 76
 - en oscilaciones pequeñas, 155
- Ecuación cúbica, 300
- Ecuaciones
 - de Euler, 92
 - de Lagrange, 1
- Ecuaciones de Lagrange
 - para vínculos no holonómicos, 201
- Ejes principales de inercia, 77
- Elipsoide de inercia, 77
- Energía cinética
 - en oscilaciones pequeñas, 150
- Energía cinética de un cuerpo rígido, 76
- Energía potencial
 - en oscilaciones pequeñas, 152
- Equilibrio
 - en oscilaciones pequeñas, 151
- Espacio de fase, 27
- Estabilidad
 - de posición de equilibrio, 151
- Estabilidad de puntos críticos, 28
- Euler
 - ángulos de, 80
 - ecuaciones de, 92
 - teoremas sobre rotaciones, 70
- Fluidos incompresibles., 240
- Fuerza
 - dependiente de la velocidad, 16
- Fuerzas de vínculos, 2
- Función
 - homogénea de grado p , 15
- Grados de libertad, 2

- Hamilton
 - principio variacional, 1
 - principio variacional de, 51, 200
- Hamiltoniano, 12
 - teorema de conservación, 14
- Identidad
 - relacionada con ecuaciones de Lagrange, 54
- Identidad útil, 301
- Lagrange
 - ecuaciones de, 1, 5, 10, 11, 52, 200
 - multiplicadores de, 5
- Lagrangiano, 10
- Lagrangiano aproximado
 - en oscilaciones pequeñas, 152
- Legendre
 - transformación de, 12
 - transformada de, 292
- Matriz
 - de inercia de un cuerpo rígido, 75
- Matriz de inercia
 - rotación de ella, 78
 - traslación de ella, 79
- Momento canónico
 - teorema de conservación, 14
- Momento de inercia, 76
- Momentos canónicos, 11
- Momentum angular de un cuerpo rígido, 74, 76
- Movimiento cuspidal.
 - Trompo., 104
- No holonómico
 - Vínculo, 5
- Noether
 - ejemplos, 23
 - teorema de, 22
- Ondas sonoras., 245
- Orbita
 - cuasi elíptica, 291
- Oscilaciones pequeñas, 149
- Poinsot
 - Eliposide de, 95
- Potencia en ondas., 229
- Pozo rectangular de potencial, 291
- Precesión uniforme.
 - Trompo., 103
- Producto de inercia, 76
- Promedios temporales
 - en órbita elíptica, 305
- Puntos críticos, 27
- Rotación
 - de un sistema, 69
 - finita de un vector, 70
- Sección eficaz, 292
- Sistema
 - rígido de partículas, 73
- Sistema continuos, 185
- Sistema continuos, 208
- Sistemas autónomos, 27
- Sistemas conservativos, 27
- Solución de D'Alembert., 221
- Steiner
 - teorema de, 79
- Teorema
 - de adición de velocidades angulares, 72
 - de conservación del hamiltoniano, 16

- de Noether, 22
- de Steiner, 79
- Teoremas
 - de conservación, 14
 - sobre ejes principales de inercia, 77
- Trompo dormido, 106, 294, 315
- Trompo dormido.
 - Estabilidad., 103
- Trompo en precesión uniforme, 294
- Trompo simétrico, 101
 - ecuaciones de movimiento, 101
- Velocidad angular, 71
- Velocidad de grupo., 271
- Virtuales
 - cambios virtuales, 2
 - desplazamientos virtuales, 3