

FIIA2 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Semestre 2008-1

Unidad 7A: Presión colisional

Por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

Indice

7. Presión Colisional	1
7.1. Nociones previas	2
7.2. Colisiones elementales	2
7.3. La presión colisional	4
7.4. Fuerza al desviar un chorro de partículas	5
7.5. Rebotes en una placa inclinada	5
7.6. Impulso y fuerza media	6
7.7. Preguntas de comprensión	8

7. Presión Colisional

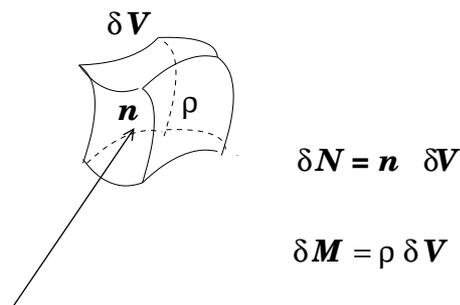
En esta unidad estudiaremos la fuerza que ejerce un conjunto de partículas cuando rebotan en una superficie. Partiremos con nociones simples acerca de rebotes de partículas y construiremos un modelo más elaborado para cuantificar el rebote de un chorro de ellas.

Lo interesante de este modelo es que nos permite hacerlo extensivo a diversos sistemas de nuestro entorno. Por ejemplo, entender la fuerza de un gas sobre las paredes de su contenedor; la fuerza de arrastre del aire sobre un globo cuando se mueve rápidamente; la fuerza del viento; la fuerza que ejerce una cadena al caer sobre el suelo; el rol de las aspas de un helicóptero para que vuele; la fuerza que ejerce el chorro de una mangera; etc.

7.1. Nociones previas

Conviene introducir algunas nociones que nos serán útiles en la discusión que sigue. La primera de estas es la *densidad de partículas*, denotada por n , que corresponde al número de partículas por unidad de volumen. Así, si $n(\vec{r})$ es el número de partículas por unidad de volumen en la posición \vec{r} , entonces el número de partículas δN en un pequeño volumen de tamaño δV que abarca \vec{r} está dado por

$$\delta N = n(\vec{r}) \delta V .$$



Al igual que el caso anterior, podemos definir la *densidad de masa*, que denotaremos por ρ . De esta forma, la masa δM contenida en un pequeño volumen de tamaño δV estará dado por

$$\delta M = \rho(\vec{r}) \delta V .$$

Ciertamente ρ puede depender de la posición, lo que se representa por $\rho = \rho(\vec{r})$.

Si todas las partículas son de igual masa, m_o , entonces

$$\rho = m_o n ,$$

7.2. Colisiones elementales

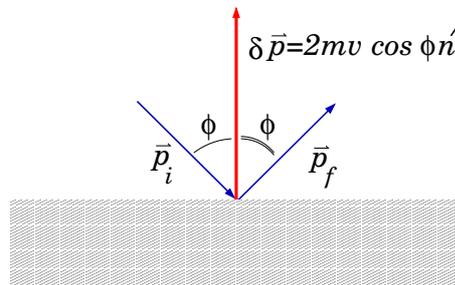
Cuando una partícula con cierto momentum rebota en una superficie, ésta experimenta un cambio de momentum. El momentum transferido a la partícula es

$$\delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i ,$$

donde \vec{p}_i y \vec{p}_f son los momenta inicial y final, respectivamente. Si el rebote es elástico, con la partícula incidiendo con rapidez v , entonces la variación de momentum está dada por

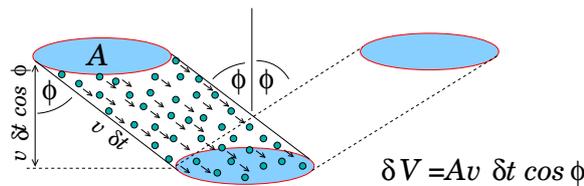
$$\delta \vec{p} = 2m_o v \cos \phi \hat{n} ,$$

con ϕ el ángulo de incidencia con respecto a la normal \hat{n} del plano del rebote y m la masa de la partícula.



Este cambio de momentum es el que la superficie le imprime a la partícula, siendo su origen la interacción (fuerza) percusiva que la superficie ejerce sobre la partícula (que por la 3ra ley de Newton, es igual y opuesta a la que la partícula le imprime a la superficie).

La situación interesante ocurre cuando una lluvia de partículas rebota sobre la misma superficie. Para simplificar la discusión, supondremos que existen n partículas por unidad de volumen, las cuales se mueven con igual velocidad de incidencia sobre una superficie plana.



En este caso cuantificaremos el momentum neto $\delta \vec{P}$ que imprime la superficie a las partículas en un lapso δt . En la figura se ilustra un chorro de partículas que incide sobre la superficie. En ella se muestran las partículas que colisionarán la superficie entre el instante t y $t + \delta t$. El cambio de momentum será igual al cambio experimentado por una de las partículas, multiplicado por el número de ellas que colisionarán la pared. Tal número, que denotaremos δN , está dado por

$$\delta N = n \times \text{Vol} = n \times A v \delta t \cos \phi .$$

Entonces, el cambio de momentum experimentado por todas las partículas que golpean (en el lapso δt) es

$$\begin{aligned} \delta \vec{P} &= (n A v \delta t \cos \phi) \times (2m_o v \cos \phi \hat{n}) \\ &= 2 \underbrace{m_o n}_\rho A v^2 \cos^2 \phi \hat{n} \delta t . \end{aligned}$$

Identificamos entonces la fuerza media responsable del cambio de momentum de las partículas rebotando:

$$\vec{F}_{col} = 2\rho A v^2 \cos^2 \phi \hat{n} .$$

Denotando por $A_\perp = A \cos \phi$, la sección transversal del chorro de partículas, entonces

$$\vec{F}_{col} = 2\rho A_\perp v^2 \cos \phi \hat{n} .$$

Observamos que la fuerza de la superficie sobre el chorro es proporcional a:

- la densidad de masa del chorro;
- el cuadrado de la rapidez;
- la sección transversal del chorro;
- al coseno del ángulo de incidencia c/r a la normal.

En el caso de un chorro de partículas que incide perpendicularmente sobre una superficie, la fuerza es

$$F_{\perp} = 2\rho A_{\perp} v^2 .$$

Podemos estimar la fuerza que ejerce un viento de 60 km/h sobre una placa de 1 m². Tomando $v = 60 \text{ km/h} \approx 17 \text{ m/s}$, $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$, estimamos $F_{\perp} \approx 580 \text{ N}$, equivalente a una masa de 58 kg.

7.3. La presión colisional

Volviendo a la expresión $\vec{F}_{col} = 2\rho A v^2 \cos^2 \phi \hat{n}$, observamos que

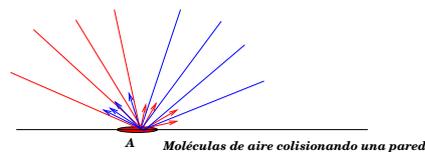
$$\text{Presión} = p \equiv \frac{F_{col}}{A} = 2\rho v^2 \cos^2 \phi$$

que expresa la fuerza por unidad de área que ejerce el chorro al incidir las partículas. A esta cantidad se le denomina *presión*, y dimensionalmente se expresa como fuerza/área. En el sistema internacional, una unidad de presión se expresa en N/m², correspondiente a 1 pascal:

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa}$$

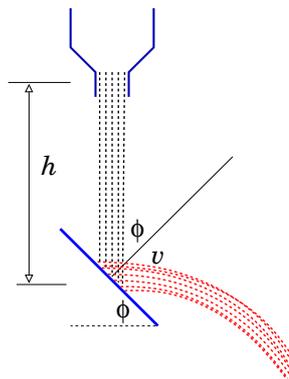
La presión es una cantidad física muy útil para caracterizar la manifestación mecánica de un medio fluido. En nuestro modelo es el resultado del cambio de momentum de partículas en movimiento. En este modelo, las partículas son monoenergéticas (todas chocan con la misma energía cinética) y colimadas (todas ellas se mueven en la misma dirección).

En el caso del aire, las partículas que golpean un pequeño elemento de superficie provienen de todas las direcciones dentro de medio hemisferio (ver figura más abajo). Además, las partículas no son monoenergéticas sino se distribuyen probabilísticamente. El cálculo de la presión en este caso requiere de herramientas que van más allá de las que se cuentan a este nivel. El origen microscópico de la presión es el mismo que hemos introducido en esta unidad.



7.4. Fuerza al desviar un chorro de partículas

Una aplicación directa del resultado anterior es el estudio de un chorro de partículas que golpea un plano inclinado al caer por gravedad. La deducción anterior para la magnitud de la fuerza del plano inclinado para desviar las partículas en sus impactos, $F_{col} = 2\rho A_{\perp} v^2 \cos \phi$, indica que ella es proporcional al cuadrado de la rapidez del impacto, al coseno del ángulo de inclinación, a la sección transversal del flujo y a la densidad de éste.



Una manera de constatar la proporcionalidad con v^2 es midiendo la fuerza sobre la superficie inclinada y analizar su comportamiento con la altura de caída de granos que caen desde un embudo. Por conservación de energía tenemos que $v^2 = 2gh$, con g la aceleración de gravedad y h la distancia entre el punto de impacto de los granos y el embudo. Así,

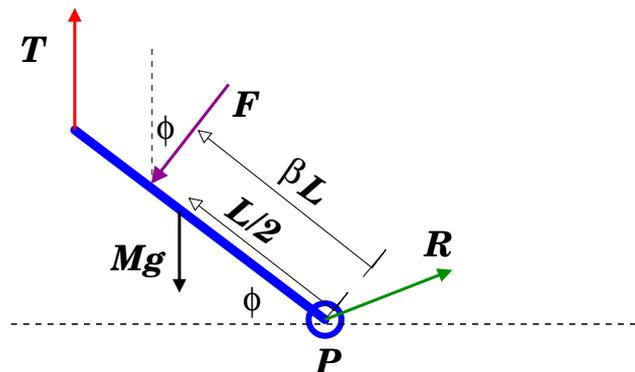
$$F_{col} = (4\rho A_{\perp} g \cos \phi) h \quad (1)$$

$$= (4\rho A_{\perp} g h) \cos \phi \quad (2)$$

La primera de ellas expresa proporcionalidad con respecto a la altura de caída. La segunda expresa la proporcionalidad con respecto a $\cos \phi$. En esta unidad nos planteamos determinar los rangos de variación de h y ϕ para los cuales las expresiones anteriores son razonablemente válidas. ¿Cómo medir nA_{\perp} a partir de una imagen?

7.5. Rebotes en una placa inclinada

En la figura de más abajo se ilustran las fuerzas que actúan sobre una placa inclinada de peso $M\vec{g}$, sujeto por un cordel vertical (\vec{T}), percutido por un chorro de granos (\vec{F}), y soportado por un pivote en P (\vec{R}). El chorro de granos cae en forma vertical y percute la placa a una distancia βL desde su extremo inferior.



Si el sistema permanece estático, entonces al imponer torque neto nulo con respecto a P tenemos

$$LT \cos \phi - \beta LF - \frac{L}{2} Mg \cos \phi = 0 \quad \rightarrow \quad (T - \frac{1}{2} Mg) \cos \phi = \beta F .$$

Si denotamos por T_o la tensión que ocurre cuando no caen granos, es decir $F = 0$, entonces

$$T_o = \frac{1}{2} Mg ,$$

con lo cual

$$F = \frac{1}{\beta} (T - T_o) \cos \phi .$$

Si aceptamos que la fuerza $F \rightarrow F_{col}$, entonces

$$4\rho A_{\perp} h g \cos \phi = \frac{1}{\beta} (T - T_o) \cos \phi \quad \rightarrow \quad (T - T_o) = 4\beta (\rho A_{\perp} h) g .$$

Definamos la constante B por

$$B = 4\beta \rho A_{\perp} g ,$$

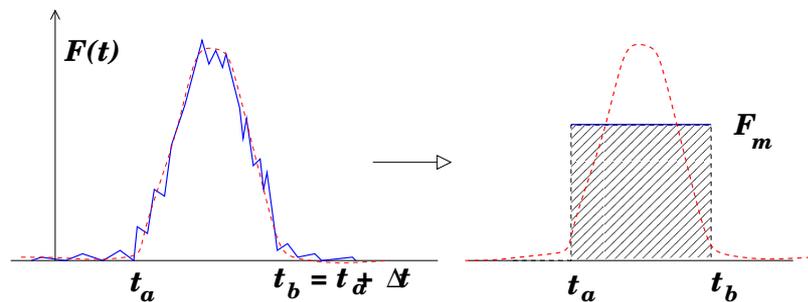
entonces

$$(T - T_o) = Bh .$$

Este resultado de forma bastante sencilla es consistente con el hecho de que la rapidez del impacto en la placa es proporcional a v^2 . Además, la ausencia de la dependencia en el ángulo ϕ es por la orientación vertical del cordel que soporta la placa. Las relaciones algebraicas permiten la cancelación de $\cos \phi$ provenientes de F_{col} . El objetivo de esta unidad es investigar la validez de esta relación.

7.6. Impulso y fuerza media

En el caso de fuerzas dependientes del tiempo y de corta duración, resulta particularmente útil introducir la noción de *fuerza media*. En la figura de más abajo se ilustra una fuerza variable en el tiempo, comenzando en t_a y terminando en t_b .



Para simplificar ideas supongamos que en este intervalo se identifican N valores de la fuerza en instantes uniformemente espaciados ($\delta t_i = \delta t$), entonces definimos la fuerza media como:

$$\sum_{i=1}^N F_m \delta t_i = \sum_{i=1}^N F_i \delta t_i \Rightarrow F_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i .$$

El significado geométrico detrás de esta definición es que el área bajo la curva $F(t)$ vs t , entre t_a y t_b , es igual a la de F_m en el mismo intervalo.

Recordando que la suma de variaciones consecutivas es igual a la variación total:

$$\sum_i \delta p_i = \Delta p = p_b - p_a ,$$

y recurriendo a la Segunda Ley de Newton:

$$F_i \delta t_i = \delta p_i \Rightarrow \sum_i F_i \delta t_i = \sum_i \delta p_i = \Delta p ,$$

obtenemos

$$\Delta p = F_m \Delta t .$$

Aquí hemos identificado $\Delta t = \sum_i \delta t_i = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_N - t_{N-1}) = t_b - t_a$.

A la cantidad $J \equiv \sum_i F_i \delta t_i$ se le denomina *impulso*, que en el contexto de la Segunda Ley de Newton resulta igual al cambio de momentum. Entonces,

$$J = F_m \Delta t = \Delta p .$$

Podemos aplicar esta relación para una estimación. Estimemos las fuerzas involucradas en una frenada súbita (golpe) de alguien corriendo a $v = 5$ m/s [18 km/h] (la mitad de una marca mundial de 100 metros planos). El freno involucra la detención de un objeto de tamaño aproximado $d \approx 0.1$ m (es cuanto uno se comprimiría al impacto), implicando una duración estimada $\Delta t \approx \frac{d}{v/2} = 1/25$ s. Si la masa del atleta es 50 kg, entonces la fuerza media en ese frenado es aproximadamente

$$F_m \approx \Delta p / \Delta t \approx \frac{50 \times 5}{1/25}$$

vale decir, unos 6250 N, del orden de 0.6 toneladas! Esta es una estimación no muy alejada de la realidad. Note que la fuerza disminuye notablemente al incrementar el lapso del frenado. Eso lo tienen muy presente los expertos en seguridad del tránsito.

7.7. Preguntas de comprensión

1. ¿En qué unidades se expresa B ?
2. Estime la densidad de alumnos en la Sala Galileo, de superficie 300 m^2 ; estime la densidad de masa correspondiente.
3. Estime la fuerza de una granizada sobre un paraguas plano horizontal.
4. ¿Cuál sería el ángulo de rebote de una partícula incidiendo con un ángulo ϕ si la energía cinética del rebote es λ veces la inicial?
5. ¿Cuál es el significado físico de $T - T_o$?
6. ¿En qué unidades se expresa ρv ?
7. Estime la fuerza que ejerce viento de 100 km/h sobre la pared de una casa de $2,5 \text{ m}$ de altura y 5 m de ancho.
8. Un chorro de partículas de densidad de masa ρ (1 kg/m^3) se mueve con velocidad v (1 m/s) a lo largo de una manguera. Para doblar la manguera en un ángulo β (30°), ¿qué fuerza es necesaria aplicar?
9. ¿Qué caracteriza a un chorro monoenergético y colimado de partículas?
10. Estime el tiempo que dura la colisión de un puñado de porotos cuando estos son soltados desde 50 cm de altura.
11. Defina la densidad de partículas n e ilustre con un ejemplo.
12. Defina la densidad de masa ρ e ilustre con un ejemplo.