GUIA TEORICA
Unidad 6B: Ondas Estacionarias
Profs: H. Arellano, D. Mardones, N. Mujica
Semestre 2008-1

1. Introducción

Todos los cuerpos exhiben algún grado de flexibilidad en cuanto pueden experimentar pequeñas deformaciones, sean estas de tipo longitudinal (a lo largo del cuerpo) o transversal (normales al cuerpo). Estas perturbaciones, inicialmente forzadas por un agente externo, pueden viajar a través del medio dando lugar a ondas y pulsos.

Un caso simple, pero muy relevante, es una cuerda tensa dispuesta en forma horizontal. Supondremos el eje x alineado con la cuerda. En este caso la deformación vertical y(x,t) corresponde a los pequeños cambios de posición vertical de las partícula que forman la cuerda. Las partículas se refieren a un elemento infinitesimal de la cuerda entre x y $x + dx$. Al aplicar la segunda ley de Newton dicho elemento infinitesimal de la cuerda, obtenemos la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

donde $c = \sqrt{\tau/\rho}$, con τ tensión de la cuerda y ρ densidad lineal de masa. Notar que c depende exclusivamente de las propiedades del medio y no de las condiciones iniciales o amplitud de las deformaciones.

En la clase anterior se demostró que la función

$$y = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{2}$$

satisface la ecuación de onda. Tal como se discutió en la unidad 6A, las funciones f y g representan la forma de una onda viajera o pulso que se desplaza a la derecha y a la izquierda, respectivamente, con una rapidez c (velocidad de fase).

En esta unidad, estudiaremos el caso en que f y g son funciones sinusoidales, las cuales al sumarse, y bajo condiciones apropiadas, describen ondas estacionarias. Estas ondas parecen no moverse ni a la derecha o izquierda en el tiempo, pero son el resultado de la suma de ondas que individualmente si lo hacen (f y g).

2. Ondas Armónicas

Supongamos que en $t = 0$ la cuerda se ha deformado en forma sinusoidal tal que

$$y(x, 0) = A\sin(2\pi x/\lambda) \tag{3}$$

A representa la amplitud máxima de las deformaciones. Los nodos de la cuerda ($y = 0$) en la condición inicial ocurren en todas las posiciones x que satisfacen $2\pi x/\lambda = n\pi$, es decir $x = n\lambda/2$. El gráfico de la figura 1 ilustra la forma de la cuerda en $t = 0$.

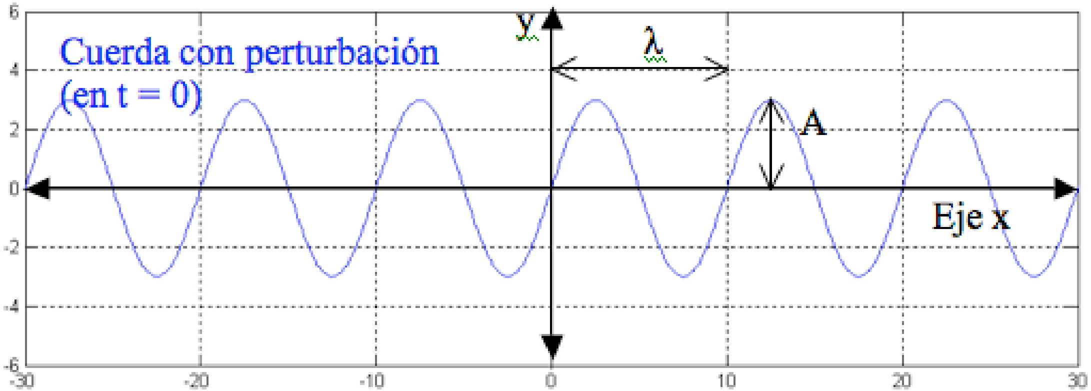

Figura 1: Geometría de una perturbación armónica en $t = 0$. La onda tiene $\lambda = 10$ y $A = 3$.

Notar que en $x = n\lambda$ la forma sinusoidal se reproduce nuevamente. Por esta razón λ se denomina longitud de onda.

Cuando $t > 0$ la onda comienza a avanzar con velocidad de fase c, y supongamos que lo hace hacia la derecha. Usando (3) en (2) con $g = 0$ obtenemos entonces:

$$y(x, t) = A \sin[(2\pi/\lambda)(x - ct)] = A \sin(2\pi(x/\lambda - t/T) \tag{4}$$

donde hemos definido $T = \lambda/c$. Interpretemos ahora este nuevo parámetro. Por simplicidad consideremos $x = 0$, de manera que (4) se reduce a $y(0, t) = A \sin(2\pi t/T)$ cuyo gráfico se muestra en la figura 2. Claramente la partícula en $x = 0$ (y cualquier otra partícula) experimenta oscilaciones armónicas de amplitud A y período T. Entonces la ecuación (4) describe una onda armónica, de amplitud A y con longitud de onda λ y período T que viaja hacia la derecha.

Una forma simplificada de escribir (4) es:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \tag{5}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular [rad/s]. Algunas veces se emplea la frecuencia $f = 1/T$ (Hz=s^{-1}). Las ecuaciones (4) y (5) suponen que $y(x = 0, t = 0) = 0$ lo cual no siempre es asi. Una versión mas general de (4) se escribe como

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t - \phi) \tag{6}$$

donde ϕ se denomina constante de fase. Tanto la amplitud A como la fase ϕ dependen de las condiciones iniciales, es decir de las deformaciones impuestas a la cuerda en $t = 0$.

Las condiciones iniciales también pueden dictar el valor de λ (y k) con lo cual el valor de T (y ω) queda completamente definido pues:

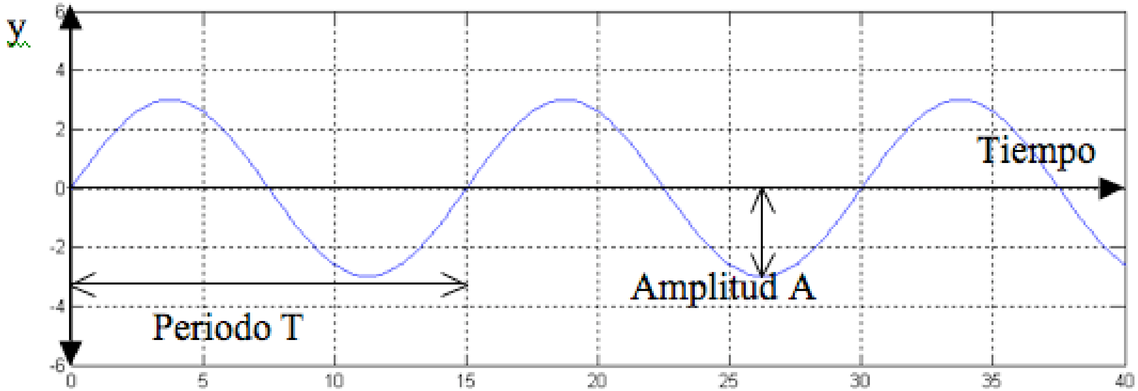

Figura 2: Evolución temporal de la perturbacin armónica en $x = 0$ ($T = 15$ y $A = 3$)

$$\lambda/T = \omega/k = c = \sqrt{\tau/\rho}$$

Alternativamente, la condición inicial puede dictar el valor de T lo cual fija el valor de λ. Las relaciones anteriores indican que la longitud de onda (o número de onda) NO es independiente del período (o frecuencia) cumpliéndose que:

- Ondas largas (número de onda pequeño) son ondas de período largo (baja frecuencia)
- Ondas cortas (número de onda grande) son ondas de período corto (alta frecuencia)

3. Ondas en cuerda con un borde en $x = 0$.

Hasta ahora hemos considerado que la cuerda tiene un largo infinito: $-\infty \leq x \leq +\infty$. Veamos ahora que pasa cuando la cuerda es finita tal que $-\infty \leq x \leq 0$. La condición de borde en $x = 0$ puede ser de dos tipos:

- Extremo fijo (o empotrado): $y(0, t) = 0$ para todo t.
- Extremo móvil: $\partial y(0, t)/\partial x = 0$ para todo t.

3.1. Extremo fijo

Supongamos que un pulso u onda se acerca desde la izquierda hacia el punto de empotramiento y definamos $t = 0$ cuando la perturbación alcanza $x = 0$. Entonces:

$$y_d(x, t) = f(x - ct) \text{ para } t < 0, x \leq 0$$

¿Qué pasa cuando $t > 0$? Para responder esta pregunta emplearemos el principio de superposición y supongamos que la cuerda se extiende hacia el infinito también a la derecha de $x = 0$. Imaginemos que en el lado imaginario de la cuerda viaja una perturbación idéntica a la real pero invertida y moviéndose hacia la izquierda:

$$y_i(x,t) = -f(x+ct) \text{ para } t < 0, x \geq 0$$

Entonces, la solución completa válida en todo x y todo t está dada por:

$$y(x,t) = f(x-ct) - f(x+ct)$$

La fórmula anterior satisface la condición de empotramiento y predice además que pasa para $t > 0$: en este caso la perturbación se refleja en $x = 0$ (es decir comienza a avanzar hacia la izquierda) invirtiendo su forma pero manteniendo todos los demás parmetros (Figura 3a).

3.2. Extremo móvil

En este caso, la partícula en $x = 0$ puede cambiar su posición pero la tangente a la cuerda siempre se mantiene horizontal. Si esta condición no se satisface actuaría una fuerza transversal finita lo que generaría aceleraciones infinitamente grandes. La condición de borde en este caso es: $\partial y(0,t)/\partial x = 0$. Por analogía con el caso anterior se puede demostrar que esta condición de borde es satisfecha por:

$$y(x,t) = f(x-ct) + f(x+ct)$$

La ecuación anterior indica que nuevamente una perturbación viajera se refleja en $x = 0$ pero esta vez comienza a retroceder manteniendo su forma completamente (Fig. 3b).

3.3. Ondas Estacionarias

Supongamos que se generan ondas armónicas en una cuerda finita empotrada en uno de sus extremos. De acuerdo a la solución general vista en 3.1, en este caso la solución está dada por $y(x,t) = A\sin(kx-\omega t) - A\sin(kx+\omega t)$. Aplicando los teoremas de trigonometría es fácil demostrar que:

$$y(x,t) = 2A\sin(\omega t)\sin(kx) \tag{7}$$

La ecuación (6) fue deducida de la superposición (suma) de dos ondas viajeras, pero es una onda estacionaria! (no aparece el término del tipo $x - ct$). Esta onda estacionaria tiene número de onda (y λ) igual a las ondas originales ($\sin(kx)$) y oscila en el tiempo al igual que la original (ω o T no cambian). Los valores k y ω aun satisfacen $\omega/k = c$. La forma de esta onda se muestra en la figura (4).

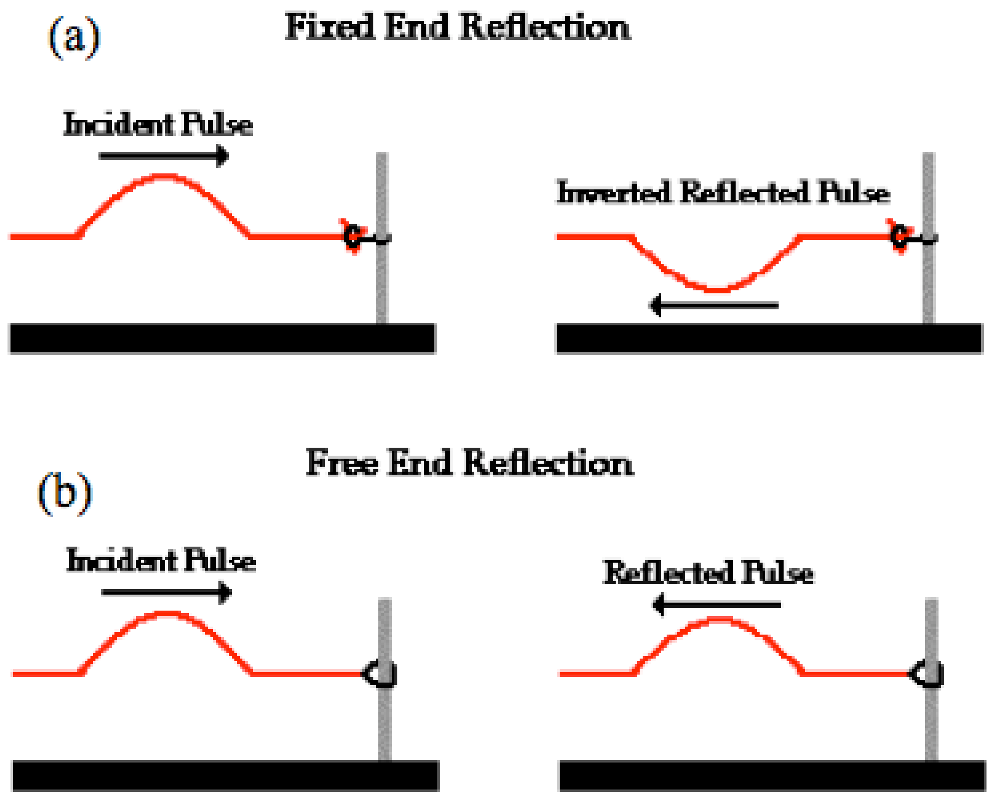

Figura 3: Reflejo de un pulso en un extremo (a) empotrado y (b) libre.

Notemos que en los nodos (separados cada $\lambda/2$) la amplitud es 0 mientras que en los antinodos (también separados por $\lambda/2$) la amplitud es el doble de la original ($2A$).

4. Modos normales en una cuerda finita

4.1. Ambos extremos fijos.

Supongamos ahora que la cuerda esta empotrada en ambos extremos y tiene largo L. Ya no es posible tener valores arbitrarios de k (u ω) pues los extremos de la cuerda deben ser nodos: $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0$ para todo t. La ecuación (6) cumple la primera condición en forma trivial, pero la segunda requiere

$$\sin(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi \rightarrow k = n\pi/L \rightarrow \lambda_n = 2L/n$$

con n un número natural. Además, como $c = \lambda/T = \lambda f \rightarrow f_n = nc/(2L)$ Los pares (λ_n, f_n) definen los modos normales de la cuerda. A medida que n aumenta, disminuye el largo de la onda y aumenta su frecuencia (Fig. 5).

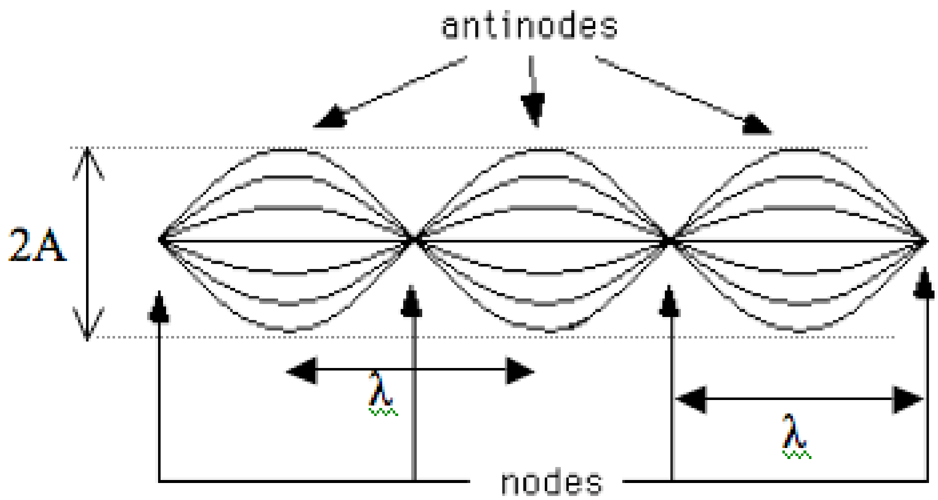

Figura 4: Geometría de onda estacionaria.

4.2. Un extremo fijo y el otro libre.

Se deja propuesto demostrar que en este caso:

$$\lambda_n = 4L/(2n-1) \text{ y } f_n = nc/(4L)$$

4.3. Ambos extremos libres

Se deja propuesto demostrar que en este caso:

$$\lambda_n = 2L/n \text{ y } f_n = nc/(2L)$$

Lectura Suplementaria

Los capítulos 15 y 16 del libro de Tipler o los capítulos 16 y 18 del Serway contienen la materia necesaria para las unidades 6A y 6B.

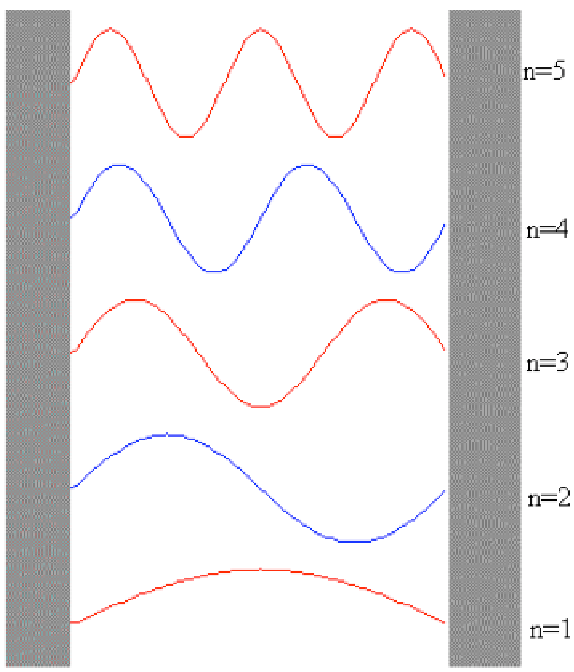

Figura 5: Modos normales en una cuerda con sus dos extremos fijos.