Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Física

Semestre 2008-2

FI1A2- Sistemas Newtonianos

Profesor Rodrigo Soto

Auxiliares: César Casanova M., Juan Pablo Kindermann, Agustín Panes

Resumen Control 2008-2

Unidad 1 : Métodos Numéricos

Cuando tomamos de un conjunto infinito de puntos un subconjunto finito de modo que este subconjunto tenga las mismas propiedades y características que el continuo, estamos discretizando.

Tiempo discretizado : $t_i = i\,\Delta t$

Derivada discreta : $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ en un tiempo i cualquiera se tendrá,

$$\dot{x}(t_i) = \frac{x(t_i+\Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}$$

Derivada hacia adelante : $\dot{x}_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}$

Derivada hacia atrás : $\dot{x}_i = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}$

Derivada centrada : $\dot{x}_i = \dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t}$ es un promedio de las dos anteriores.

Aceleración : $\ddot{x}_i = \dfrac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}$ derivada centrada de $\dot{x}$

Si discretizamos la segunda ley de Newton en su forma más general (cuando la fuerza depende de la velocidad y/o de la posición) y luego la integramos numéricamente, podremos conocer la trayectoria de ésta.

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

$$m\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2}=F(x,\dot{x})$$

Verlet : $$x_{i+1}=2x_i-x_{i-1}+\frac{\Delta t^2}{m}F(x,\dot{x})$$

Unidad 2 : Métodos Experimentales

Valor Promedio: $\langle C\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}C_i$ donde N número de datos

Desviación Estándar: $\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(C_i-\langle C\rangle)^2}$

Errores Sistemáticos: Se deben generalmente al proceso de medición en particular, para disminuirlos o compararlos se puede medir de distintas formas una misma medida.

Errores Aleatorios: Son fortuitos y no inherentes a una medida en sí, por para disminuir su efecto en la medición se realizan muchas medidas.

Error Absoluto: $C=\langle C\rangle\pm\Delta C$

Error Relativo: $\varepsilon=\frac{\Delta C}{\langle C\rangle}$

Considere dos medidas con sus respectivos errores $a=\langle a\rangle\pm\Delta a$ *y* $b=\langle b\rangle\pm\Delta b$ *, los errores absolutos de éstas serán.*

Suma : $C=\langle a\rangle+\langle b\rangle$ $\Delta C=\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2}$

Resta : $C=\langle a\rangle-\langle b\rangle$ $\Delta C=\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2}$

Multiplicación : $C=\langle a\rangle\langle b\rangle$ $\Delta C=\langle a\rangle\langle b\rangle\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a\rangle}\right)^2+\left(\frac{\Delta b}{\langle b\rangle}\right)^2}$

División : $C=\frac{\langle a\rangle}{\langle b\rangle}$ $\Delta C=\frac{\langle a\rangle}{\langle b\rangle}\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a\rangle}\right)^2+\left(\frac{\Delta b}{\langle b\rangle}\right)^2}$

Error de una función : Sea $f(x)$ función derivable

$C=f(a)$ $\Delta C=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=a}\Delta a$

Unidad 3 : Sistemas Extendidos

Masa del Sistema: $M = \sum m_i$

Centro de masa : $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$

Para cada coordenada : $\overrightarrow{X_{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i$

$\overrightarrow{Y_{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{y}_i$

Energía Potencial Gravitación: $U = \sum_{i=1}^{N} m_i g\, y_i = M g Y_{CM}$

Momentum Lineal: $P = \sum_{i=1}^{N} p_i = M V_{CM}$

Energía Potencial Elástica : $U_e = \frac{k\,\delta^2}{2}$

Energía de Rotación : $E_{rot} = \frac{1}{2} I\,\omega^2$

Energía Cinética : $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M\, V_{CM}^2$

Momento de Inercia : $I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$

Unidad 4A: Estática

Torque : $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}| \sin(\theta)$ dónde θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$

$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = R_{CM} M g$ Torque de la Gravedad

Para que el sistema se encuentre en equilibrio se deben imponer dos condiciones suma de fuerzas y torques nula.

$$\sum \vec{\tau} = \cdot \quad \text{y} \quad \sum \vec{F} = 0$$

Unidad 4B : Energía y Trabajo

Trabajo :	$W=\vec{F}\cdot\vec{d}$
Trabajo no conservativo :	$W_{NC}=E_f-E_i$
Energía Mecánica :	$E_M=E_{cinética}+E_{potencial}$
Energía Cinética Total :	$E_{cinética}=K+E_{rot}$
Energía Potencial Total :	$E_{potencial}=U_{gravitacional}+U_{elástica}$

El momento de Inercia cumple con la propiedad de la aditividad, es decir, el momento de inercia de un sistema extendido con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de Inercia de sus componentes con respecto a ese punto.

Teorema de Steiner :	$I_C=M\,\overline{AB}^2+I_{CM}$	dónde $\overline{AB}$ es la distancia desde el punto C hasta el centro de masa.
Teo. Ejes Perpendiculares:	$I_{.\perp.}=I_{xx'}+I_{yy'}$	donde $.\perp.$ es perpendicular al plano xx' y yy'

Unidad 4C : Momento Angular

Momento Angular :

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m\,\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\vec{L}=I_O\times\dot{\vec{\theta}}=I_O\times\vec{\omega}$$

$$\dot{\vec{L}}=\vec{\tau}$$

De éstas dos últimas, se obtiene una nueva relación para el torque:

$$\vec{\tau_O}=I_O\times\dot{\vec{\theta}}=I_O\times\ddot{\vec{\theta}}\,I_O\times\vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{\tau_O^{ext}}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\overrightarrow{F_i^{ext}}$$

Ec Mov. Pendulo Físico: $\ddot{\theta}=-(\frac{mgR_G}{I_O})\,sen\,\theta$ R_G distancia desde el centro de masa hasta el punto G

Unidad 4D : Movimiento de Rodadura

La condición rodar sin resbalar, consiste en que la "rueda" avanza íntegramente el arco de circunferencia que ha descrito en su rodadura

RSR : $x = R\theta$, diferencialmente es $\delta x = R\,\delta\theta$,

Para las velocidades esa relación es

$$\frac{\delta x}{\delta t} = R\frac{\delta\theta}{\delta t} \quad \text{equivalente a} \quad \dot{x} = v = R\omega$$

Por último su segunda derivada

$$\ddot{x} = a = R\alpha$$

Otros Resultados Interesantes:

Velocidad en un punto: $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

Aceleración en un punto: $\vec{a} = \frac{-V^2}{R}\hat{R} + \vec{\alpha} \times \vec{R}$

Para las siguientes unidades recordar que m ***es la masa total del sistema y*** k_{eq} ***es la constante equivalente de una configuración de resortes***

En paralelo : $k_{eq} = \sum k_i$,

En serie : $\frac{1}{k_{eq}} = \sum \frac{1}{k_i}$

Un sólo resorte : $k_{eq} = k$.

Unidad 5A : Oscilaciones

<u>Movimiento Armónico :</u> $\ddot{x}=-\omega^2 x$ donde $\omega=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$

$\ddot{\theta}=-\omega^2 \theta$ donde $\omega=\sqrt{\frac{d}{I_P}}$ y d distancia desde el punto P de rotación hasta el CM

<u>Periodo :</u> $P=\frac{2\pi}{\omega}$

<u>Frecuencia :</u> $f=\frac{\omega}{2\pi}$

De donde se desprende fácilmente la relación siguiente

$$P=f^{-1}$$

La solución de la ecuación del Movimiento Armónico Simple (MAS) y su velocidad :

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$$
$$\dot{x}(t)=-A\,\omega\, sen(\omega t+\phi)$$

<u>Constantes de la solución :</u> $A=x_0{}^2+(\frac{v_0}{\omega_0})^2$

$$\phi=\arctan(\frac{-v_0}{x_0\omega_0})$$

<u>Pequeñas oscilaciones :</u> $\frac{sen(\theta)}{\theta}\approx 1$ con un θ pequeño.

Unidad 5B : Amortiguamiento

<u>Movimiento Amortiguado :</u> $m\ddot{x}=-kx-b\dot{x}$ entonces,

$\ddot{x}-\frac{b}{m}\dot{x}-\frac{k}{m}x=0$ luego,

$\ddot{x}-\frac{1}{\tau}\dot{x}-\omega^2 x=0$ con $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\tau=\frac{m}{b}$

<u>Análogo para una rotación :</u> $\ddot{\theta}+\omega^2\theta+\frac{1}{\tau}\dot{\theta}=0$

La solución de la ecuación del Movimiento Amortiguado y su velocidad :

$$x(t)=A\,e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\Omega t+\Phi) \quad \text{con} \quad \Omega^2=\omega^2-\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$$

$$v(t)=\dot{x}(t)=-A\,e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(\Omega\, sen(\Omega t+\Phi)+\frac{1}{2\tau}\cos(\Omega t+\Phi)\right)$$

<u>Constantes de la solución :</u>

$$A=\sqrt{x_0{}^2+\left(\frac{v_0+\frac{x_0}{2\tau}}{\Omega}\right)^2}$$

$$\Phi=arctg\left(\frac{v_0}{x_0\Omega}+\frac{1}{2\tau\,\Omega}\right)$$

*Fuerza Viscosos dependencia lineal de la velocida*d $F=-bv=-b\,\dot{x}$

<u>Posición Mov Lineal :</u> $x(t)=v.\,\tau(١-e^{-\frac{t}{\tau}})$

<u>Velocidad Mov Lineal :</u> $v(t)=v_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

<u>Posición Mov Lineal :</u> $y(t)=g\,\tau^2\left(\frac{t}{\tau}+e^{-\frac{t}{\tau}}-1\right)$

$$\dot{y}(t)=g\,\tau\,(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

<u>Velocidad Terminal :</u> $v_T=\frac{mg}{b}=g\,\tau$

Fuerza Arrastre dependencia cuadrática de la velocidad $F=-c^{٢}v=-c^{٢}\dot{x}$

<u>Fuerza de Rayleight :</u> $F_a=\frac{1}{2}\rho\,C_d\,A\,v^2$

<u>Velocidad Terminal :</u> $v_T=\sqrt{\frac{mg}{c}}$ donde $c=\frac{١}{٢}\rho\,C_d A$

<u>Velocidad caída :</u> $v_y(t)=v_T\frac{١-e^{-\frac{gt}{v_T}}}{١+e^{-\frac{gt}{v_T}}}$ Antes de la velocidad terminal