Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Física

Semestre 2008-1

FI1A2- Sistemas Newtonianos

Profesor Hugo Arellano S.

Auxiliares: César Casanova M., Juan González B., Daniela Opitz O. y Loreto Oyarte G.

Auxiliar 1: Métodos Numéricos

Problema 1

Encuentre la recurrencia que resuelve numéricamente la siguiente ecuación:

$$\ddot{x}+w^2 x=0$$

Solución:

Como se vió en clases y se dedujo en la guía (véase **Unidad1_GuiaTeorica**) la discretización usada para la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo es:

$$\ddot{x}\approx\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Luego solo basta reemplazarlo en la ecuación y despejar el término x_{i+1}, quedando así:

$$\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2}+w^2 x=0$$

$$x_{i+1}=(2-w^2\Delta t^2)*x_i+x_{i-1}$$

Recuerde que el método de Verlet sirve para integrar numéricamente y que el término posterior de la posición x_{i+1}, depende de los otros dos que le preceden x_i y x_{i-1}, por lo tanto es fundamental conocer las condiciones iniciales del movimiento. es decir x_o y v_o. Con este último dato usted puede calcular x_1, mediante la siguiente relación que no es más que la discretización de lo que usted conoce por derivada**...**

$$x_1=x_0+v_o\Delta$$

Problema 2

Dada la siguiente ecuación de movimiento de un péndulo :

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{L}\sin\theta$$

donde g : gravedad

L : largo de la cuerda

θ : ángulo con respecto a la vertical

Considere también que el péndulo se suelta con una rapidez tangencial inicial v_o y un ángulo inicial θ_o . Encuentre mediante métodos numéricos:

a) Su posición en cada punto
b) Su velocidad angular en cada punto
c) Su amplitud, ángulo máximo con respecto a la vertical
d) Su periodo

Solución

a) Al igual que en el caso anterior, se usa la aproximación numérica para la aceleración angular

$$\ddot{\theta}\approx\frac{\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Luego es cosa de reemplazar y despejar el término θ_{i+1} :

$$\frac{\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1}}{\Delta t^2}=\frac{-g}{L}\sin\theta_i$$

$$\theta_{i+1}=2\theta_i-\theta_{i-1}-\frac{g}{L}\Delta t^2\sin\theta_i$$

Nuevamente la solución depende de **dos posiciones anteriores, que a su vez dependen de las** condiciones iniciales θ_0 y v_0 . Encuentre de forma análoga al ejercicio anterior la posición θ_1.

b) En este caso es conveniente usar la derivada centrada de la velocidad angular, la cual queda expresada por :

$$\ddot{\theta} \approx \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\Delta t}$$

Y también se reemplaza en la ecuación y se despeja el término $\dot{\theta}_{i+1}$

$$\frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\Delta t} = -\frac{g}{L} \sin\theta_i$$

$$\dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_{i-1} - 2\frac{g}{L} \Delta t \sin\theta_i$$

Fíjese que este caso comienza desde un i mayor que uno, ¿Cómo obtengo $\dot{\theta}_1$?, la respuesta viene dada por cualquier otro método numérico que no presente dicha limitación, es decir, que se puede obtener la derivada en dicho punto, por ejemplo la derivada hacia adelante en el caso mencionado :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_0 - \frac{g}{L} \Delta t \sin\theta_0$$

Así, puede comenzar a iterar, no confunda que la expresión obtenida para la velocidad angular depende de solo **una velocidad anterior,** aunque ésta se encuentre dos posiciones más atrás, por lo tanto se requiere de una sola condición inicial para "integrar numéricamente". En este caso la condición depende de $\dot{\theta}_1$ que a su vez depende de $\dot{\theta}_0 = w_0 = v_0/L$, recuerde que en nuestra convención usual $\dot{\theta}_0 = w_0 < 0$.

Reflexione sobre el caso en el otro extremo, y las limitaciones que esta presenta, o sea, ¿hasta dónde sería válido hacer la iteración?.

c) La amplitud se obtendrá evidentemente cuando la velocidad angular sea nula, es decir, cuando en algún tiempo t_i el producto entre la velocidad angular inmediatamente anterior $\dot{\theta}_{i-1}$ y la posterior $\dot{\theta}_{i+1}$ sea negativa. En lenguaje numérico:

$$\dot{\theta}_{i-1} * \dot{\theta}_{i+1} < 0$$

El tiempo que ocurre esto viene dado por :

$$\bar{t} = \frac{t_{i+1} + t_{i-1}}{2}$$

Y la amplitud será :

$$\theta_{máx} = \frac{\theta_{i+1} + \theta_{i-1}}{2}$$

En los dos últimos casos se consideraron los promedios, ya que se cometen un error menor en la estimación.

d) Finalmente el periodo de un péndulo es el tiempo que toma este mismo en realizar una oscilación completa, si se encuentra en su amplitud máxima $\theta_{máx}$ este corresponderá al tiempo que demora en ir y volver a esa misma posición.

Como **se debió haber fijado en las experiencias en el laboratorio,** la forma de encontrarlo era obteniendo el tiempo cuando el péndulo cruzara la vertical, es decir, $\theta = 0$, entonces podemos reformular nuestro problema inicial y comenzarlo desde cero, es decir asumiendo como condición inicial el $\theta_{máx}$ y se analiza cuando este valor se haga negativo mediante la técnica de la intersección...

$$\theta_{i-1} * \theta_{i+1} < 0$$

El tiempo en que ocurrirá esto será:

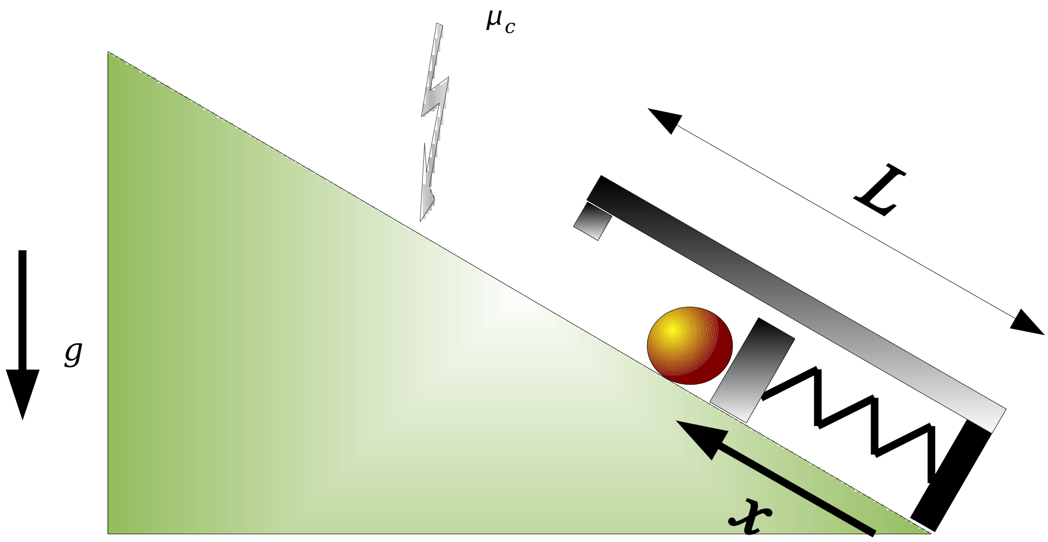
$$\bar{t} = \frac{t_{i+1} + t_{i-1}}{2}$$

Y el período finalmente lo podrá calcular aproximando así :

$$T = 4 * \bar{t}$$

Problema 3

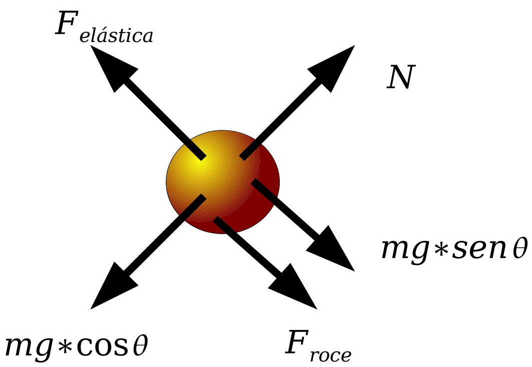
Considerando el siguiente montaje, calcule la trayectoria de la partícula numéricamente. El ángulo de la cuña con la horizontal es θ, el resorte no puede pasar de L, mientras que la partícula sí y ésta se encuentra en una posición inicial x_0 con una velocidad inicial v_0.



Solución:

Como se resolvió en clases, la dinámica de la partícula tiene dos diferentes estados, que son simplemente cuando se encuentra en contacto con el resorte y se ve afectada por la fuerza elástica de este y cuando deja de estarlo en L.

Así el diagrama de cuerpo libre para la partícula es:



Sumando las fuerzas:

$$F_{elástica} - mg*sen\theta - F_{roce} = m\ddot{x}$$

$$N = mg * \cos\theta$$

$$F_{elástica} = k\delta = k(L - x)$$

$$F_{roce} = \mu N = \mu mg * \cos\theta$$

Reemplazando $\ddot{x}$ por su aproximación numérica juntos con las fuerzas se tiene:

$$k(L - x_i) - mg * sen\theta - \mu mg * \cos\theta = m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Se despeja el término recursivo...

$$x_{i+1} = 2x_i + x_{i-1} - \frac{k}{m}\Delta t^2 (L - x_i) - g\Delta t^2 (sen\theta - \mu\cos\theta)$$

Luego se analizan las condiciones iniciales, x_0 es dato y se desea encontrar así :

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t - \frac{1}{2}\ddot{x}_0 \Delta t^2 \qquad \text{Verlet}$$

La aceleración inicial, $\ddot{x}_0$ no es nada más que la discretización de la aceleración inicial, y se puede despejar fácilmente :

$$\ddot{x}_0 = \frac{k}{m}(L - x_0) - g(sen\theta - \mu\cos\theta)$$

Sin embargo, como se usa en la guía, se descarta este último término, o sea, no se consideran los efectos de la aceleración para x_1 , y se resuelve como en los ejercicios :

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

Ahora solo queda resolver para el caso cuando la partícula pasa el largo L . El análisis dinámico es más sencillo, ya que se descarta la fuerza elástica, y quedando las otras tal cual, sin embargo la complicación acá es otra, y viene dada por las condiciones iniciales, es trivial darse cuenta que nuestro nuevo $x_0 = L$ pero: ¿Qué pasa con nuestra nueva velocidad inicial ?

Como ya se deben haber dado cuenta, sería conveniente saber la velocidad en cada punto antes de despegarse del resorte, entonces como se hizo en los otros ejercicios, se aproxima la velocidad mediante la derivada centrada de ésta.

$$k(L-x_i)-mg*sen\theta-\mu mg*\cos\theta=m\ddot{x}=m\frac{\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_{i-1}}{2\Delta t}$$

Despejando el término recursivo :

$$\dot{x}_{i+1}=\dot{x}_{i-1}+2\frac{k}{m}\Delta t(L-x_i)-2\mathrm{g}\,\Delta t(sen\theta-\mu\cos\theta)$$

Se obtiene la velocidad para cada instante, luego con una sola condición inicial se puede saber los otras...

$$v_1=v_0+a_0\Delta t=v_0+\ddot{x}_0\Delta t$$

$$v_1=v_0+\frac{k}{m}\Delta t(L-x_0)-g(sen\theta-\mu\cos\theta)\Delta t$$

Ahora, se conocen las velocidades en todos los puntos antes de , pero a nosotros nos interesa la velocidad en L , así debemos encontrar el tiempo t_i donde la posición es igual a L , esto se hace con la intersección y se debe cumplir que :

$$(x_{i+1}-L)*(x_{i-1}-L)<0$$

Esta vez no consideraremos el promedio, así el tiempo será t_i , luego se evalúa la velocidad en dicho tiempo y se obtiene una aproximación para la velocidad en L .

Una vez conocidas las nuevas condiciones iniciales, se despeja la ecuación de movimiento para las posiciones mayores a L , quedando así :

$$x_{i+1}=2\mathrm{x}_i+x_{i-1}-g\Delta t^2(sen\,\theta-\mu\cos\theta)$$

Como propuesto, intente graficar las posiciones versus el tiempo.