FI1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2008-2
Profesores: Carlos Cartes, Rene Garreaud, Leonardo Massone, Ricardo Moffat, Alvaro Nuñez, Rodrigo Soto
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Guía de Ejercicios

[P1] Considere una partícula que se deja caer verticalmente desde el reposo a una altura H y que sufre roce con el aire de la forma $F_{\text{roce}} = -\gamma v$.

Se busca comparar el tiempo que tarda en caer y la velocidad con la que golpea al suelo con los valores que se obtienen en ausencia de roce: $\sqrt{2H/g}$ y $\sqrt{2gH}$, respectivamente.

Para eso, resuelva numéricamente la ecuación de Newton que resulta con los parámetros $m = 1kg$ y $H = 10m$ con $\gamma = 0$; 0.1 kg/s; 0.2 kg/s; . . .; 0.5 kg/s.

Grafique el tiempo de caida y la velocidad con que llega al suelo en función de γ.

[P2] Se desea determinar la altura máxima a la que llega un proyectil cuando es lanzado verticalmente con velocidad V_0 en presencia de roce viscoso, tal como el descrito en el problema anterior.

Busque un método numérico que permita determinar la altura máxima.

Resuelva para m =0.1 kg, V_0=1 m/s y γ =0.1 kg/s. Compare con la predicción sin roce $H = V_0^2/2g$.

[P3] Se desea resolver el movimiento de la Tierra en torno al Sol. Se sabe que en ese caso la fuerza es la de gravitación universal:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Con el fin de poder tratarla numéricamente, la fuerza se reescribe de la siguiente manera (considerando el movimiento en el plano $x - y$)

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\
&= -\frac{GMm}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{i} + y\hat{j})
\end{aligned}$$

Luego, la ley de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ se escribe por componentes como

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}x \qquad (1)$$
$$\ddot{y} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}y \qquad (2)$$

Use el método de Verlet visto en clases para resolver estas ecuaciones acopladas. Considere los siguientes valores de las constantes: $G = 1$ y $M = 1$. Además considere como condición inicial para la posición $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$ y para la velocidad $v_{x0} = 0$, v_{y0}=0.5, 1.0 y 2.0.

Grafique la trayectoria que resulta (`plot(x,y)`). Compare con los cálculos analíticos que predicen, para los datos del problema, que la velocidad para una órbita circular es $V_{\rm circ} = \sqrt{GM/R} = 1$.

[P4] La deducción de métodos numéricos no siempre es simple y a veces algunos métodos pueden resultar inestables. Un ejemplo clásico es el de la ecuación que describe como decrece la velocidad de un cuerpo en presencia de roce viscoso:

$$m\dot{v} = -\gamma v$$

Sustituyendo se puede mostrar que la solución es

$$v(t) = v(0)\exp(-\gamma t/m)$$

es decir, decae en el tiempo.

Una discretización centrada que en principio parece precisa es

$$\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta t} = -\frac{\gamma}{m}v_i$$

Muestre que si resuelve para $m = 1$, $\gamma = 0{,}1$, $\Delta t = 0{,}1$, $T_{\rm final} = 100$ y $V(0) = 1$ el resultado no tiene sentido.

Sin embargo, se puede escribir otra discretización centrada, en que el lado derecho se promedia en dos instantes

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = -\frac{\gamma}{m}\frac{v_{i+1} + v_i}{2}$$

de la cual se puede despejar v_{i+1} como

$$v_{i+1} = \left(\frac{1 - \gamma\Delta t/2m}{1 + \gamma\Delta t/2m}\right)v_i$$

muestre que esta discretización es estable y entrega resultados sensatos.

[P5] Considere el movimiento de una partícula de masa m unida a un resorte de constante k, descrita por la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -kx$$

Resuelva la ecuación de movimiento, es decir calcule $x(t)$, usando el método de Verlet para el siguiente conjunto de valores: $m = 1kg$, $k = 1N/m$, $x_0 = 3m$ y $v_0 = 0$.

Una vez que tenga la solución de la ecuación, estudie si numéricamente la energía mecánica se conserva

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para eso escriba de alguna manera discreta la velocidad y evalue la energía en función del tiempo. ¿Es constante?

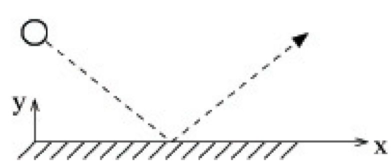
[P6] Se desea saber cómo disminuye en el tiempo la energía mecánica de un cuerpo que cae en el aire en presencia de roce turbulento $F_{\text{roce}} = -\gamma|v|v$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x.

Para eso, considere que se suelta un cuerpo de masa m desde una altura H del piso y se sigue su evolución hasta que golpea al suelo.

- **(a)** Escriba la ecuación de movimiento del cuerpo.
- **(b)** A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt.
- **(c)** Escriba una expresión discreta para la energía mecánica del cuerpo, que use las posiciones discretas encontradas en el punto anterior.

[P7] Se desea modelar un billar donde las bolas se mueven en un plano con roce viscoso sobre la superficie y rebotan contra las paredes de manera elástica (es decir, el ángulo de entrada es igual al ángulo de salida en el rebote).

Para simplificar el ejercicio, se considerá sólo una pared (en vez de 4 que tiene el billar). Esta pared es horizontal y está en $y = 0$.



- **(a)** Escriba las ecuaciones de movimiento para x e y.
- **(b)** A partir de las ecuaciones de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt.

(c) Escriba el algoritmo que permita detectar el choque con la pared y modificar la velocidad cuando el choque ocurra.

[P8] Las nuevas micros del TranSantiago dispondrán de GPS, aparato que les entrega la posición de la micro (x, y) cada cierto intervalo de tiempo Δt. Se desea incorporar a las micros un mecanismo de control que, usando los datos del GPS, permita medir la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ en cada instante de manera que suene una alarma si $|\vec{v}| > V_c$ ó $|\vec{a}| > A_c$.

Considere por simplicidad que el movimiento es puramente bidimensional (es decir, Santiago es plano).

(a) Escriba las expresiones que permiten calcular instantáneamente la velocidad y aceleración, dadas las posiciones entregadas por el GPS.

(b) Complete el siguiente programa `Matlab` que hace el control llamando al método `Alarma` que hace sonar la alarma:

```
for i=1:fin
   if(XXXXXXXX)
     Alarma;
   end
end
```

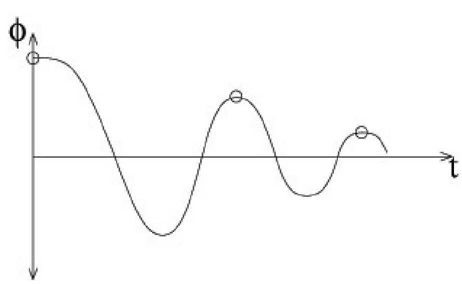
[P9] Un péndulo con roce se describe por las ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\sin\phi - \gamma\dot{\phi}$$

donde L es el largo del péndulo y γ el coeficiente de roce.

Como el sistema tiene roce, si el péndulo se suelta del reposo desde un ángulo inicial ϕ_0, los ángulos máximos que alcance (indicados por un círculo en la figura) serán cada vez menores.

Se busca resolver numéricamente la dinámica del sistema para obtener cómo van disminuyendo estos ángulos máximos. Para eso:



(a) A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt.

(b) Escriba el criterio numérico que permita determinar los instantes en que el péndulo alcanza los ángulos máximos y los valores de estos ángulos.