FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Ejercicio8
Sistemas Newtonianos

7 de Noviembre de 2008 | Profesor: Álvaro Nuñez
Publicada el 9 de Septiembre de 2008 | Auxiliar: Sebastián^3

1. Pauta Ejercicio 8

Ejercicio 8

Solución

1. La velocidad de un pulso depende de la tensión y de la densidad de masa, a través de la relación: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. En este problema la tensión depende de la posición debido a que la cuerda debe sostener su propio peso. En el punto y medido desde el punto inferior, la tensión debe sostener un peso $\rho g y$. De este modo tenemos que la velocidad satisface la relación: $v^2 = gy$. La velocidad satisface la relación de un movimiento uniformemente acelerado: $v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta$. Con $v_i = 0$, $\Delta = y$ y $a = g/2$. El tiempo es entonces entregado por la relación:
$$y(t) = y_0 + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \equiv L. \tag{1}$$
De aquí obtenemos $t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$.

2. En este caso la tensión además debe sostener el peso de la masa M. Entonces, $T = \rho g y + Mg$. La velocidad satisface: $v^2 = gy + \frac{M}{\rho}g$. La velocidad satisface la relación de un movimiento uniformemente acelerado: $v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta$. Con $v_i^2 = \frac{M}{\rho}g$, $\Delta = y$ y $a = g/2$. El tiempo es entonces entregado por la relación: $y(t) = y_0 + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \equiv L$.

   Escogiendo el signo correcto y usando las relaciones previamente encontradas obtenemos:
$$t = 2\sqrt{\frac{M}{\rho g}}\left(\sqrt{1 + \frac{m}{M}} - 1\right) \tag{2}$$

Observaciones (datos freak o que no constribuyen a la evaluación)

La clave para este problema es identificar la dependencia de la tensión, con respecto a la posición. Una vez hecho eso, el resultado es directo si logramos identificar las ecuaciones resultantes con las de un movimiento acelerado uniformemente. Esta identificación no deja de ser extraña pues el valor de la aceleracion es igual a la mitad de g ¡pero hacia arriba!. Esto se debe a más arriba más peso debe soportar la cuerda debido a su propio peso.

Podemos verificar nuestra algebra usando los límites $m \ll M$ y $m \gg M$. En el primer caso obtenemos $t \approx L\sqrt{\frac{\rho}{Mg}}$. Es decir toda la tensión se origina a partir de la masa M y la contribución de la masa de la misma cuerda es irrelevante. El tiempo es simplemente L/c donde c es constante y dado por la densidad de la cuerda y la tensión generada por la masa externa. En el otro caso límite tenemos, $t \approx 2\sqrt{\frac{L}{g}}$. Trivialmente lo calculado en la primera parte.